

Programmation dynamique

François Schwarzenruber
ENS Cachan - Bretagne

Sac à dos

0.5L 600€



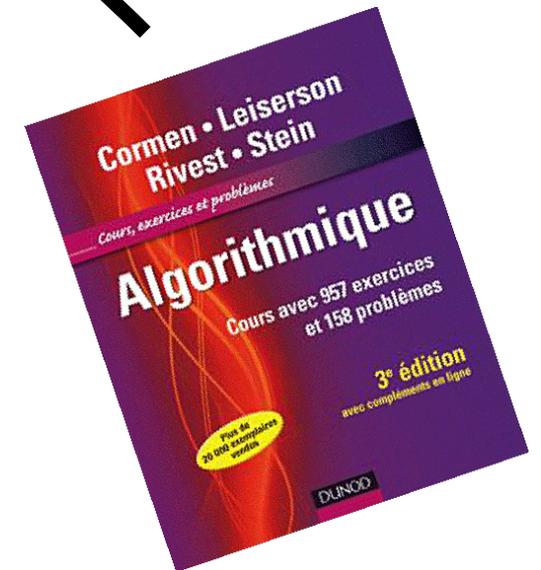
2L 700€



1L, 3€



2.5L max



1L 200€

Trouver la sous-séquence d'ADN
commune la plus longue



Rendre la monnaie



Justification de paragraphe

Le titre du roman est révélateur : Hugo a choisi de nous présenter la Révolution au travers de la terrible année 1793. Pour nous décrire la guerre civile qui ensanglanta alors la France, Victor Hugo a beaucoup lu, sans doute plus de quarante volumes dont la fameuse Histoire de la Révolution française de Michelet. On ne peut donc suspecter la vérité historique de cette fresque romanesque.

Etymologie

1950

- **Optimisation** de problème qui évolue dans le temps



2011

- Résoudre des **sous-problèmes** pour résoudre un problème d'optimisation

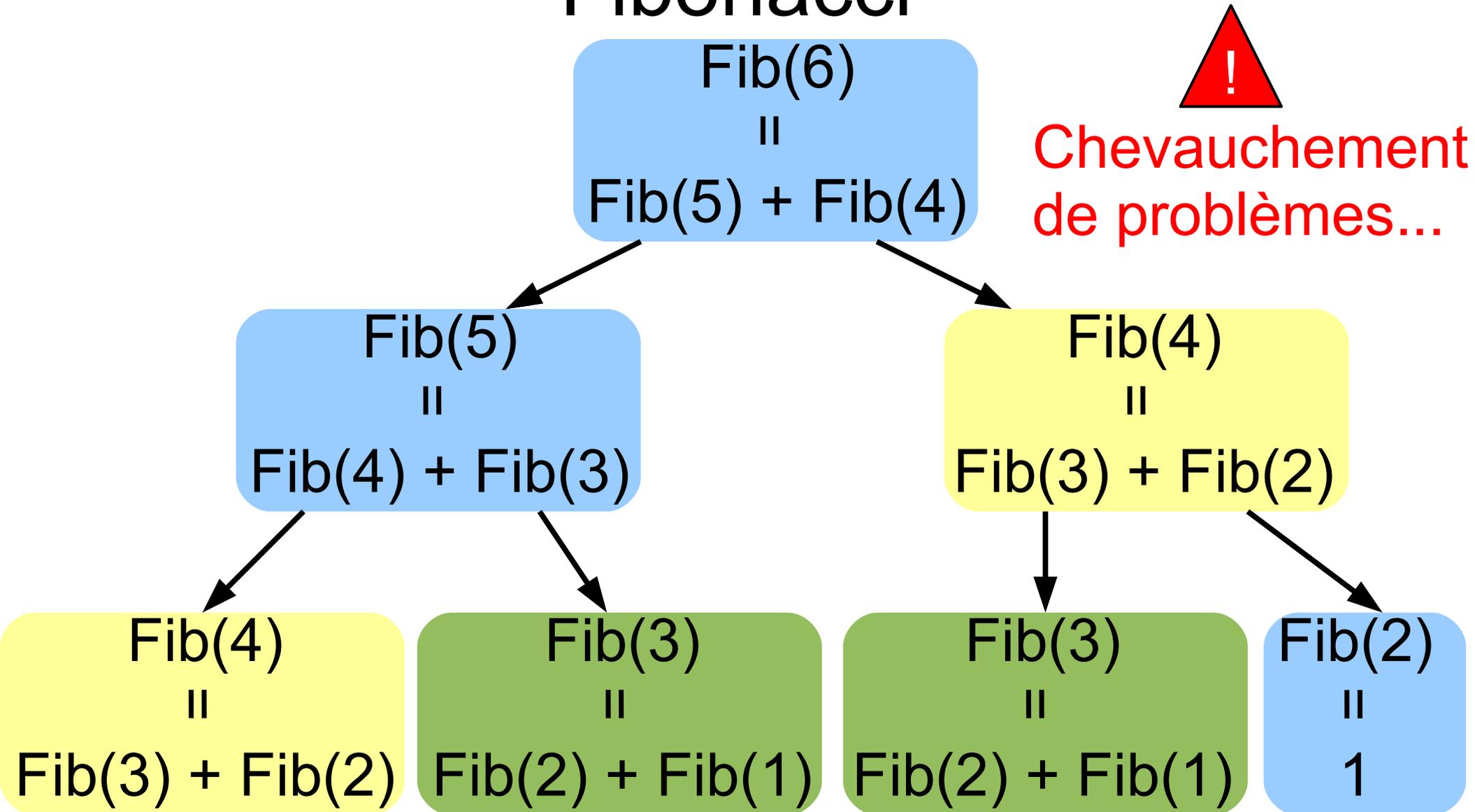


Plan

- Principe de mémorisation
 - Top-down, bottom-up
- Concept de sous-structures optimales
 - Exemple du découpage de barres
- Trouver les sous-structures
 - Trouver l'ordre de calcul
 - Exhiber des sous-problèmes plus précis
- Réduire l'espace mémoire utilisé

