

## Logique DEFI TD 2

### Exercice 1

Un modèle de  $\varphi$  est une valuation  $\nu$  telle que  $\nu(\varphi) = \text{vrai}$ , noté  $\nu \models \varphi$ .

On désignera par  $\text{mod}(\varphi) \subseteq \text{Val}$  l'ensemble des modèles de  $\varphi$ .

1. Soit  $\text{Prop} = \{p, q, r\}$ . Quel est l'ensemble  $\text{mod}((p \vee q) \wedge (p \vee \neg r))$ , c-à-d. des valuations qui satisfont  $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$  ? Quelle est la taille de cet ensemble ?
2. Que vaut  $\text{mod}((p \vee q) \wedge (p \vee \neg r))$  si on prend  $\text{Prop} = \{p, q, r, s\}$  ? Quelle est la taille de cet ensemble ?

### Exercice 2

1. Proposer une formule valide et une formule non valide.
2. Exprimer la propriété " $\models \varphi$ " en terme de  $\text{mod}(\varphi)$ .

### Exercice 3

Démontrez les propriétés suivantes :

1.  $\text{mod}(\varphi \vee \psi) = \text{mod}(\varphi) \cup \text{mod}(\psi)$  ;
2.  $\text{mod}(\varphi \wedge \psi) = \text{mod}(\varphi) \cap \text{mod}(\psi)$  ;
3.  $\text{mod}(\neg \varphi) = \text{Val} \setminus \text{mod}(\varphi)$  ;
4.  $\text{mod}(\varphi \rightarrow \psi) = (\text{Val} \setminus \text{mod}(\varphi)) \cup \text{mod}(\psi)$  ;
5.  $\models \varphi \rightarrow \psi$  ssi  $\text{mod}(\varphi) \subseteq \text{mod}(\psi)$ .

### Exercice 4 (Propriété de congruence de l'équivalence de formule)

Les formules  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont équivalentes, noté  $\varphi \equiv \varphi'$ , lorsqu'elles ont les mêmes modèles :  $\text{mod}(\varphi) = \text{mod}(\varphi')$ .

Montrer que si  $\psi$  est une sous-formule de  $\varphi$  et que  $\psi \equiv \psi'$  alors  $\varphi \equiv \varphi'$  où la formule  $\varphi'$  est obtenue en remplaçant chaque occurrence de  $\psi$  dans  $\varphi$  par  $\psi'$ .

### Exercice 5

Une publicité pour un magazine de tennis annonce : "Si je ne joue pas au tennis, je regarde du tennis à la télé. Et si je ne regarde pas de tennis à la télé, je lis des articles sur le tennis." On peut supposer que l'orateur ne peut avoir qu'une activité à la fois. Que fait-il ?

### Exercice 6

Inventez un exercice en logique propositionnelle, modélisation ou démonstration.