

Algorithmique des graphes

18 décembre 2014

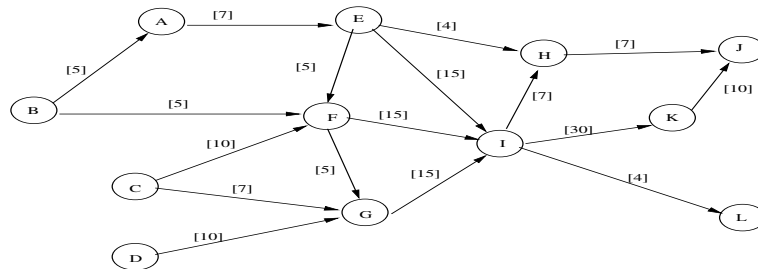
Notes du cours et TD autorisées Aucun document extérieur n'est autorisé Calculatrices autorisées

Afin d'accélérer la correction, veuillez séparer vos copies pour les trois exercices du sujet

Concepteurs : R. Andonov, A. Mucherino, R. Ludinard

Exercice 1 : Adduction d'eau

Trois villes J, K, L sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement, ...). Les réserves journalières disponibles sont de 10 milliers de m^3 pour A, de 15 pour B, de 20 pour C et de 13 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe ci-dessous (les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3 par jour) :



Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 13 milliers de m^3 , pour la ville K : 17 et 10 pour la ville L.

- Il s'agit de déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante. Pour ce faire, on ajoute les sommets artificiels S et T . S est connecté avec les réserves, tandis que T est connecté avec les trois villes. Remplissez d'abord les capacités manquantes et trouvez le flot maximum. Pour vous épargner du temps nous vous proposons de donner votre solution directement sur ce graphe. Le graphe d'écart associé sera présenté sur la figure 2. Vous barrerez les arcs inutiles et vous indiquerez les capacités résiduelles sur les arcs restant. La coupe de capacité minimale sera clairement indiquée.
- La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A,E) et (I,L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations.
Suggestion : Pour déterminer les capacités à prévoir pour l'arc (i, j) , il faut évaluer le volume du flux entrant en i ; le volume du flux sortant de j , et prendre le minimum entre ces deux volumes.
- Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations. Quelle est d'après vous l'unique canalisation à refaire ? Justifiez votre choix.
- Quelle sera alors le valeur du flot optimal ? Vous donnerez votre solution sur le graphe de la figure 3. Pour le graphe d'écart vous utiliserez le graphe 4. Pour la canalisation en réfection de votre choix vous utiliserez la capacité prévue dans la question 2. Pour l'autre canalisation, vous utiliserez la capacité d'origine.
- L'analyse précédent vous permet de constater que votre prévision de capacité pour la seule canalisation à refaire a été surestimée. Quelle est la capacité minimale qui permet de ne pas réduire le flot maximal obtenu dans la question précédente ?