Principe de mémorisation

Calcul récursif de la suite de Fibonacci



Mémoïsation

Fonction $f(n)$
retourner

Fonction $f(n)$
Si $f(n)$ est déjà calculé
retourner la valeur déjà calculée
Sinon
retourner

Fonction ascendante

Fib[1] := 1

Fib[2] := 1

Fib[3] := Fib[2] + Fib[1]

Fib[4] := Fib[3] + Fib[2]

Fib[5] := Fib[4] + Fib[3]

Fib[6] := Fib[5] + Fib[4]



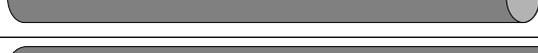
Tri fusion ?

Conclusion

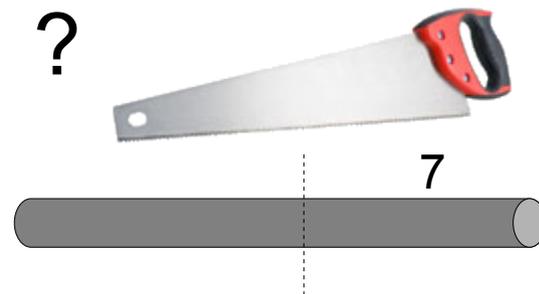
- Top down / Bottom up
- Compromis temps / espace

Principe des sous-structures optimales

Découpage de barres

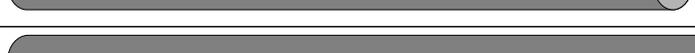
Longueur	Prix
1 	1€
2 	5€
3 	8€
4 	9€
5 	10€
6 	17€
7 	17€
8 	20€
9 	24€
10 	30€

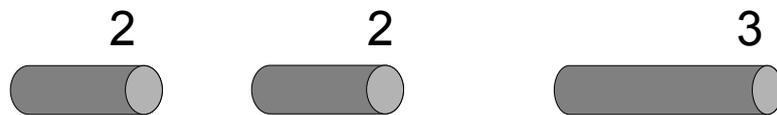
?



17€

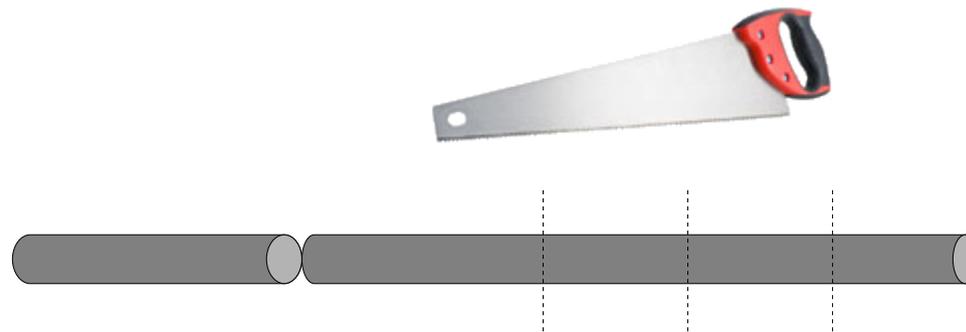
Découpage de barres

Longueur	Prix
1 	1€
2 	5€ X 2
3 	8€
4 	9€
5 	10€
6 	17€
7 	17€
8 	20€
9 	24€
10 	30€



