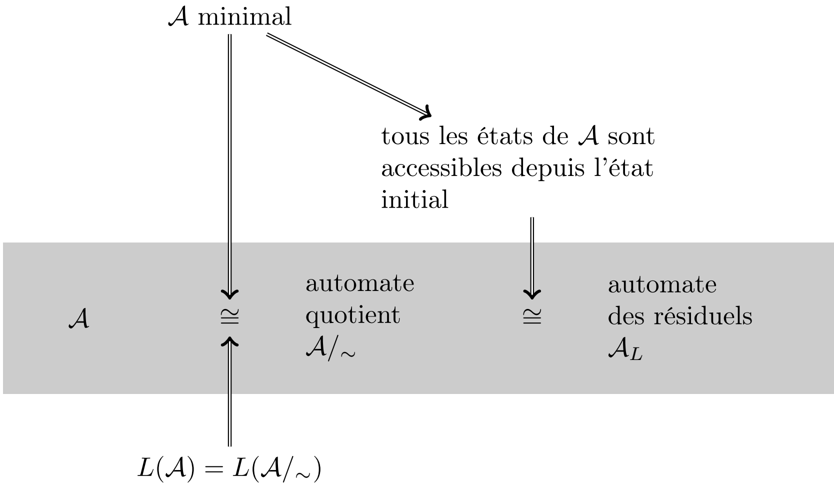
Automate minimal

FOND1 - ENS Rennes

Définition 40 (automate minimal)**.** *Un* automate minimal *d'un langage L est un automate déterministe complet qui reconnait L et avec un nombre minimal d'états.*

9 Unicité de l'automate minimal

Théorème 41. *Soit L un langage rationnel. L admet un unique automate minimal (à isomorphisme près).*



9.1 Automate quotient

Définition 42 (langage reconnu depuis un état q)**.** *Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate déterministe complet. Pour tout état $q \in Q$, on note*

$$L(\mathcal{A}, q) = \{m \in \Sigma^* \mid \delta(q, m) \in F\}.$$

En particulier, $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}, q_0)$.

Définition 43 (congruence de Nérode)**.** *Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate déterministe complet. On définit la relation d'équivalence $\sim$, appelée la* congruence de Nérode *:*

$$q \sim q' \quad \textit{ssi} \quad L(\mathcal{A}, q) = L(\mathcal{A}, q').$$

Notation 44 (classe d'équivalence)**.** *On note $[q]_\sim$ ou $[q]$ la classe d'équivalence de q, i.e. $[q] := \{q' \in Q \mid q \sim q'\}$.*

Définition 45 (automate quotient)**.** *Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate déterministe complet. L'automate quotient de $\mathcal{A}$ par $\sim$ est l'automate $\mathcal{A}/_\sim = (Q_\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0], F_\sim)$ avec*
- *$Q_\sim = \{[q] \mid q \in Q\}$;*
- *Pour tout $q \in Q$, pour tout $a \in \Sigma$, $\delta_\sim([q], a) = [\delta(q, a)]$;*
- *$F_\sim = \{[q] \mid q \in F\}$.*

Théorème 46. *Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate déterministe complet. $L(\mathcal{A}/_\sim) = L(\mathcal{A})$.*

9.2 Quotient d'un automate minimal

Définition 47 (automates isomorphes)**.** *$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ et $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ sont isomorphes s'il existe une fonction bijective $h : Q \to Q'$ telle que*
- *Pour tout $q \in Q$, pour tout $a \in \Sigma$, $h(\delta(q, a)) = \delta'(h(q), a)$;*
- *$h(q_0) = q_0'$;*
- *$h(F) = F'$.*

Proposition 48. *Soit $\mathcal{A}$ un automate minimal. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}/_\sim$ sont isomorphes.*

9.3 Automate des résiduels

Définition 49 (résiduel)**.** *Soit L un langage. Soit w un mot. Le résiduel à gauche de L par rapport à w est le langage*

$$w^{-1}L = \{u \in \Sigma^* \mid wu \in L\}.$$

On note $Res(L) := \left\{w^{-1}L \mid w \in \Sigma^*\right\}$.

Proposition 50. *Pour tout langage L, pour tout $u, v \in \Sigma^*$, $(uv)^{-1}L = v^{-1}u^{-1}L$.*

Définition 51 (automate des résiduels)**.** *Soit L un langage quelconque sur Σ.*

L'automate des résiduels de L est l'automate (pas forcément fini) déterministe $\mathcal{A}_L = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ où :

- *$Q = Res(L)$;*
- *Pour tout $u \in \Sigma^*$, pour tout $a \in \Sigma$, $\delta(u^{-1}L, a) = (ua)^{-1}L$;*
- *$q_0 = \epsilon^{-1}L = L$;*
- *$F = \left\{u^{-1}L \mid u \in L\right\}$.*

Proposition 52. *Pour tout langage L, $L(\mathcal{A}_L) = L$.*

Théorème 53. *Un langage L est rationnel ssi $Res(L)$ est fini.*

9.4 Un quotient est l'automate des résiduels

Proposition 54. *Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate fini déterministe complet tel que tous les états de $\mathcal{A}$ sont accessibles depuis l'état initial. Alors $\mathcal{A}/_\sim$ est isomorphe à l'automate des résiduels $\mathcal{A}_L$ où $L = L(\mathcal{A})$.*

10 Calcul de l'automate minimal : algorithme de Moore

On considère un automate déterministe et complet $\mathcal{A}$ où tous les états sont accessibles depuis l'état initial.

Définition 55 ($(\sim_i)_{i\in\mathbb{N}}$)**.** *On définit la suite $(\sim_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de relations d'équivalence sur Q définie par :*

a. Pour tout $q, q' \in Q$, $q \sim_0 q'$ ssi ($q \in F$ ssi $q' \in F$) ;

b. Pour tout $q, q' \in Q$, $q \sim_{i+1} q'$ ssi $q \sim_i q'$ et pour tout $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) \sim_i \delta(q', a)$.

Notation 56 (langage des mots reconnus de longueur $\leq i$ reconnu depuis un état q)**.** *On note :*

$$L_i(\mathcal{A}, q) = \{m \in \Sigma^* \mid |m| \leq i\} \cap L(\mathcal{A}, q).$$

Proposition 57. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $q, q' \in Q$,*

$$q \sim_i q' \quad \text{ssi} \quad L_i(\mathcal{A}, q) = L_i(\mathcal{A}, q').$$

Proposition 58. *Il existe $k \leq |Q| - 2$ tel que $\sim_k = \sim_{k+1} = \sim$.*

Proposition 59. *Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sim_k = \sim_{k+1}$, on a $\sim_k = \sim$.*

précondition : $\mathcal{A}$ un automate déterministe et complet où tous les états sont accessibles depuis l'état initial.
postcondition : **retourner** l'automate minimal de $L(\mathcal{A})$
fonction AUTOMATEMINIMAL($\mathcal{A}$)
    Soit $\sim_0$ comme dans la définition 55
    $i := 0$
    répéter
        $i := i + 1$
        $\sim_i$:= raffiner($\mathcal{A}$, $\sim_{i-1}$) comme dans la définition 55
    jusqua $\sim_i = \sim_{i-1}$
    retourner $\mathcal{A}/_{\sim_i}$

Théorème 60. *L'algorithme* AUTOMATEMINIMAL *est correct.*