TD4 - Conception et vérification de programmes

Bastien Maubert

1 Traduction vers le premier ordre

$Q1$) Donner une formule $\alpha(x)$ du premier ordre telle que pour tout modèle $\mathcal{M}, w$, $\mathcal{M}, w \models \Box(p \vee \Diamond q)$ ssi $\mathcal{M}[x \mapsto w] \models \alpha(x)$.

$Q2$) Donner une formule $\beta(x)$ du second ordre telle que pour tout cadre $\mathcal{F}, w$, $\mathcal{F}, w \models \Diamond p \wedge \Box\Box\neg q$ ssi $\mathcal{F}[x \mapsto w] \models \beta(x)$.

2 Une formule de FO non définissable dans K

Montrer que la formule $\exists x, xRx$ n'est pas définissable par une formule modale. C'est à dire qu'il n'existe pas de formule modale ϕ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \exists x, xRx$ ssi $\mathcal{M} \models \phi$.

3 Positivité, monotonie

Une formule modale est dite *positive* (resp. *negative*) en p si p apparaît toujours sous un nombre pair (resp. impair) de négations.

Une formule modale ϕ est *croissante* (resp. *décroissante*) en p si pour tout frame pointé $\mathcal{F}, w$ et valuation V tels que $(\mathcal{F}, V), w \models \phi$, $(\mathcal{F}, V'), w \models \phi$ pour toute valuation V' telle que $V(p) \subseteq V'(p)$ (resp. $V'(p) \subseteq V(p)$).

Montrer que si une formule modale est positive en p alors elle est croissante en p, et que si elle est négative en p alors elle est décroissante en p.

4 La formule de Mc Kinsey

Nous allons prouver que la formule de Mc Kinsey, $\phi = \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$, ne correspond à aucune condition du premier ordre sur les cadres c'est à dire :

$$\nexists \alpha \in FO, \forall \mathcal{F}, \mathcal{F} \models \phi \text{ ssi } \mathcal{F} \models \alpha$$

Pour cela nous allons avoir besoin du théorème de Löwenheim-Skolem :

Theorem 1 *Soit $\mathcal{M}$ un modèle du premier ordre de domaine W infini, et $X \subseteq W$ un sous-ensemble dénombrable du domaine. Alors $\mathcal{M}$ a un sous-modèle dénombrable qui contient X et satisfait les mêmes formules du premier ordre.*

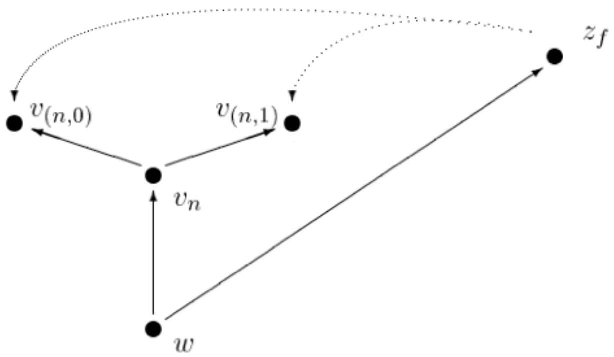
Nous allons exhiber un cadre qui vérifie la formule, et en appliquant ce théorème exhiber un sous-cadre équivalent sur les formules du premier ordre mais qui ne vérifie pas ϕ. On en concluera qu'il n'existe pas de formule du premier ordre équivalente à ϕ sur les cadres.

Considérons le cadre $\mathcal{F} = (W, R)$, où

$$W = \{w\} \cup \{v_n, v_{n,0}, v_{n,1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}, \text{ et}$$

$$R = \{(w, v_n), (v_n, v_{n,0}), (v_n, v_{n,1}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(w, z_f), (z_f, v_{n,f(n)}) \mid n \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$$

Un aperçu :



$Q1)$ Montrer que $\mathcal{F} \models \phi$.

$Q2)$ Appliquer le théorème de Löwenheim-Skolem pour exhiber un sous-cadre de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, contenant w et tous les $v_n, v_{n,i}$ et équivalent à $\mathcal{F}$ sur les formules du premier ordre. Justifier qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ telle que $z_f \notin \mathcal{F}'$.

$Q3)$ Montrer que pour tout z_g dans $\mathcal{F}'$, il existe n tel que $g(n) = f(n)$. Pour cela on exprimera en logique du premier ordre la propriété suivante : pour tout monde représentant une fonction f il existe un monde représentant la fonction $g : n \mapsto 1 - f(n)$. On pourra caractériser les mondes représentant les fonctions par le fait que ce sont les seuls à avoir au moins trois successeurs et un prédecesseur. Ceux représentant les entiers sont les seuls à avoir deux successeurs.

$Q4)$ Soit la valuation $V(p) = \{v_{n,f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$, où f est telle que $z_f \notin \mathcal{F}'$. Montrer que $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V) \not\models \phi$. Conclure.

5 Model checking de K

Problème : étant donnés un modèle pointé $\mathcal{M}, w$ et une formule ϕ de $\mathcal{L}_K$, décider si $\mathcal{M}, w \models \phi$. Montrer que le model checking de $\mathcal{L}_K$ est dans P.

6 Model checking de FO

Problème : étant donnés une formule ϕ de la logique du premier ordre, un modèle $\mathcal{M}$ et une interprétation des variables I, décider si $\mathcal{M}, I \models \phi$. Montrer que le model checking de FO est PSPACE-complet.