18€

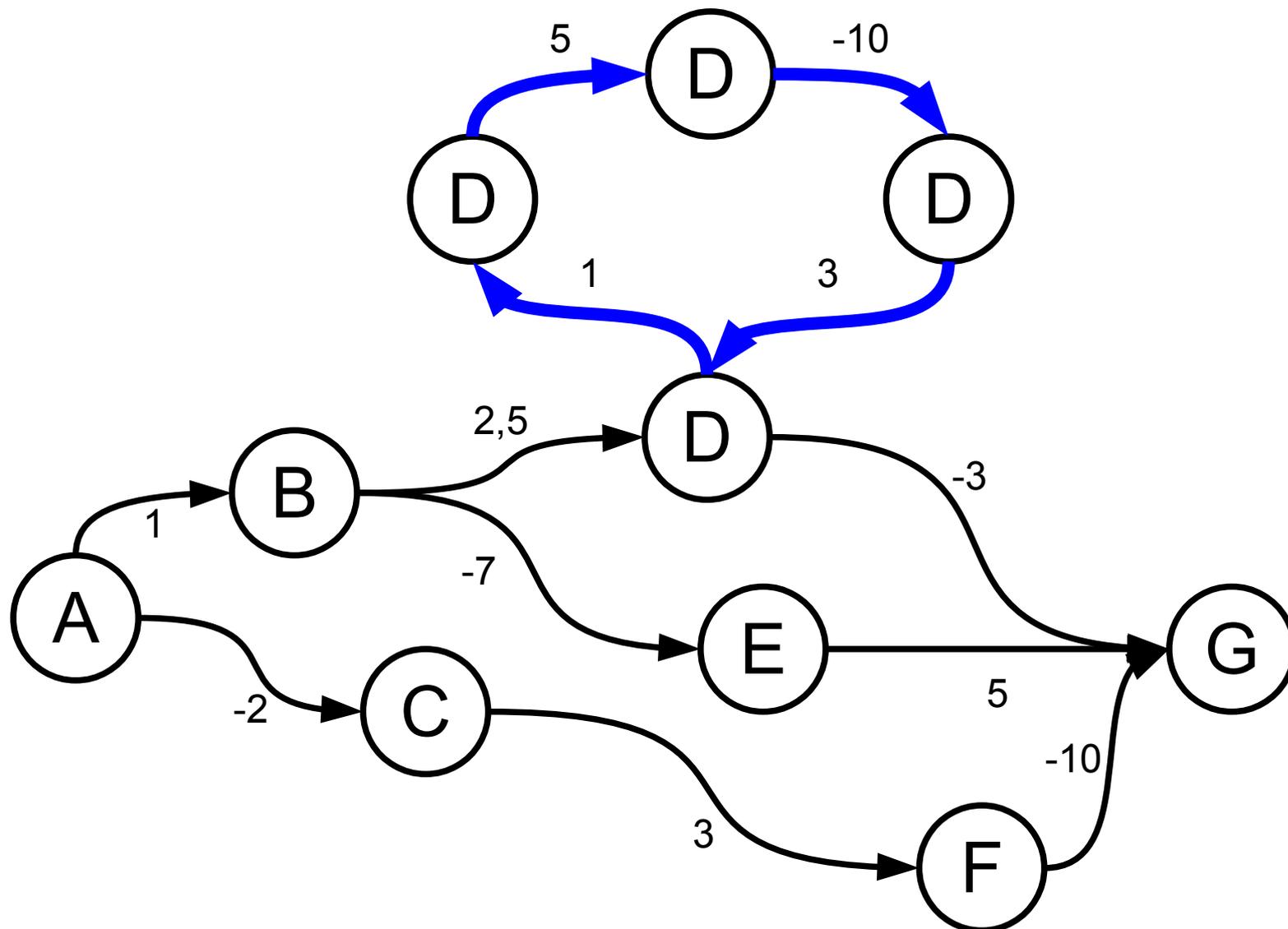
Sous-structures optimales



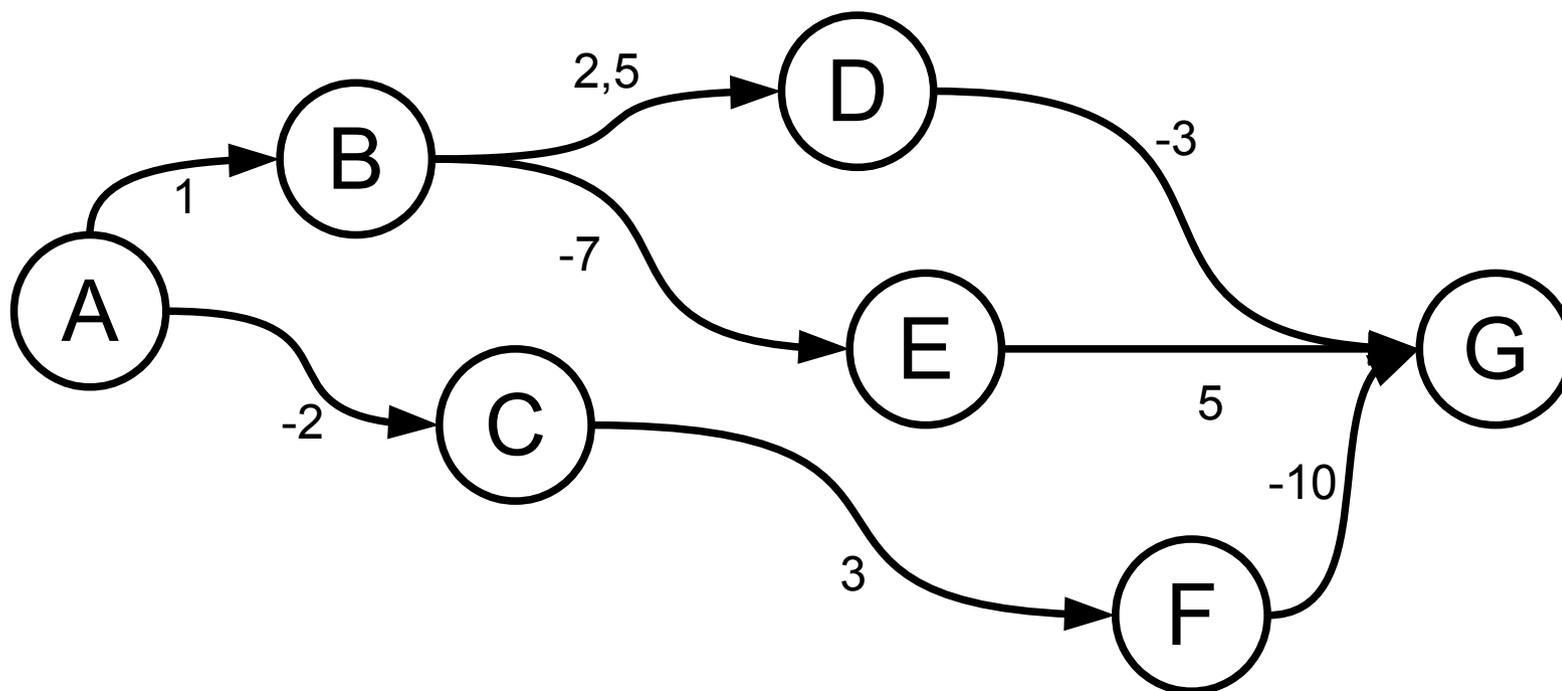
Trouver des sous-structures optimales

