

Méthodes Algorithmiques

Examen du 23 Avril 2012

*Responsable : Sophie Pinchinat**Les documents sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.***1 Exercice Bonus (1 points)**

Après avoir répondu aux exercices qui suivent, choisissez au moins une catégorie à laquelle ils se rapportent parmi les catégories suivantes.

DR Diviser pour Régner**T** Tri**ES** Essais Successifs**AG** Algorithmes Gloutons**PD** Programmation Dynamique**2 Exercice (3 points)**

On considère l'algorithme suivant, où on supposera que n est une puissance de 2.

ALGORITHM f (integer n)

```
1  if  $n > 1$ 
2    then println("still going")
3          $f(n/2)$ 
4          $f(n/2)$ 
```

Combien de lignes, en une fonction de n (en forme $\Theta(\cdot)$), le programme suivant imprime-t-il ? Écrivez une récurrence et résolvez-la.

3 Exercice (6 points)

Un serveur dans un restaurant a n clients attendant d'être servis. Chaque client a un numéro i compris entre 1 et n , et le temps requis pour servir chaque client est connu à l'avance : le client i requiert un temps de service t_i . Par exemple, si on décide de servir les clients dans l'ordre de leur numéro, le temps d'attente A_i du client i (qui doit attendre que tous les clients précédents soient servis), vérifie les Équations (1) et (2) suivantes :

$$A_i = \sum_{j=1}^i t_j \quad (1)$$

$$A_i = A_{i-1} + t_i \quad (2)$$

On cherche à minimiser le temps d'attente global $A = \sum_{i=1}^n A_i$.

1. Dans quel ordre vous paraît-il judicieux de servir les clients ?
2. En vous servant des Équations (1) et (2), montrez que cet ordre minimise A .
3. Déduisez-en un algorithme pour résoudre ce problème. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

4 Problème (10 points)

Vous partez pour un long voyage. Vous démarrez au kilomètre 0. Sur votre chemin, il y a n hôtels $1, \dots, n$, situés respectivement à $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ kms de votre point de départ. Les seuls endroits où vous avez le droit de vous arrêter sont ces hôtels, mais vous pouvez choisir à quels hôtels vous arrêter, à condition qu'il y ait de la place disponible.

Vous devez cependant vous arrêter à l'hôtel n (celui à a_n kms) qui est votre destination finale.

Idéalement vous parcourez une distance de 200 kms par jour mais il vous sera peut-être nécessaire de varier cette distance en fonction de la disponibilité des hôtels. On convient que si vous parcourez x kms dans une journée, votre *pénalité journalière* est de $(200 - x)^2$.

Vous souhaitez planifier votre voyage pour partir du kilomètre 0 le jour 1 et arriver à l'hôtel du kilomètre a_n au jour F (à déterminer dans la suite), de manière à minimiser la somme totale de vos pénalités journalières.

Soit a_0 le kilométrage 0 où se trouve l'hôtel fictif 0, et on pourra noter $d_{i,j} = a_j - a_i$, la distance en kilomètres de l'hôtel i à l'hôtel j , pour tous $0 \leq i \leq j \leq n$.

La Figure 1 fournit un exemple de voyage à planifier, où l'hôtel 1 n'a pas de place le premier jour, l'hôtel 2 n'a de place le deuxième jour, et les autres hôtels ont toujours de la place libre. On a par exemple, $d_{2,3} = 150$.

1. On rappelle que vous pouvez franchir n'importe quelle distance x en une journée, mais au risque de recevoir une pénalité journalière. Quelle pénalité journalière recevriez-vous en franchissant 200 kms ? 190 kms ? 210 kms ?

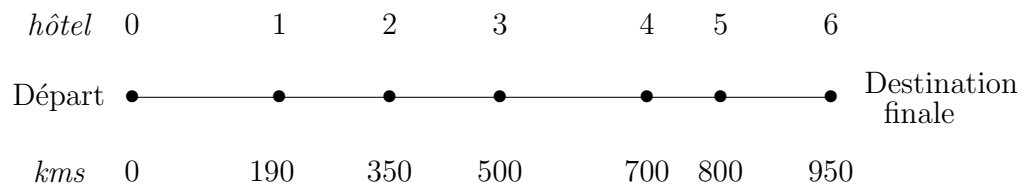


Figure 1: Un exemple pour le Problème 4

2. Sachant que les seuls hôtels où vous pouvez vous arrêter sont ceux aux kilomètres a_1, a_2, \dots, a_n , en combien de jours maximum devez-vous rejoindre l'hôtel n de destination finale au kilomètre a_n ? Notons N cette valeur dans la suite.
3. Définissez précisément une structure de donnée D de type tableau qui exprime si l'hôtel j a des places disponibles le jour J . Illustrez votre solution avec l'exemple de la Figure 1.
4. Pour deux hôtels différents $i < j$, on convient de noter $P(i, I, j, J)$ la valeur (en total de pénalités journalières) de la solution optimale pour atteindre l'hôtel j le jour J en partant de l'hôtel i le jour I . On convient que lorsque l'hôtel j n'a pas de place disponible le jour J , la valeur de $P(i, I, j, J)$ est $+\infty$.
Que représente la valeur $P(i, I, j, I)$? Dans notre exemple de la Figure 1, que valent $P(0, 1, 1, 1)$ et $P(0, 1, 2, 1)$?
5. Proposez une expression générale pour calculer $P(i, I, j, J)$. Pour ce faire, vous devrez aussi considérer la possibilité de passer une nuit dans un des hôtels intermédiaires entre i et j , et choisir la meilleure entre les différentes possibilités qui s'offrent à vous.
Pour l'exemple de la Figure 1, que vaut $P(3, 3, 5, 3)$? On rappelle que l'hôtel 5 a toujours des places disponibles. Expliquez votre réponse.
6. Quelle est l'expression qui caractérise la valeur optimale du problème initial ? En déduire un algorithme qui calcule cette valeur.
Que rend votre algorithme pour le cas de la Figure 1 ?
7. Quelle modification apporter à votre solution pour que la séquence des hôtels "étape" soit également calculée par l'algorithme ?