TD5 - Conception et vérification de programmes

Bastien Maubert

1 S5 est NP-complet

Le problème de satisfiabilité de S5 est le suivant : étant donnée une formule modale φ, décider s'il existe un modèle de φ dont la relation est la relation universelle.
$Q1$) Montrer que ce problème est NP-dur.
$Q2$) Montrer que si une formule est S5-satisfiable, alors elle est S5-satisfiable dans un modèle de taille au plus $n+1$, où n est le nombre de diamants dans la formule écrite sous forme normale négative.
$Q3$) Montrer que le problème du modèle checking de K est dans P.
$Q4$) Conclure que le problème de satisfiabilité de S5 est dans NP.

2 Choisir des axiomes c'est pas facile

Ici on considère une logique modale avec deux modalités, K pour "knowledge" et B pour "belief", qui permettent de représenter respectivement ce qu'un agent sait et ce qu'il croît. Dans les modèles de cette logique on a donc deux relations d'accessibilité, une pour chaque modalité. Leur sémantique est celle du $\Box$ pour leur relation. Nous allons voir qu'en prenant pour cette logique des axiomes qui paraîssent tous (plus ou moins) "corrects" intuitivement, on arrive à prouver une formule qui heurte le bon sens.

Ces axiomes sont les suivants :

- $B\varphi \to \neg B \neg \varphi$
- $K\varphi \to \varphi$
- $\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$
- $K\varphi \to B\varphi$
- $B\varphi \to BK\varphi$

On rajoute les tautologies du calcul propositionnel, et le modus ponens. On va montrer qu'on peut prouver $B\varphi \to \varphi$.
$Q1$) Montrer que si on a une preuve de $\neg K\varphi \to \neg BK\varphi$, alors on a une preuve de $B\varphi \to \varphi$.
$Q2$) Montrer qu'on a une preuve de $\neg K\varphi \to \neg BK\varphi$.
$Q3$) Selon vous quel axiome n'a pas sa place dans cette logique ?

3 $K + G^{k,l,m,n}$ est correct et complet

Nous avons montré dans le TD 2 que K est correct et complet. On va montrer que si on ajoute à ce système de déduction l'axiome $G^{k,l,m,n} = \Diamond^k \Box^l p \to \Box^m \Diamond^n p$, il reste correct et complet par-rapport à l'ensemble des modèles basés sur les cadres vérifiant cette formule. C'est à dire,

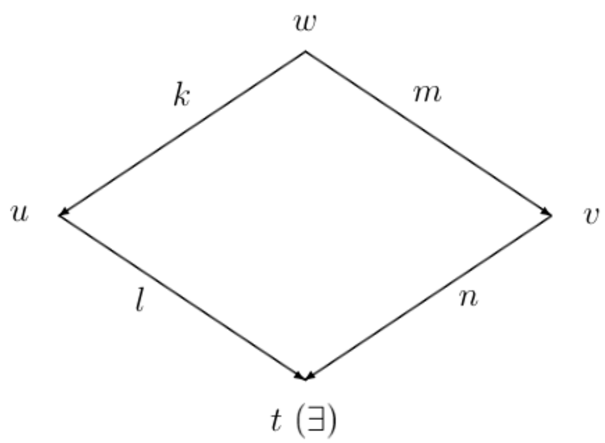
$$\vdash_{G^{k,l,m,n}} \varphi \text{ ssi } \models_{G^{k,l,m,n}} \varphi$$

$Q1$) Montrer la correction.
Pour la complétude, la preuve est la même qu'au TD 2. En supposant $\nvdash \varphi$, on a $\{\neg\varphi\}$ consistant, par le lemme de Lindenbaum il existe un ensemble maximal consistant (notons le w) contenant $\neg\varphi$, et par le Truth lemma, en notant $\mathcal{M}$ le modèle canonique, on a $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$, et donc $\not\models \varphi$. Dans le cas présent, la seule différence est qu'on veut obtenir $\not\models_{G^{k,l,m,n}} \varphi$. Pour cela is suffit de monter que le cadre du modèle canonique vérifie bien $G^{k,l,m,n}$.

On rappelle la définition du modèle canonique : $\mathcal{M} = \{W,\ R,\ V\}$ avec :
- W est l'ensemble de tous les emc ;
- R est la relation binaire sur W définie par :
  wRu si pour toute formule $\psi \in u$, on a $\Diamond\psi \in w$;
- $V : \quad p \quad \mapsto \quad \{w \in W \mid p \in w\}$

Proposition 1 *$wR^n u$ iff for all $\varphi \in u$, $\Diamond^n\varphi \in w$ iff for all $\Box^n\varphi \in w$, $\varphi \in u$*

$G^{k,l,m,n}$ est équivalente sur les cadres à la formule du premier ordre : $\forall w, u, v, (wR^k u \wedge wR^m v) \rightarrow \exists t(uR^l t \wedge vR^n t)$.



$Q2$) Montrer que le cadre de $\mathcal{M}$ vérifie $G^{k,l,m,n}$.

4 Algorithme de Sahlqvist

Appliquer l'algorithme de Sahlqvist pour vérifier l'équivalent du premier ordre sur les cadres donné dans l'exercice précédent pour la formule $G^{k,l,m,n}$.