- Plus court chemins dans un graphe avec poids négatifs autorisés

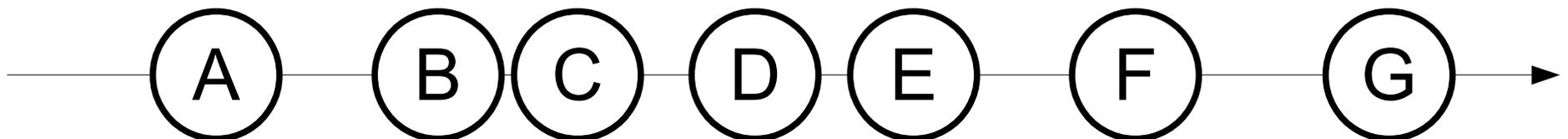
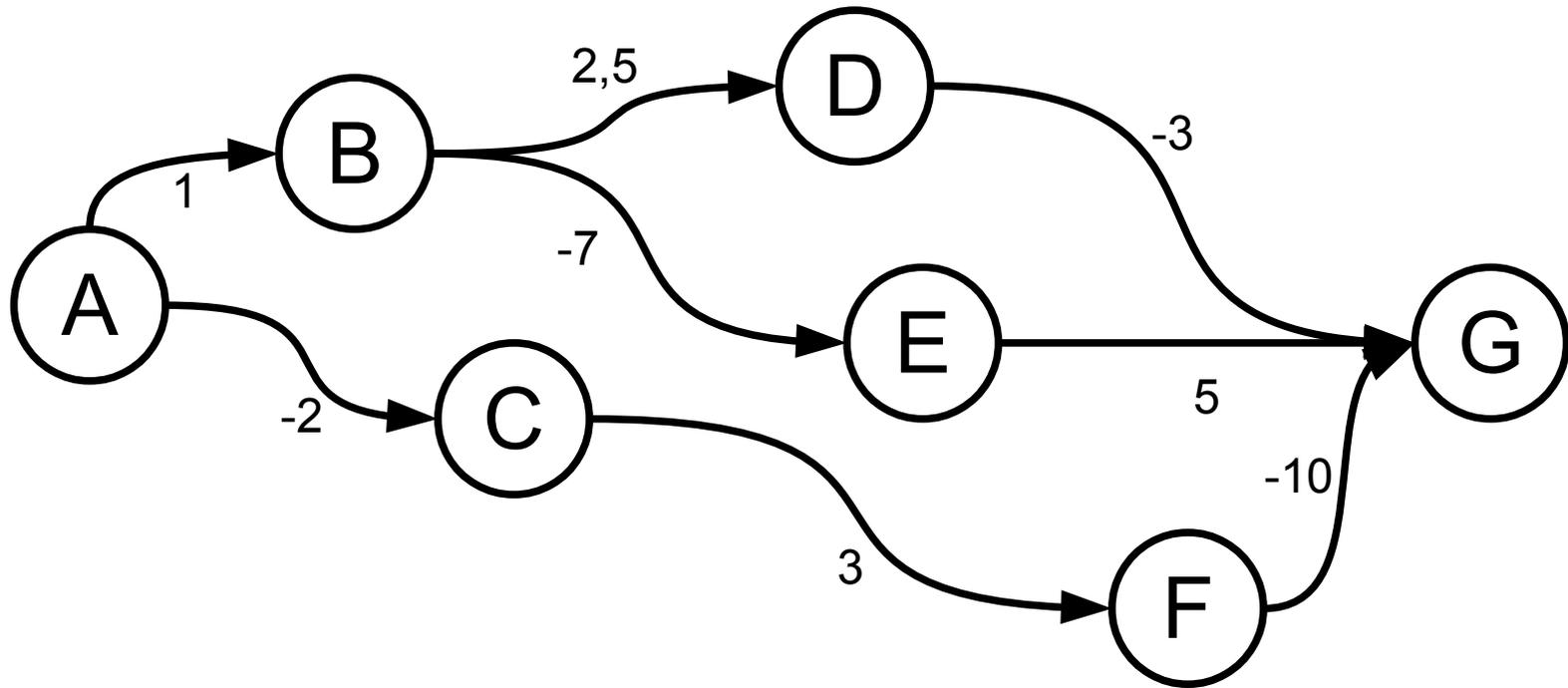
Un ennemi : un cycle de poids négatifs