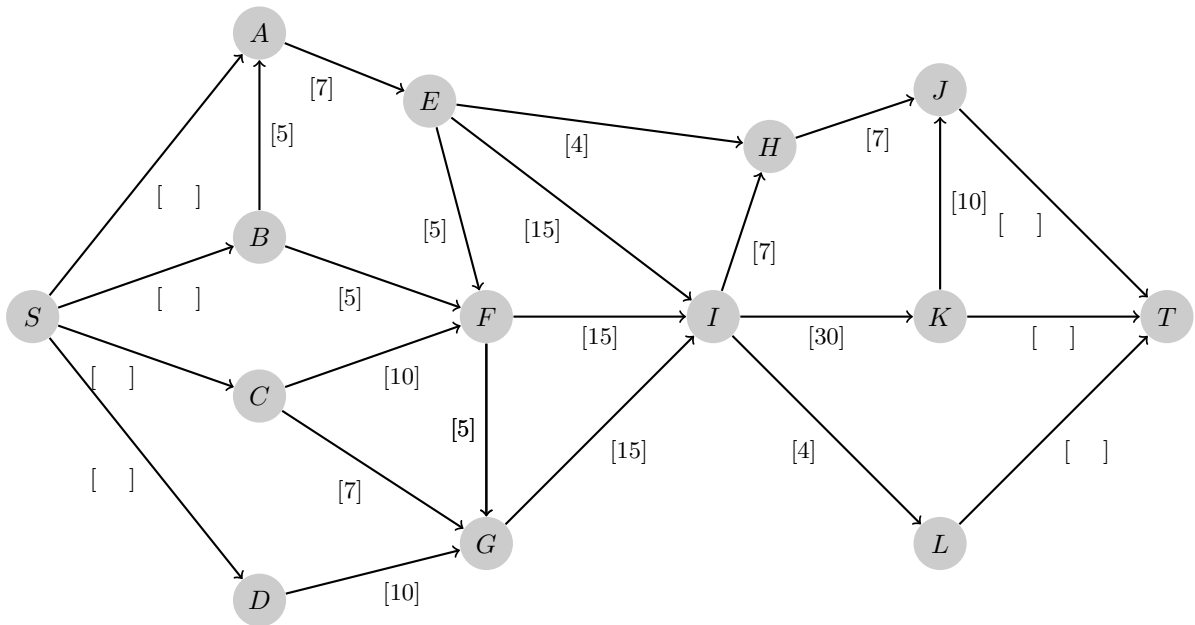


FIGURE 1 – Le réseau d'alimentation d'eau des villes J, K, L. Votre tâche est de compléter les capacités manquantes et de trouver le flot maximal. Indiquez clairement la coupe minimale.

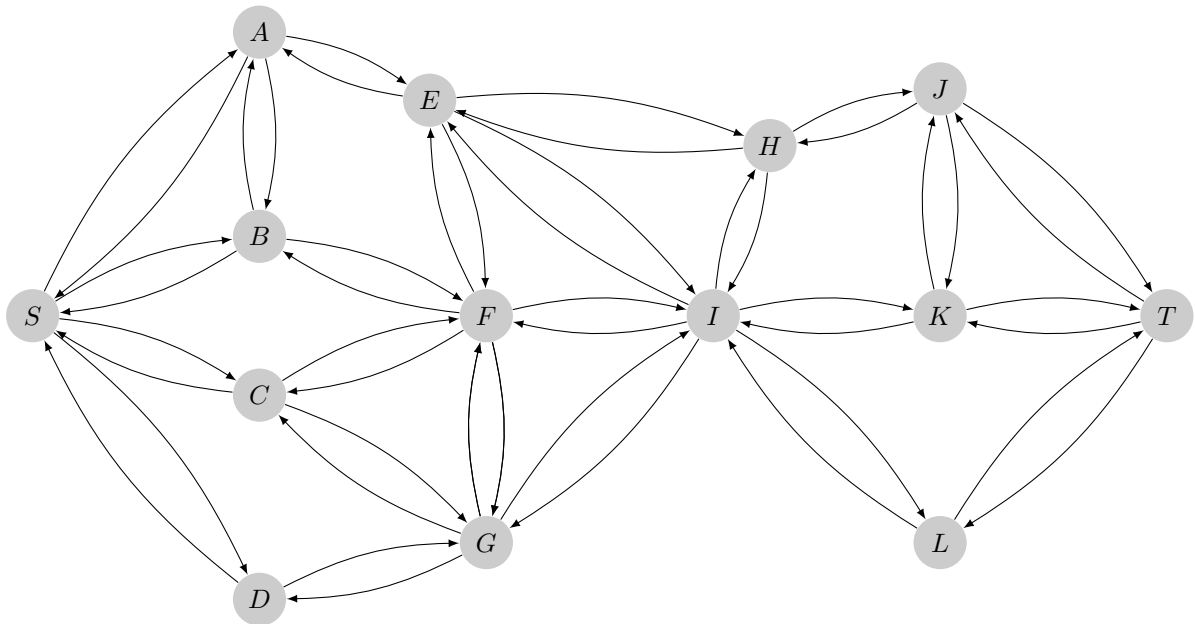


FIGURE 2 – Ceci est le graphe d'écart du graphe de la figure 1. Barrez les arcs inutiles et indiquez les capacités résiduelles sur les autres arcs, ainsi que les sommets joignables à partir de S.

