

Méthodes Algorithmiques

Examen du 14 Juin 2016
 Responsable : Sophie Pinchinat

Documents non autorisés

Si les algorithmes ne sont pas **impeccablement** écrits, ils risquent de ne pas être corrigés.

Exercice 1

Une société de réseautage (*networking company*) utilise une technique de compression pour coder les messages avant de les transmettre à travers le réseau. Supposons que le message à transmettre contient les caractères suivants avec leur fréquence :

Caractère	a	b	c	d	e	f
Fréquence	50	90	120	130	340	450

Si la technique de compression utilisée est le codage de Huffman, expliquer en détail combien de bits¹ seront économisés dans le message envoyé.

Exercice 2

Étant donnés deux nombres entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on désire calculer le cardinal $\sigma_{n,k}$ de l'ensemble $\Sigma_{n,k}$ de séquences :

- (i) composées de n nombres, chacun compris entre 1 et k ;
- (ii) triées par valeurs croissantes.

A priori, de telles séquences peuvent comporter plusieurs fois le même entier.

Exemple 1. $\Sigma_{2,3} = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ et $\sigma_{2,3} = |\Sigma_{2,3}| = 6$.

1. Décrivez les ensembles $\Sigma_{n,1}$ et $\Sigma_{1,k}$, et déduisez les valeurs de $\sigma_{n,1}$ et $\sigma_{1,k}$.
2. Écrivez, en l'expliquant, la formule de récurrence qui caractérise $\Sigma_{n,k}$.
3. À l'aide de ces formules, déterminez les équations qui caractérisent les valeurs $\sigma_{n,k}$.
4. Expliquez comment concevoir un algorithme de type Programmation Dynamique pour calculer $\sigma_{n,k}$. Selon vous, quelle est sa complexité ?

¹on suppose que chaque caractère est originellement codé sur un octet, soit 8 bits.

Exercice 3 On suppose donné un tableau $T[1..n]$ trié de n entiers distincts. Décrire un algorithme de complexité $O(\log n)$ en temps (à justifier) qui retourne un indice i tel que $T[i] = i$ s'il existe. Par exemple, pour le tableau $[-10, -3, 3, 5, 7]$, $T[3] = 3$, en revanche pour le tableau $[2, 3, 4, 5, 6, 7]$, il n'y a pas de tel i .

Exercice 4 On considère l'algorithme suivant appliqué à un tableau d'éléments (par exemple des entiers) indexé de 0 à $n - 1$.

Algorithm 1 *Truc*($a[0..n - 1]$)

Require: i un entier, $b[0..n - 1]$ un tableau d'éléments

```
1:  $i \leftarrow 0$ 
2: while  $i < n$  do
3:    $b[i] \leftarrow a[n - i - 1]$ 
4:    $i \leftarrow i + 1$ 
5: end while
6: return  $b$ 
```

1. Décrivez informellement ce que fait cet algorithme.
2. Proposez un invariant de boucle utile pour prouver votre affirmation et prouvez-le.
3. Utilisez cet invariant de boucle pour justifier votre affirmation.