Corrigé du devoir maison
FOND1 2016-2017

François Schwarzentruber

1 Énoncé

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit $L = \{tu \in \Sigma^* \mid |t| = |u| \text{ et } t \neq u\}$. Donner une grammaire algébrique qui engendre le langage L.

2 Proposition de corrigé

La grammaire candidate est la grammaire G suivante :

$$\begin{array}{l} S \to AB \mid BA \\ A \to XAX \mid a \\ B \to XBX \mid b \\ X \to a \mid b \end{array}$$

où S est l'axiome. Formellement, on a $G = (\Sigma, V, R, S)$ avec :

Pour le cours de langages formels, donnez aussi la définition formelle.

- $V = \{S, A, B, X\}$;
- $R = \{(S, AB), (S, BA), (A, XAX), (A, a), (B, XBX), (B, b), (X, a), (X, b)\}$.

Nous allons démontrer que :

Théorème 1 $L(G) = L$.

Avant de démontrer le théorème, posons :

- $L_a := \{vaw \in \Sigma^* \mid |v| = |w|\}$;
- $L_b := \{vbw \in \Sigma^* \mid |v| = |w|\}$.

L_a (respectivement L_b) est l'ensemble des mots de longueur impaire de lettre centrale a (respectivement b). Démontrons le lemme suivant.

Le résultat est intuitif mais démontrons-le.

Lemme 1

1. $L_A(G) = L_a$
2. $L_B(G) = L_b$.

Démonstration.

1. On démontre l'égalité $L_A(G) = L_a$ par double-inclusion.

   ($\supseteq$) Soit $v, w \in \Sigma^*$ tel que $|v| = |w|$. Le mot v s'écrit $v_1 \dots v_n$ et le mot w s'écrit $w_1 \dots w_n$ avec $v_i, w_i \in \Sigma$. On a la suite de dérivations suivante :

   $$A \to v_1 A w_n \to v_1 v_2 A w_{n-1} w_n \to \dots \to vAw \to vaw.$$

   Ainsi $vaw \in L_A(G)$.

   ($\subseteq$) L'inclusion $L_A(G) \subseteq L$ se démontre par récurrence forte sur la longueur d'une suite de dérivations. Plus précisément, la propriété de la récurrence est :

   Enoncez la propriété de la récurrence.

   $$\mathcal{P}(k) : \begin{array}{l}\text{Pour tout mot } m \in \Sigma^*, \text{ si } A \to^{\leq k} m \text{ alors } m \text{ est de la forme } vaw \\ \text{avec } |v| = |w|.\end{array}$$

   - Cas de base. Soit $m \in \Sigma^*$ tel que $A \to^{\leq 1} m$ alors $m = a = \epsilon a \epsilon$. Donc la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Hérédité. Soit $k \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}(k')$ pour tout $k' \leq k$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$. Supposons $A \to^{k+1} m$. Comme $k \geq 1$, on a $A \to XAX \to^k m$. On a alors $A \to^{k'} m_2 \dots m_{|m|-1}$ avec $k' \leq k$. Par $\mathcal{P}(k')$, on obtient que $m_2 \dots m_{|m|-1}$ est de la forme vaw avec $|v| = |w|$. Ainsi, m s'écrit $m_1 vaw m_{|m|}$ et $|m_1 v| = |w m_{|m|}|$. Donc la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

   On a démontré par récurrence que pour tout $k \geq 1$, la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Ainsi, si $m \in L_A(G)$, il existe $k \geq 1$ tel que $A \to^k m$. Par $\mathcal{P}(k)$, on a $m \in L$.

2. L'égalité 2 est similaire en remplaçant A par B et a par b.

■

Ne vous lancez pas dans une démonstration par double-inclusion tout de suite sous peine de fournir une démonstration fastidieuse.

À présent, démontrons le théorème. Pour cela, on remarque que :

$$\begin{aligned}
L &= \{tu \in \Sigma^* \mid |t| = |u| \text{ et } t \neq u\} \\
&= \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} \{tu \in \Sigma^* \mid |t| = |u| = 1 + i + j \text{ et } t_{i+1} \neq u_{i+1}\} \\
&= \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} (\Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^j \cdot \Sigma^i \cdot \{b\} \cdot \Sigma^j \cup \Sigma^i \cdot \{b\} \cdot \Sigma^j \cdot \Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^j) \\
&= \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} (\Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^i \cdot \Sigma^j \cdot \{b\} \cdot \Sigma^j \cup \Sigma^i \cdot \{b\} \cdot \Sigma^i \cdot \Sigma^j \cdot \{a\} \cdot \Sigma^j) && \text{car } \Sigma^i \cdot \Sigma^j = \Sigma^j \cdot \Sigma^i \\
&= (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^i \cdot \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Sigma^j \cdot \{b\} \cdot \Sigma^j) \\
&\qquad \cup (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i \cdot \{b\} \cdot \Sigma^i \cdot \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Sigma^j \cdot \{a\} \cdot \Sigma^j) && \text{par distributivité de } \cup \text{ sur } \cdot \\
&= (L_a \cdot L_b) \cup (L_b \cdot L_a).
\end{aligned}$$

Démontrons $L = L(G)$ par double-inclusion.

($\subseteq$) Soit $m \in L(G)$. On a $S \to^* m$. Sans perte de généralité, on suppose que la première dérivation de $S \to^* m$ est $S \to AB$. D'après le lemme 1, le mot m est dans $L_a \cdot L_b = L$.

($\supseteq$) Soit $m \in L = (L_a \cdot L_b) \cup (L_b \cdot L_a)$. Sans perte de généralité supposons que $m \in L_a \cdot L_b$. Ainsi, m s'écrit $\alpha \cdot \beta$ avec $\alpha \in L_a$ et $\beta \in L_b$. D'après le lemme 1 ;

- $A \to^* \alpha$;
- et $B \to^* \beta$.

Ainsi $S \to AB \to^* \alpha B \to^* \alpha\beta$ et donc $m \in L(G)$.

3 Points d'améliorations

3.1 Rédaction

$m \in L$

$$m = uv$$

$u = u_1 \dots u_p$

Il faut rédiger des phrases sinon le lecteur confond hypothèse, conclusion, définition.

3.2 Vocabulaire

- L'autre cas est isomorphe $\rightsquigarrow$ l'autre cas est similaire/analogue.
- Transformation $\rightsquigarrow$ dérivation.

3.3 Langue française

- Nous avons trouv**er** $\to$ Nous avons trouvé
- On pren**ds** $\to$ On prend
- Ré**cc**urrence $\to$ Récurrence.
- Les phrases commencent par une majuscule et se terminent par un point.

3.4 Notation

- Dans une grammaire, une règle s'écrit avec $\to$ et pas avec $=$.

3.5 Typage

- $\Sigma^i a \Sigma^j$ est une expression rationnelle.
- $\{\Sigma^i a \Sigma^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble d'expressions rationnelles.
- $\Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^j$ est un langage.
- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^i$ est un langage.
- Si w est un mot, on ne peut pas écrire $w = \Sigma^i a \Sigma^j$.
  - On peut écrire $w \in L(\Sigma^i a \Sigma^j)$.
  - On peut écrire $w \in \Sigma^i \cdot \{a\} \cdot \Sigma^j$.

3.6 Démonstration

Il faut penser et repenser la démonstration pour la rendre plus élégante et plus concise.