Université de Rennes 1
ESIR 2 - TSI
Olivier Le Meur (olemeur@irisa.fr)

Transformée de Fourier 1D/2D et échantillonnage

Exercice 1: Transformée de Fourier 1D

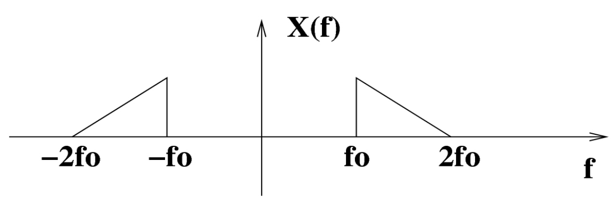
On étudie le signal suivant:

$$x(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) & 0 \leq |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Dessiner x(t).
2. Calculer la TF de x(t), notée $X(w)$. Différentes méthodes peuvent être utilisées:
   - Calcul direct;
   - Calcul utilisant la propriété de différentiation ($\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] = jwX(w)$) ou la propriété ($\mathcal{F}\left[x(t) * x(t)\right] = X^2(w)$).
3. En déduire et dessiner le spectre d'amplitude $|X(w)|$ et le spectre de phase $\arg X(w)$.

Exercice 2: TF 1D et échantillonnage

Un signal 1D continu $x(t)$ a pour transformée de Fourier continue la fonction $X(f)$ représentée sur la figure.



1. On échantillonne $x(t)$ à la fréquence minimale f_e qui respecte le théorème de l'échantillonnage (fréquence de Shannon). Quelle est cette fréquence ?
2. On obtient le signal échantillonné $\tilde{x}_n = x(n\ T_e)$ où $T_e = 1/f_e$ est le pas d'échatilonnage. Représenter graphiquement $\tilde{X}_1(f)$, transformée de Fourier de $\tilde{x}(t)$.
3. Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $\tilde{X}_1(f)$?
4. Tracer $\tilde{X}_2(f)$ obtenue en échantillonnant $x(t)$ à la fréquence $f_e = 2f_o$.
   Cette fréquence vérifie-t-elle le théorème de Shannon ?
5. Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $\tilde{X}_2(f)$?

Exercice 3: TFD 2D

Soit $f(k,l)$ une image de taille $N \times N$ et $F(u,v)$ sa TFD d'ordre N.
On rappelle la définition de la TFD et de la TFD inverse en 2D:

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} f(k,l)e^{-j2\Pi(\frac{uk+vl}{N})} \tag{1}$$

$$f(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\Pi(\frac{uk+vl}{N})} \tag{2}$$

ou alors

$$F = A_N f A_N \qquad \text{avec} \quad A_N(k,n) = \frac{1}{\sqrt{N}}W^{kn} \qquad \text{et} \quad W = e^{-j\frac{2\Pi}{N}} \tag{3}$$

1. Donner la matrice A_2 associée à la TFD d'ordre 2.
2. Cette transformation est-elle unitaire ?
3. Calculer la TFD de l'image $im = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline\end{array}$

   - avec la définition (1)
   - avec la définition (3)

   Donner une interprétation de chacun des coefficients obtenus.
   Est-ce que la moyenne et l'énergie sont conservées ?

4. Calculer et dessiner les 4 images de base de la TFD 2D d'ordre 2.
   On rappelle que les images de base de la TFD sont :

$$B_{(u,v)}(k,l) = \frac{1}{N}e^{j2\Pi(\frac{uk+vl}{N})} \tag{4}$$

5. Vérifier que im est bien la somme pondérée des 4 images de base avec comme facteurs de pondération les coefficients correspondants de sa TFD.

Exercice 4: Application de la TFD 2D

Dans cet exercice, on va voir un exemple d'utilisation de la TFD pour la compression d'images avec pertes. (*rem : on pourrait utiliser d'autres transformations unitaires discrètes pour la même application.*)
On considère l'image originale suivante (sur 256 niveaux de gris) :

$im =$

0	50	100	100
0	50	100	200
50	50	50	200
100	100	200	200

1. Calculer l'image IM, transformée de im par la TFD-2D d'ordre 2, c'est-à-dire en appliquant cette transformation à chaque sous-bloc de taille 2×2 de im.

2. On réalise un schéma de codage par zones tel que :

   - le coefficient de fréquence nulle est quantifié uniformément sur 2 bits.
   - le coefficient de fréquence la plus élevée n'est pas codé.
   - les autres coefficients transformés sont codés sur 3 bits.

   Donner les caractéristiques (seuils de décisions, niveaux de quantification) des lois de quantification pour chaque coefficient.
   attention : ces caractéristiques doivent être valides pour toute image im dont les niveaux de gris varient entre 0 et 255.

3. Calculer l'image IMQ, obtenue par quantification de IM.

4. L'image IMQ est codée sans pertes et transmise. Quelles sont les opérations à effectuer pour décoder l'image reçue IMQ et retrouver une approximation de l'image originale im? Donner le shéma du codeur-décodeur ainsi réalisé.

5. Calculer l'image décodée $\tilde{im}$.

6. Calculer pour cet exemple:

   - le taux de compression obtenu
   - l'image d'erreur
   - l'erreur quadratique moyenne