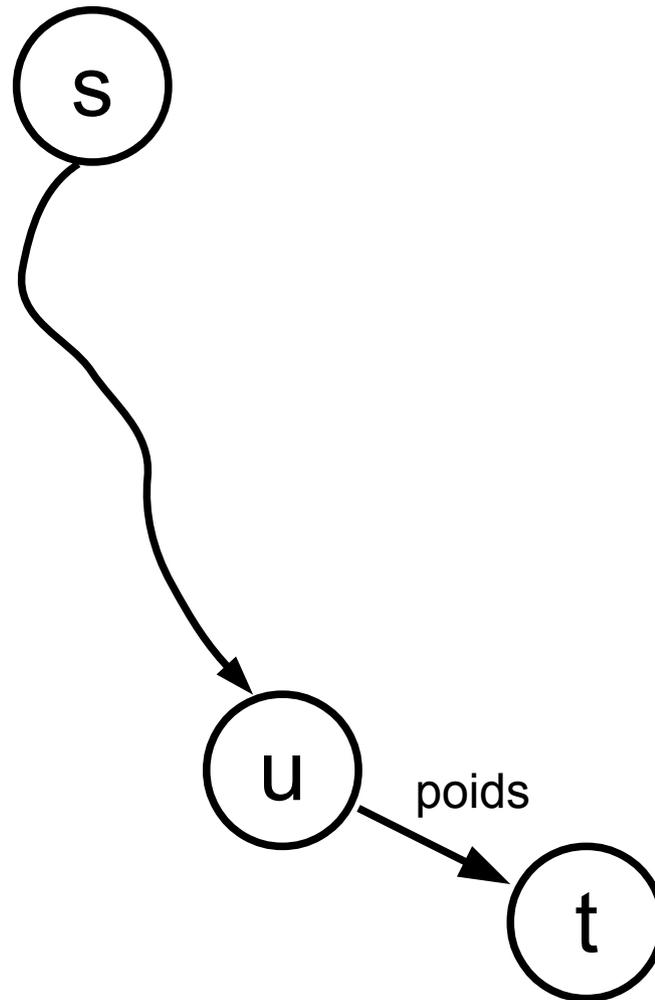
Cas des DAG



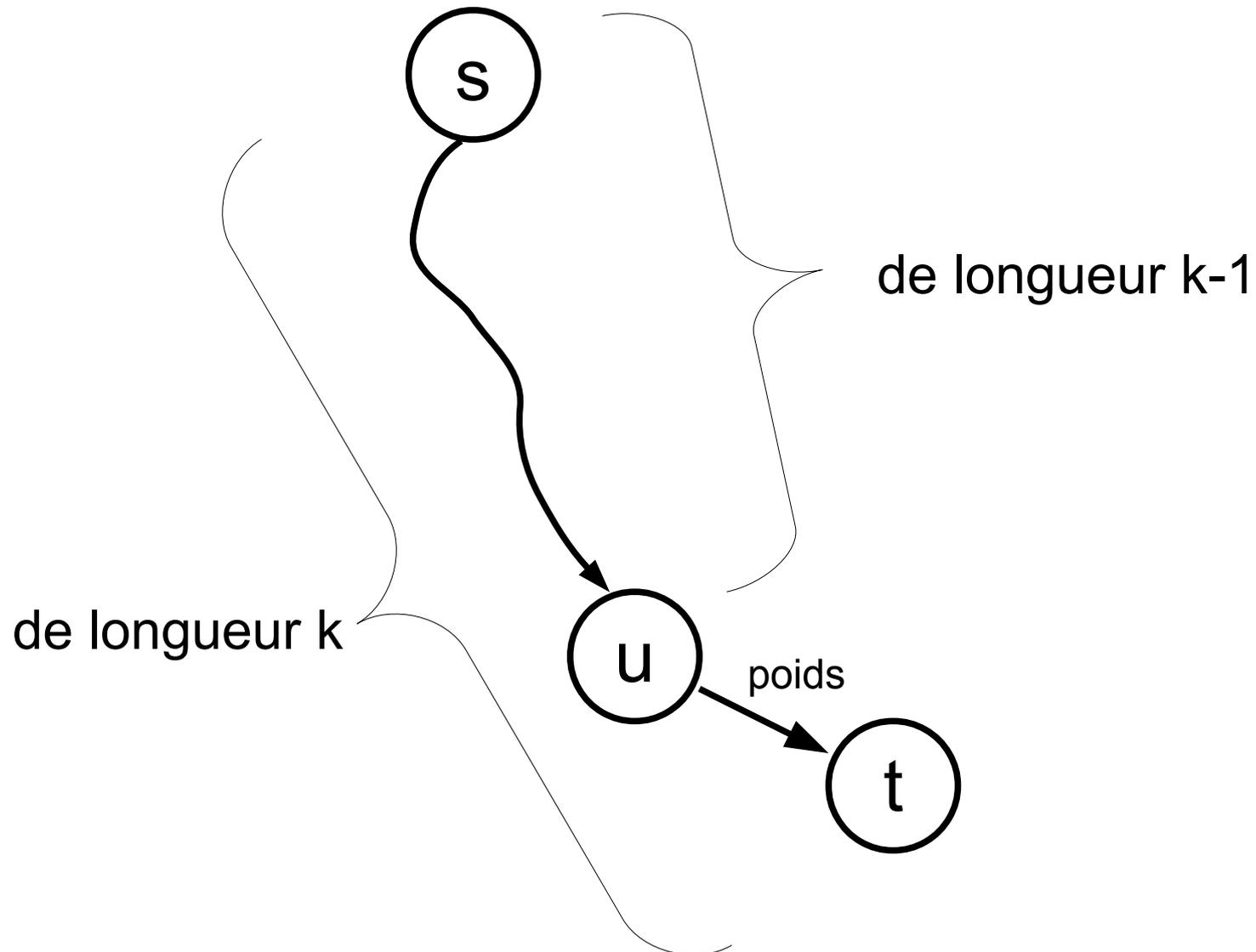
Cas des DAG



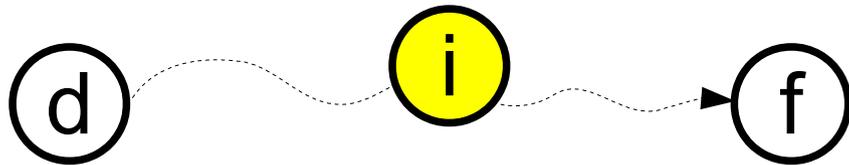
Cas général sans cycle négatif



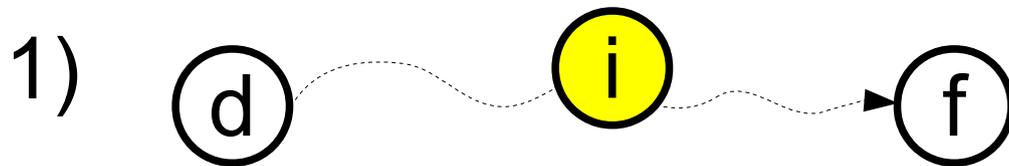
Le problème d'optimisation exhibe une sous-structure optimale.