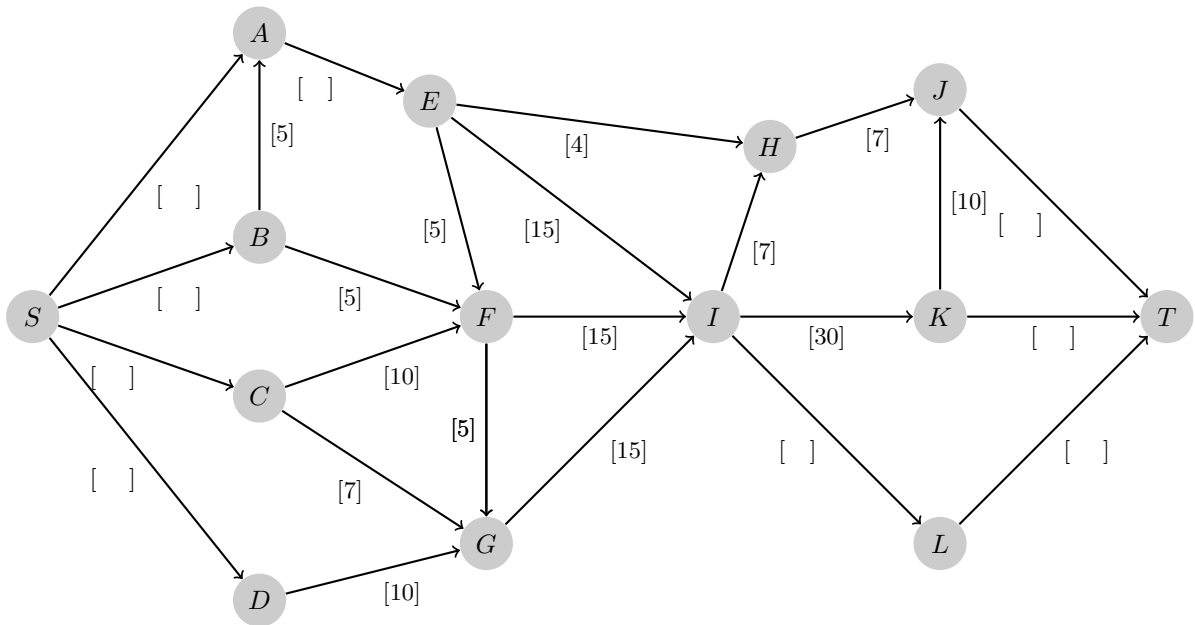


FIGURE 3 – Le réseau d'alimentation d'eau des villes J, K, L. Votre tâche est de compléter les capacités manquantes et de trouver le flot maximal. Indiquez clairement la coupe minimale.

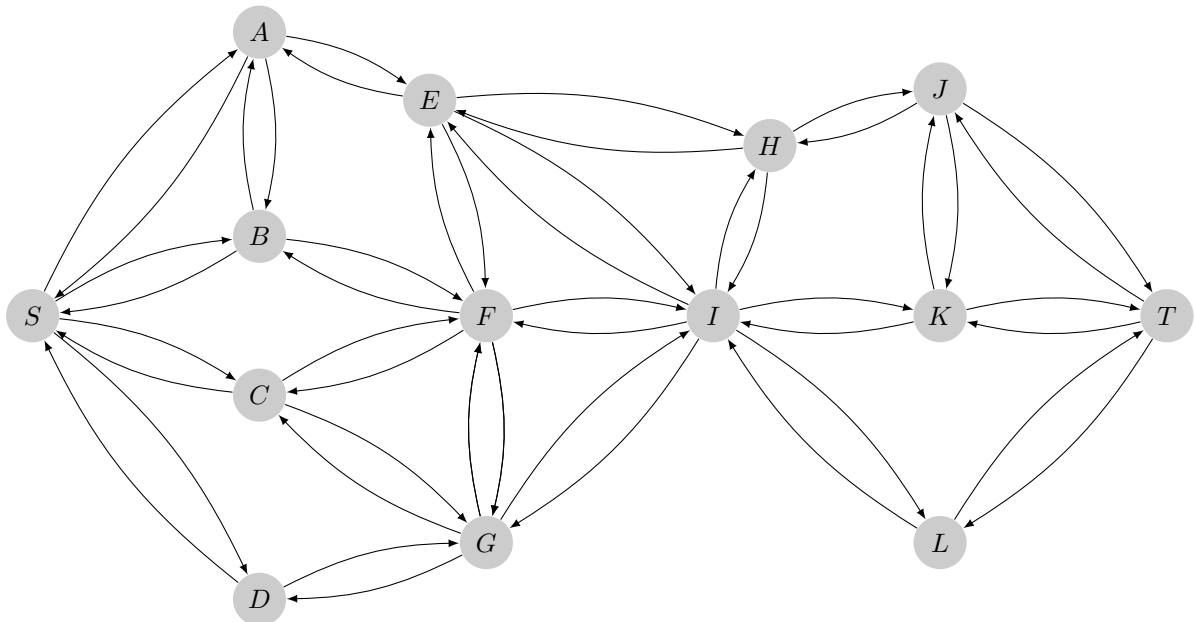


FIGURE 4 – Ceci est le graphe d'écart du graphe de la figure 3. Barrez les arcs inutiles et indiquez les capacités résiduelles sur les autres arcs, ainsi que les sommets joignables à partir de S.

