L3/Info-MIAGE **2015-2016**

Algorithmique des graphes

17 décembre 2015

Notes du cours et TD autorisées   Aucun document extérieur n'est autorisé   Calculatrices autorisées

---

Concepteurs : R. Andonov, Y. Mocquard

Préambule aux exercices 1 et 2

Dans cette version du jeu "Donjons et Dragons" notre personnage, le Héro, peut aller dans des chambres de transformations où, à chaque tour, il a la possibilité de changer d'identité. Il y a 4 identités possibles : le Héro(H), le Druide(D), le Magicien(M) et le Voleur(V).

Exercice 1. Dans cet exercice le Héro est dans une chambre des transformations où tous les changements coûtent des points de vie, voici la matrice du coût des transformations :

	H	D	M	V
H	0	2	6	4
D	2	0	4	1
M	2	3	0	4
V	4	1	2	0

Par exemple, passer, en un tour, de Druide à Magicien, fait perdre quatre points de vie (ligne D, colonne M).

Dans cette chambre, notre Héro veut se transformer en Magicien en perdant le moins de points de vie possible.

1. Dessiner le graphe correspondant à ce problème.
2. Exprimer le problème en terme de graphe.
3. Quels algorithmes vus en cours peuvent résoudre ce problème ? Justifier.
4. Résoudre le problème en utilisant l'algorithme de votre choix en détaillant le calcul à chaque itération et en donnant à la fin la liste des transformations.

Exercice 2. Dans cet exercice notre personnage est dans une autre chambre où chaque changement lui fait gagner(+) ou perdre(-) des points de vie selon ce tableau :

	H	D	M	V
H	0	-1	+1	-2
D	+1	0	+1	+2
M	-2	-5	0	-3
V	-2	-3	+3	0

Par exemple, passer, en un tour, de Druide à Magicien, lui fait gagner un point de vie (ligne D, colonne M).

Notre Héro rentre dans la chambre des transformations, il veut en sortir en étant toujours un Héro, mais avec 2 points de vie en plus et ceci en un minimum de tours (un tour correspond à une transformation).

1. Dessiner le graphe correspondant à ce problème.
2. Exprimer le problème en terme de graphe.
3. Quelle(s) adaptation(s) à un algorithme vu en cours faut-il faire pour résoudre le problème ? Justifier votre choix.
4. En combien d'itérations au maximum, de cet algorithme, peut-on résoudre le problème ?
5. Résoudre le problème en utilisant cet algorithme (donner toutes les valeurs à chaque étape de l'algorithme, puis, à la fin, donner la liste des transformations).
6. Dans cette dernière question c'est 100 points de vie qu'il veut gagner, combien de transformations sont nécessaires au minimum ?

Exercice 3. Recherche de flot maximum et le problème des cases admissibles
Soit le tableau $T^{m \times n}$ dont certaines cases sont dites "admissibles (les autres sont "non admissibles"). On se donne également $m+n$ entiers positifs ou nuls $l_1, \ldots, l_m, c_1 \ldots, c_n$. Il s'agit d'affecter des nombres entiers aux cases admissibles (et à celles-ci seulement) de telle sorte que

a) la somme des nombres affectés aux cases d'une ligne i soit inférieure ou égale à l_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
b) la somme des nombres affectés aux cases d'une colonne j soit inférieure ou égale à c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
c) la somme des nombres affectés aux cases du tableau soit maximum.

1. Décrire le problème en programmation linéaire.
2. Formuler ce problème comme un problème de flot maximum en dessinant le graphe approprié pour les données suivantes : $m = 3, n = 3, l_1 = 8, l_2 = 3, l_3 = 10, c_1 = 5, c_2 = 10, c_3 = 6$. Cases interdites : [1,1], [2,3], [3,2]
3. Quelle est la valeur du flot associée à l'affectation suivante : 7 dans la case [1,2] (le premier indice correspond à la ligne, le deuxième correspond à la colonne) ; 1 dans la case [1,3] ; 2 dans la case [2,1] ; 1 dans la case [2,2] ; 3 dans la case [3,1] ; 5 dans la case [3,3] ?
4. Il s'agit dans cette question d'appliquer les techniques spécifiques de l'algorithme de Ford_Fulkerson pour vérifier si cette valeur est optimale. Pour ce faire, vous allez d'abord chercher un chemin améliorant qui peut être associé à cette affectation. Afficher ce chemin. Trouver le flot maximal en partant du flot donné.
5. Dans cette question on supposera $n = m$ et on s'intéressera aussi à la somme des nombres affectés aux cases des diagonales **Nord-Ouest-Sud-Est** (du haut à gauche vers le bas à droite). Au programme linéaire précédent ajouter la contrainte que la somme des nombres affectés aux cases de la grande diagonale centrale Nord-Ouest-Sud-Est doit être inférieure ou égale à une constante d_0.
6. En plus, l'affectation de la valeur x_{ij} dans la case (i, j) apporte un profit $p_{ij} \times x_{ij}$. Formuler la fonction objectif du nouveau programme linéaire décrivant le problème de l'affectation de profit maximal.