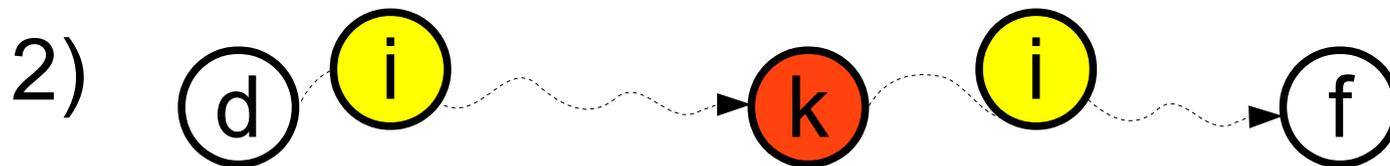
Le problème d'optimisation exhibe
une sous-structure optimale.



$i \leq k \dots$

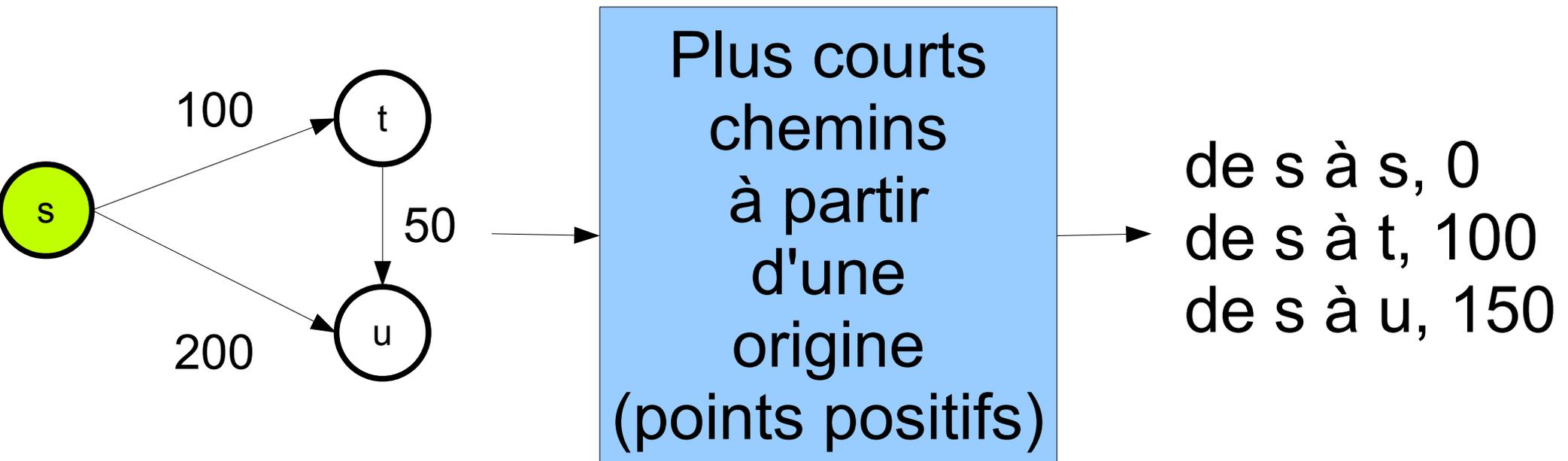


$i \leq k-1$



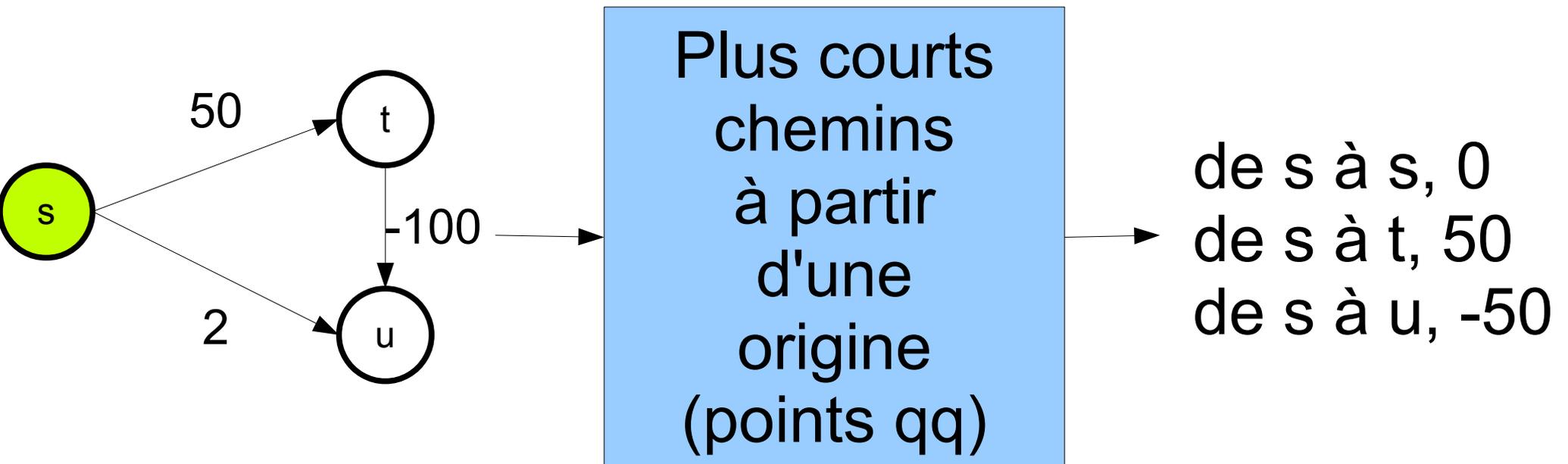
$i \leq k-1$

