

Méthodes Algorithmiques

Examen du 20 Juin 2017

Responsable : Sophie Pinchinat

Documents autorisés

*Si les algorithmes ne sont pas **impeccablement** écrits, ils risquent de ne pas être corrigés.*

Exercice 0 Quiz

Vous devez répondre sur la feuille de quiz en annexe de ce sujet, où il vous faut indiquer votre numéro d'**anonymat**. Pensez à joindre cette annexe à votre copie.

Exercice 1 Le voyageur dans le désert

Un voyageur veut aller d'une oasis à une autre sans mourir de soif. Le long de la route il y a n puits, numérotés dans l'ordre du parcours (le puits 1 est celui de l'oasis de départ, et le puits n celui de l'oasis d'arrivée). Le voyageur connaît à l'avance la position des puits sur la route et sait qu'il consomme exactement 1 litre d'eau par kilomètre. Il est muni d'une gourde (d'un volume suffisant pour toujours pouvoir atteindre le puits le plus proche) qui est pleine à son départ. Lorsqu'il atteint un puits, il peut choisir de remplir sa gourde ; il doit alors en vider le contenu dans le sable et la remplir entièrement au puits. On convient qu'à l'arrivée, il doit vider ce qui reste dans sa gourde.

- 1) Sachant que le voyageur veut faire le moins d'arrêts possible, comment doit-il choisir les puits où s'arrêter ? *Indication* : Décrivez en langue naturelle, mais néanmoins très clairement, une stratégie gloutonne pour résoudre ce problème.
- 2) Montrez que votre stratégie gloutonne est optimale. *Indications* : inspirez-vous d'une preuve que nous avons développée en TD.
- 3) À chaque puits, y compris celui de l'oasis d'arrivée, un gardien fait payer au voyageur autant d'unités de la monnaie locale que le carré du nombre de litres d'eau qu'il verse dans le sable au puits courant. Le voyageur a alors l'objectif de rejoindre l'oasis d'arrivée en minimisant la somme qu'il aura payée sur son trajet. Montrez sur un exemple **le plus épuré possible** que la stratégie gloutonne de la Question 1 précédente n'est plus optimale.
- 4) Pour l'objectif de la Question 3 (c-à-d., payer le moins possible), définissez une stratégie d'arrêts aux puits basée sur la programmation dynamique qui utilise les valeurs suivantes.
 - $P(i)$, la somme minimale payée entre le puits numéro 1 et le puits numéro i , en tenant compte du fait que le voyageur vide sa gourde au puits numéro i ;
 - $d(i, j)$, le nombre de kilomètres entre le puits numéro i et le puits numéro j ;
 - V , le volume de la gourde.

5) (Application) Appliquez l'algorithme de la Question 4 à l'instance suivante du problème : une gourde de volume $V = 10$ litres et huit puits situés respectivement à 0, 8, 9, 16, 18, 24, 27, 32 km de l'oasis de départ. Vous ferez clairement apparaître les valeurs de $P(i)$ pour chaque i et la façon dont vous le calculez.

Exercice 2

On considère un tableau B à deux dimensions à valeurs entières positives telles que les valeurs d'une même ligne et celles d'une même colonne sont ordonnées par valeurs croissantes. Un tel tableau est appelé *bâtière*. Le tableau ci-dessous est une bâtière à 4 lignes et 5 colonnes.

2	14	25	30	69
3	15	28	30	81
7	15	32	43	100
20	28	36	58	101

On se propose de chercher une valeur v dans une bâtière $B[1..n, 1..n]$. Pour simplifier le problème on supposera dans cet exercice que la dimension de la bâtière n est une puissance de 2, c-à-d. $n = 2^k$ ($k \geq 1$).

- 1) On distingue la valeur $x = B[\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$. En supposant que $v > x$, expliquez quelle partie (à préciser) de la bâtière peut être éliminée pour poursuivre la recherche de v .
- 2) Déduisez une solution algorithmique (en pseudocode¹) de type "diviser pour régner" en réduction logarithmique. Faites bien apparaître l'algorithme principal. *Indications* : on pourra désigner par le triplet (i, j, m) le sous-tableau $B[i + m - 1, j + m - 1]$, c'est à dire le sous-tableau carré de dimension m dont la case Nord-Ouest est de coordonnées (i, j) .
- 3) Quelle est l'équation qui décrit la complexité de l'algorithme de la Question 2 ? Établissez l'ordre de complexité au pire de votre algorithme (en terme du nombre de comparaisons de valeurs).
- 4) Comment adapteriez-vous votre solution au cas d'une bâtière quelconque ?

¹Préférez un code clair à un code optimisé.