Exercice 4. Recherche de composantes fortement connexes
La réponse de cet exercice sera donnée sur cette feuille. Indiquez votre numéro d'anonymat en haut à gauche.

Il s'agit de trouver les composantes fortement connexes du graphe de la FIGURE 1.

1. Utiliser les FIGURES 1 et 2 pour trouver les composantes fortement connexes. Les valeurs *pre* et *post* (ou *in* et *out*) devront être clairement indiquées.
2. Dessiner le graphe réduit qui en découle dans l'espace de la FIGURE 3 au verso de cette feuille.
3. Combien d'arcs au minimum doit-on ajouter pour que le graphe d'origine soit fortement connexe ? Dessinez ces arcs en pointillés ou d'une autre couleur, sur le graphe réduit et sur le graphe d'origine.

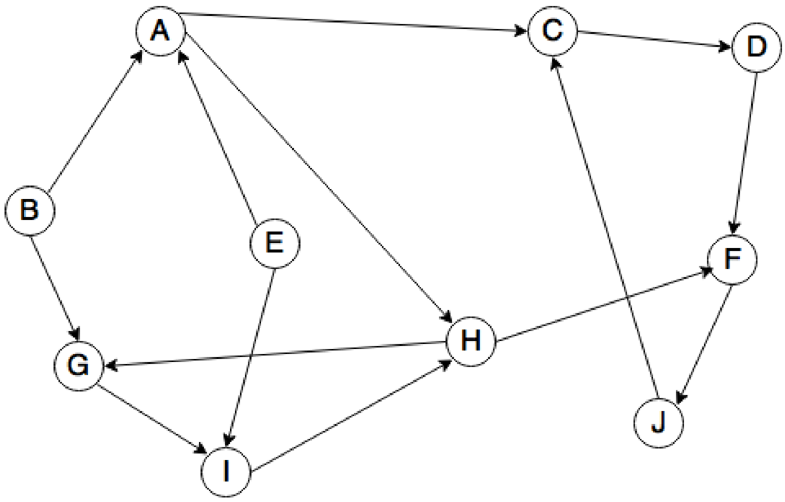

FIGURE 1 – Graphe d'origine

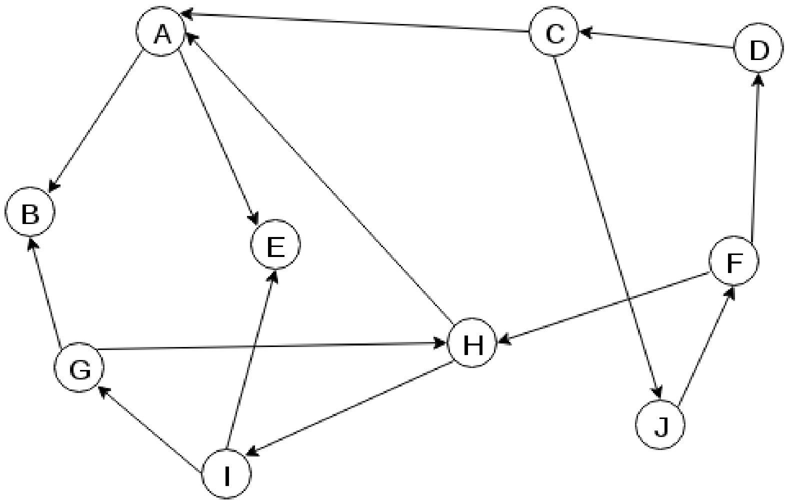

FIGURE 2 – Graphe inverse

FIGURE 3 – Graphe réduit