Problème des plus courts chemins à partir d'une origine

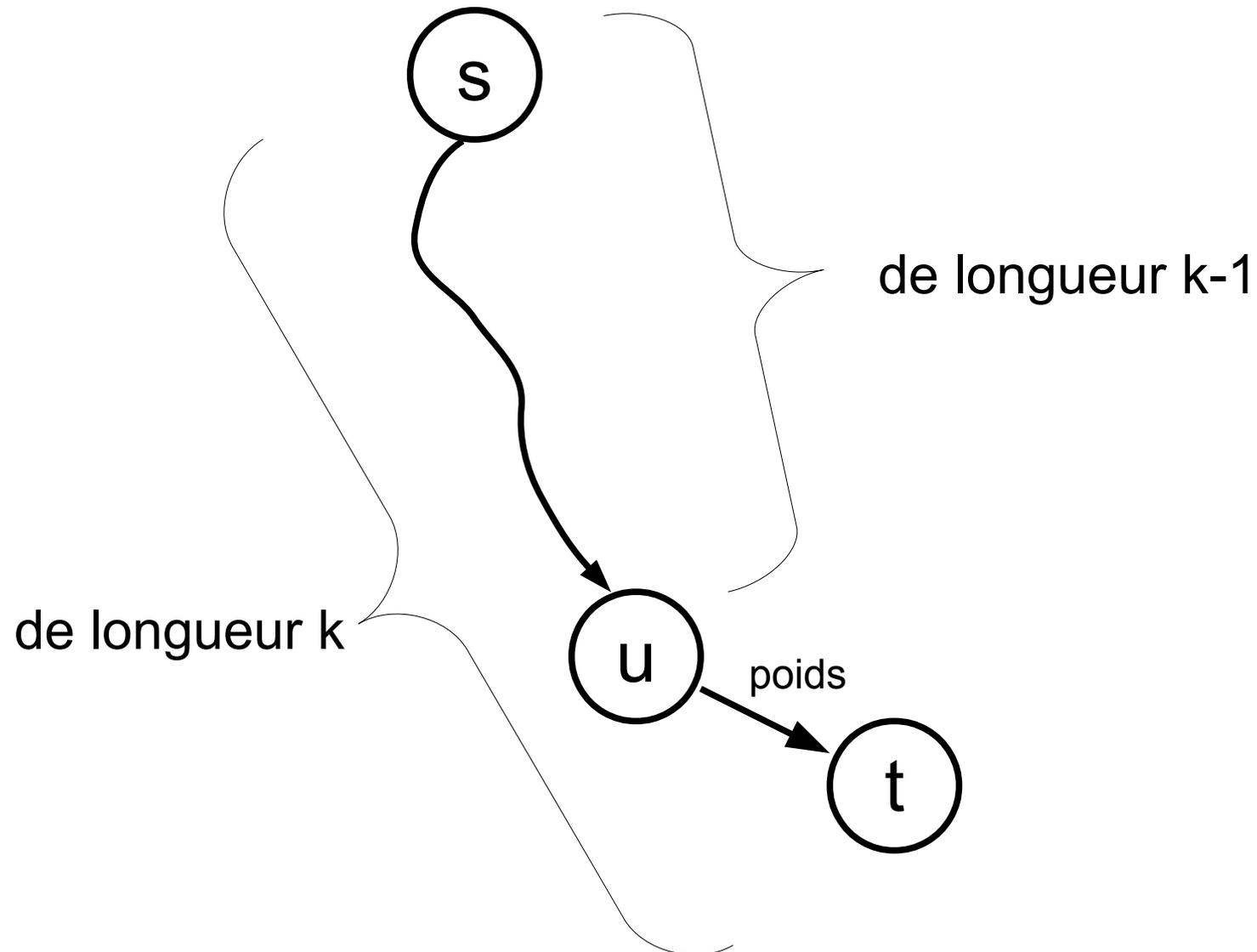


(algorithme de Dijkstra)

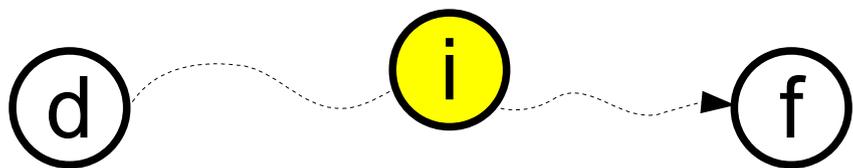
Problème des plus courts chemins à partir d'une origine



