TD3 - Conception et vérification de programmes

Bastien Maubert

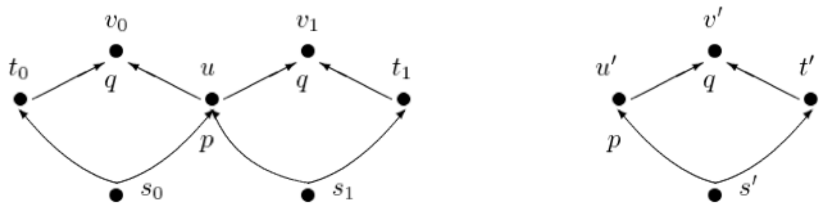
1 Un opérateur until

Considérons l'opérateur binaire until U, dont la sémantique est la suivante :

$$\mathcal{M}, w \models \phi U \psi \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l}\text{il existe } v \text{ tel que } wRv \text{ et } \mathcal{M}, v \models \psi \text{, et} \\ \text{pour tout } u \text{ tel que } wRu \text{ et } uRv,\ \mathcal{M}, u \models \phi.\end{array}$$

Montrer que U n'est pas définissable dans la logique modale basique K.

Indice : considérez ces deux modèles, mais avec des flèches ajoutées pour prendre la cloture transitive de la relation :



2 Des arbres pour modèles

Montrer que si une formule de la logique modale K admet un modèle, alors elle admet un arbre pour modèle. On en déduit que lorsqu'on veut décider si une formule est satisfiable on peut se contenter de chercher des modèles sous forme d'arbre.

3 Méthode tableau

Utiliser la méthode tableau pour décider si les formules suivantes sont satisfaisables :

- $\Diamond(\Diamond p \vee \Diamond q) \wedge \Box\Box(\neg p \wedge \neg q)$
- $\Diamond(\neg p \wedge \Diamond(p \wedge q)) \wedge \Box(\Box p \Rightarrow \neg\Diamond q)$

4 Satisfiabilité de K

Montrer que le problème de décider si une formule de K est satisfiable est PSPACE-hard, par réduction au problème QBF. Sans perdre de généralité, on prendra les formules de QBF sous forme normale prenex :

$$\Phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et ϕ est une formule de logique propositionnelle non quantifiée.

Pour cela, remarquer que l'évaluation d'une formule de QBF peut être représentée par un arbre, dans lequel on fixe la valeur de vérité d'une variable propositionnelle à chaque niveau. Au niveau i, si $Q_i = \forall$, on crée deux fils pour chaque noeud du niveau $i-1$, un où on met p_i à vrai, l'autre à faux. Si $Q_i = \exists$, on n'a qu'un fils pour chaque noeud du niveau $i-1$, et pour chacun on choisit la valeur qu'on associe à p_i.

Une formule de QBF Φ est valide si on peut lui associer un tel arbre tel que la partie non quantifiée de la formule, $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, est vraie dans toutes les feuilles de l'arbre.

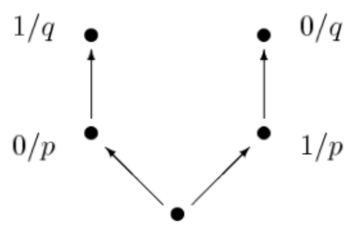


Figure 1 – Exemple pour $\forall p \exists q\ (p \leftrightarrow \neg q)$

Pour une instance Φ de QBF, construire une formule de la logique modale K qui admet un modèle ssi Φ est valide.

5 Bisimulation maximale

Montrer que s'il existe une bisimulation R entre $\mathcal{M}, w$ et $\mathcal{M}', w'$, alors il existe une bisimulation maximale ; c'est à dire une bisimulation R_m telle que pour toute bisimulation R' entre $\mathcal{M}, w$ et $\mathcal{M}', w'$ on a $R' \subseteq R_m$.

6 Model checking de FO

Problème : étant donnés une formule ϕ de la logique du premier ordre, un modèle $\mathcal{M}$ et une interprétation des variables I, décider si $\mathcal{M}, I \models \phi$. Montrer que le model checking de FO est PSPACE-complet.