Exercice 2 :

Un groupe d'étudiants de Rennes décide de partir en vacances aux États-Unis et de traverser l'Amérique en faisant le *coast-to-coast* habituel. Ils arrivent en avion à Miami, ils louent une voiture et se mettent en route pour Los Angeles. À leur arrivée à Los Angeles, ils rencontrent deux autres groupes d'étudiants français qui viennent de faire le même voyage. Un de ces deux groupes voyageait sans navigateur GPS, et par conséquent il s'était perdu une fois dans la banlieue de Dallas et avait été obligé de faire marche arrière vers Tampa. Étant donc plus sage de faire le retour à Miami tous ensemble, les trois groupes d'étudiants commencent à se questionner sur la route optimale pour rejoindre Miami. Ils utilisent leur trois expériences de voyage pour définir un graphe contenant toutes les étapes de leur trois voyages :

<i>Groupe</i>	<i>de</i>	<i>à</i>	miles
1	Miami	Orlando	232
2+3	Miami	Tampa	243
1	Orlando	Gainesville	110
2+3	Tampa	Gainesville	128
1	Gainesville	New Orleans	536
2	Gainesville	Dallas	976
3	Gainesville	Austin	1017
1	New Orleans	Phoenix	1520
2	Dallas	Tampa	1100
2	Dallas	Phoenix	1064
3	Austin	Phoenix	1006
1+2+3	Phoenix	Los Angeles	372

Un étudiant du groupe 1 est de l'opinion que, pour identifier le chemin optimal, il faut simplement inverser les arcs du graphe et appliquer la programmation dynamique pour trouver le plus court chemin. Mais un étudiant du groupe 2 lui fait remarquer qu'il y a un cycle dans le graphe, à cause de leur marche arrière vers Tampa. Cependant, personne n'avait bien étudié le cours d'Algorithmique de graphes, et ils ne se rappelaient que de la programmation dynamique. Un étudiant du groupe 3 suggère alors de couper un arc du graphe pour le transformer en un DAG.

- Quel est l'arc qu'il faut éliminer pour que le graphe devienne un DAG ?
- Quel est l'intérêt de transformer le graphe en un DAG ? Pour un graphe donné, $G(V, E)$, donnez la complexité du problème dans le cas d'un graphe DAG et comparez la avec la complexité dans le cas d'un graphe qui n'est pas DAG.
- Quel est le chemin optimal de Los Angeles à Miami sur le graphe obtenu ?
- Montrer l'application du principe de Bellman graphiquement sur un dessin du graphe.

Exercice 3 : Ordonnancement

L'entreprise X doit développer une application pour la société Y . Cette application nécessite de communiquer avec une application existante installée dans la société Y . Le chef de projet de l'entreprise X en charge de ce développement identifie dans le tableau 1 un ensemble de tâches pour son équipe.

Numéro	Tâche	Durée	Antériorité
A	Spécifications	5 jours	
B	Conception	2 jours	Au plus tôt 2 jours après le début de A, et I achevée
C	Implémentation	15 jours	B achevée
D	Test unitaires	12 jours	B achevée
E	Rédaction plan de tests	2 jours	A achevée
F	Tests fonctionnels	4 jours	C,D,E achevés
G	Tests systèmes	5 jours	E,F,H achevés
H	Installation env iso-prod	1 jour	B, I achevés
I	Contrat interface	2 jours	Au plus tôt 1 jour après le début de A
J	Recette	10 jours	G achevée, Et au plus tard 30 jours après le début de A
K	Documentation installation	2 jours	H,I achevés
L	Mise en production	1 jour	J, K achevés

TABLE 1 – Tâches du projet

1. Donner le graphe en représentation potentiel-tâche.
2. Quel algorithme utiliser pour calculer les délais au plus tôt et au plus tard de chaque tâche ? Justifier et donner la complexité de celui-ci.
3. Donner les ordonnancements au plus tôt, au plus tard pour la durée minimum des travaux.
4. Indiquez les tâches critiques.
5. Au bout de 6 jours le responsable de l'équipe de tests unitaires se rend compte qu'ils ne tiendront pas les délais, quelle marge a-t-il pour que ça n'impacte pas le durée totale du projet ?