L3 Informatique **année 2011-2012**

Méthodes Algorithmiques

Examen du 20 Juin 2012

Responsable : Sophie Pinchinat

Les documents sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

1 Exercice (4 points)

Prouver la correction et la terminaison de la recherche dichotomique :

FONCTION CHERCHEDICO(t : tableau $[1..n]$ de réels trié, n : entier, c : réel) : *entier*

```
i ← 1
j ← n
while i < j
    do m ← (i + j)  div  2
        if c ≤ t[m]
          then j ← m
          else  i ← m + 1
return i
```

2 Exercice (6 points)

Un serveur dans un restaurant a n clients attendant d'être servis. Chaque client a un numéro i compris entre 1 et n, et le temps requis pour servir chaque client est connu à l'avance : le client i requiert un temps de service t_i. Par exemple, si on décide de servir les clients dans l'ordre de leur numéro, le temps d'attente A_i du client i (qui doit attendre que tous les clients précédents soient servis), vérifie les Équations (1) et (2) suivantes :

$$A_i = \Sigma_{j=1}^{i} t_j \tag{1}$$

$$A_i = A_{i-1} + t_i \tag{2}$$

On cherche à minimiser le temps d'attente global $A = \Sigma_{i=1}^{n} A_i$.

1. Dans quel ordre vous paraît-il judicieux de servir les clients ?

2. En vous servant des Équations (1) et (2), montrez que cet ordre minimise A.

3. Déduisez-en un algorithme pour résoudre ce problème. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

3 Problème (10 points)

Vous partez pour un long voyage. Vous démarrez au kilomètre 0. Sur votre chemin, il y a n hôtels $1, \ldots, n$, situés respectivement à $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ kms de votre point de départ. Les seuls endroits où vous avez le droit de vous arrêter sont ces hôtels, pendant une nuit seulement et sans revenir en arrière. Vous pouvez toutefois choisir à quels hôtels vous arrêter, à condition qu'il y ait de la place disponible. Il vous faut cependant vous arrêter à l'hôtel n (celui à a_n kms) qui représente votre destination finale.

Idéalement vous parcourez une distance de 200 kms par jour mais il vous sera peut-être nécessaire de varier cette distance en fonction de la disponibilité des hôtels. On convient que si vous parcourez x kms dans une journée, votre *pénalité journalière* est de $(200 - x)^2$.
Vous souhaitez planifier votre voyage pour partir du kilomètre 0 le jour 1 et arriver à l'hôtel du kilomètre a_n au jour F (à déterminer dans la suite), de manière à minimiser la somme totale de vos pénalités journalières.

Soit a_0 le kilométrage 0 où se trouve l'hôtel fictif 0, et on pourra noter $d_{i,j} = a_j - a_i$, la distance en kilomètres de l'hôtel i à l'hôtel j, pour tous $0 \leq i \leq j \leq n$.

La Figure 1 fournit un exemple de voyage à planifer, où l'hôtel 1 n'a pas de place le premier jour, l'hôtel 2 n'a de place le deuxième jour, et les autres hôtels ont toujours de la place libre. On a par exemple, $d_{2,3} = 150$.

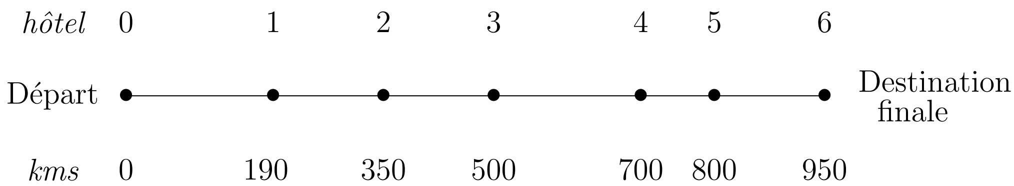

Figure 1: Un exemple pour le Problème 3

1. On rappelle que vous pouvez franchir n'importe quelle distance x en une journée, mais au risque de recevoir une pénalité journalière. Quelle pénalité journalière recevriez-vous en franchissant 200 kms ? 190 kms ? 210 kms ?

2. Sachant que les seuls hôtels où vous pouvez vous arrêter sont ceux aux kilomètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en combien de jours maximum devez-vous rejoindre l'hôtel n de destination finale au kilomètre a_n ? Notons N cette valeur dans la suite.

3. Définissez précisément une structure de donnée D de type tableau qui exprime si l'hôtel j a des places disponibles le jour J. Illustrez votre solution avec l'exemple de la Figure 1.

4. Pour deux hôtels différents $i < j$, on convient de noter $P(i, I, j, J)$ la valeur (en total de pénalités journalières) de la solution optimale pour atteindre l'hôtel j le jour J en partant de l'hôtel i le jour I. On convient que lorsque l'hôtel j n'a pas de place disponible le jour J, la valeur de $P(i, I, j, J)$ est $+\infty$.

   Que représente la valeur $P(i, I, j, I)$? Dans notre exemple de la Figure 1, que valent $P(0, 1, 1, 1)$ et $P(0, 1, 2, 1)$?

5. Proposez une expression générale pour calculer $P(i, I, j, J)$. Pour ce faire, vous devrez aussi considérer la possibilité de passer une nuit dans un des hôtels intermédiaires entre i et j, et choisir la meilleure entre les différentes possibilités qui s'offrent à vous.

   Pour l'exemple de la Figure 1, que vaut $P(3, 3, 5, 4)$? On rappelle que l'hôtel 5 a toujours des places disponibles. Expliquez votre réponse.

6. Quelle est l'expression qui caractérise la valeur optimale du problème initial ? En déduire un algorithme qui calcule cette valeur.

   Que rend votre algorithme pour le cas de la Figure 1 ?

7. Quelle modification apporter à votre solution pour que la séquence des hôtels "étape" soit également calculée par l'algorithme ?