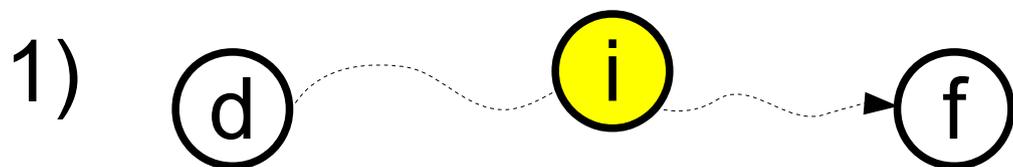
Algorithme de Bellman-Ford



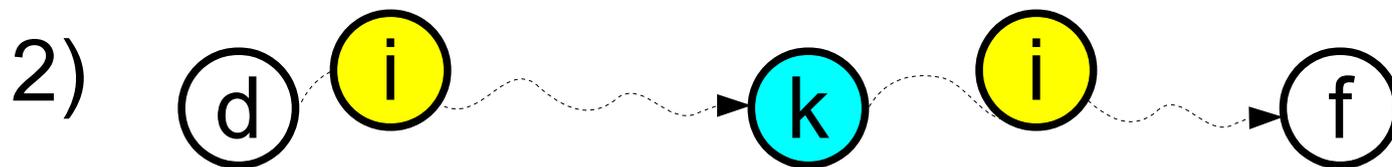
Algorithme de Floyd-Warshall



$i \leq k \dots$

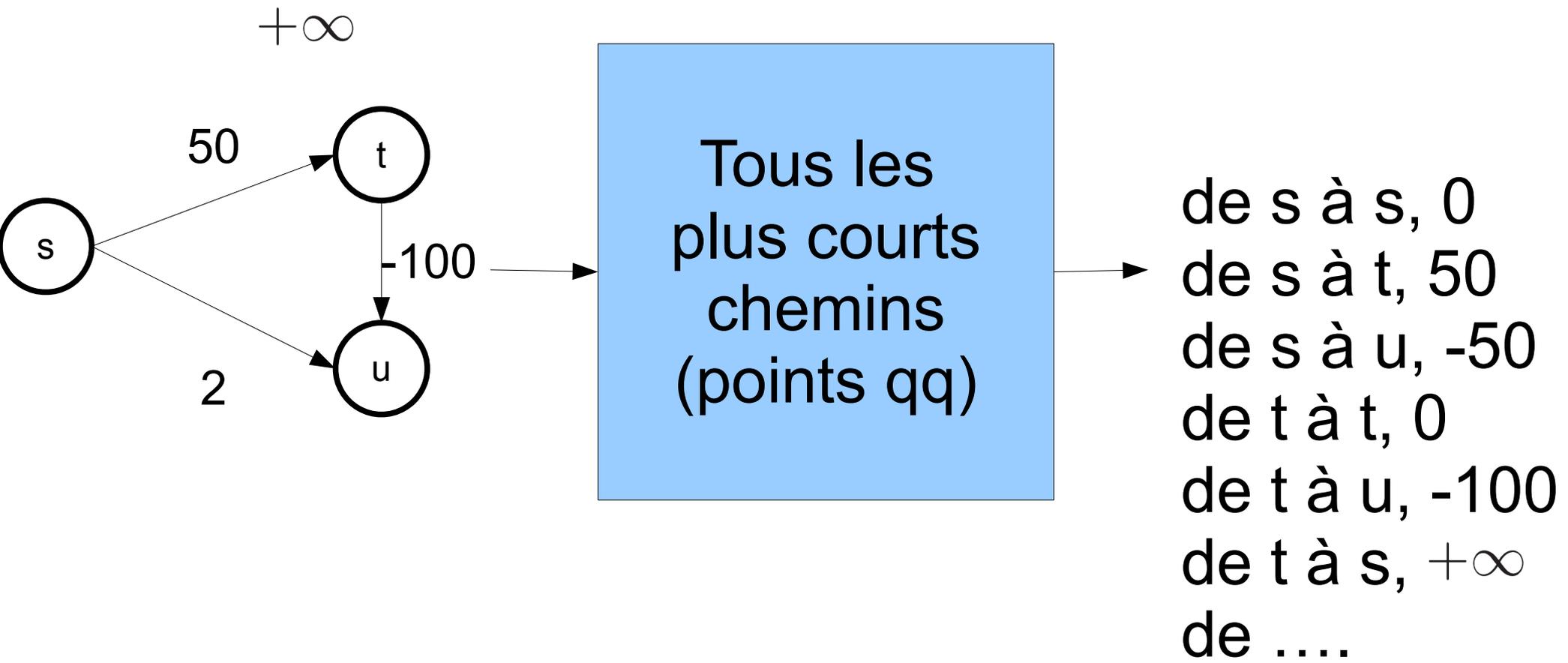


$i \leq k-1$



$i \leq k-1$

Problème de tous les plus courts chemins



Résumé des algorithmes de plus courts chemins

		Temps	Espace
Avec origine Sans cycle	Tri topologique puis calcul	$O(S+A)$	$O(S+A)$
Avec origine Poids positifs	Dijkstra	$O((S+A) \log S)$ $O(S \log S + A)$ en amorti	$O(S+A)$
Avec origine Tous les poids	Bellman-Ford	$O(SA)$	$O(S^2)$
Tous les points comme origine Tous les poids	Floyd-Warshall	$O(S^3)$	$O(S^3)$

Résumé des algorithmes de plus courts chemins

		Temps	Espace
Avec origine Sans cycle	Tri topologique puis calcul	$O(S+A)$	$O(S+A)$
Avec origine Poids positifs	Dijkstra	$O((S+A) \log S)$ $O(S \log S + A)$ en amorti	$O(S+A)$
Avec origine Tous les poids	Bellman-Ford	$O(SA)$	$O(S^2)$
Tous les points comme origine Tous les poids	Floyd-Warshall	$O(S^3)$	$O(S^3)$

Résumé des algorithmes de plus courts chemins

		Temps	Espace
Avec origine Sans cycle	Tri topologique puis calcul	$O(S+A)$	$O(S+A)$
Avec origine Poids positifs	Dijkstra	$O((S+A) \log S)$ $O(S \log S + A)$ en amorti	$O(S+A)$
Avec origine Tous les poids	Bellman-Ford	$O(SA)$	$O(S)$
Tous les points comme origine Tous les poids	Floyd-Warshall	$O(S^3)$	$O(S^2)$