TD5 - Circuits booléens

François Schwarzentruber

26 novembre 2019

Classe $P/poly$

Exercice 1 *Montrer que P est dénombrable. Montrer que $P/poly$ n'est pas dénombrable.*

Exercice 2 *Montrer qu'un langage est dans $P/poly$ ssi il existe une machine de Turing M déterministe, un polynôme $T(n)$, un polynôme $a(n)$ et une suite de mots $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha_n \in \Sigma^{a(n)}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout mot $w \in \Sigma^n$,*

$$M \text{ accepte } w\#\alpha_n \quad ssi \quad w \in L$$

et pour tout $w \in \Sigma^n$, la machine M sur l'entrée $w\#\alpha_n$ s'exécute en au plus $T(n)$ étapes.

Exercice 3 *Donner un langage décidable dans $P/poly$ qui n'est pas dans P.*

Théorème de Karp-Lipton

Exercice 4 *Montrer que si $\Pi_2^p = \Sigma_2^p$, alors $PH = \Sigma_2^p$.*

Exercice 5 *Montrer comment construire la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le lemme. On s'aidera d'un circuit sub qui calcule $\varphi(\nu)$ sur les entrées φ et ν.*

Exercice 6 *Conclure Π_2-SAT est dans Σ_2^p en proposant une Σ_2-machine en temps polynomial.*

Exercice 7 *Conclure Π_2-SAT est dans Σ_2^p en utilisant la caractérisation par certificat.*

Taille de circuits

Exercice 8 *Montrer que toute fonction $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ est calculable par un circuit de taille $O(n2^n)$. De taille $O(2^n)$. (*) De taille $O(\frac{2^n}{n})$.*

Exercice 9 (Shannon, 1949) *Montrer qu'il existe une fonction $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ qui n'est pas calculable par un circuit C de taille inférieure à $\frac{2^n}{10n}$.*

Profondeur de circuits

Exercice 10 *Montrer que l'addition de deux nombres de n bits est dans AC^0 (plus précisément que le calcul de chaque bit de la somme est dans AC^0).*

Exercice 11 *Montrer que la multiplication est dans NC^1.*

Problème 1 *L'objectif est de démontrer que $NL \subseteq NC$.*

1. *Décrire un circuit NC pour calculer le produit de deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}})$.*
2. *Décrire un circuit NC pour calculer A^n étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}})$.*
3. *Conclure que le problème d'accessibilité est dans NC.*

Exercice 12 *Une formule est un circuit qui est un arbre. Montrer qu'un langage est décidé par une famille de formules de taille polynomiale ssi il est dans NC^1 (non-uniforme).*

Exercice 13 *Montrer que $NC^1 \subseteq L$. En déduire que $NC^1 \neq PSPACE$.*