

44 définitions de théorie des graphes

cours ALGO1

Graphes

Un **graphe orienté** est un couple (S, A) où S est un ensemble de **sommets** et $A \subseteq S \times S$ est un ensemble d'**arcs (orientés)**. Un **arc orienté** (s, t) se note $s \rightarrow t$ ou $s \xrightarrow{G} t$. On dit que $s \rightarrow t$ **part** du sommet s . On dit que $s \rightarrow t$ **arrive** au sommet t . Les sommets t tels que $s \rightarrow t$ sont appelés **successeurs** de s . Les sommets s tels que $s \rightarrow t$ sont appelés **prédécesseurs** de t . Un arc $s \rightarrow t$ est **incident** pour s et t . Une **boucle** est un arc $s \rightarrow s$. Le **degré entrant** d'un sommet est le nombre d'arcs qui y arrivent. Le **degré sortant** d'un sommet est le nombre d'arcs qui en partent.

Un **graphe non orienté** est un couple (S, A) où S est un ensemble de **sommets** et A est un ensemble d'ensembles de deux sommets. Les éléments de A s'appellent des **arcs non orientés** (ou **arêtes**) (il n'y a pas de boucles). Un **arc non orienté** $\{s, t\}$ se note $s - t$ ou $s \overset{G}{-} t$. Le **degré** d'un sommet s est le nombre d'arêtes qui sont incidentes à s .

Chemins, cycles

Un **chemin** (de **longueur** n) de s à t est une suite de sommets $\langle s_0 = s, s_1, \dots, s_n = t \rangle$ tels que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $s_i \rightarrow s_{i+1}$. Le chemin **contient** les sommets s_i et les arcs $s_i \rightarrow s_{i+1}$. S'il existe un chemin de s à t , on note $s \rightsquigarrow t$ et t est **accessible** depuis s . Il existe toujours un **chemin de longueur 0** entre s et s . Si $0 \leq i \leq j \leq n$, $\langle s_i, s_{i+1}, \dots, s_j \rangle$ est un **sous-chemin** de $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$. Un chemin est **élémentaire** (ou **simple**¹) ssi tous les sommets du chemin sont distincts. Un **circuit** (ou **cycle**) est un chemin $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$ ssi $s_0 = s_n$ et il contient au moins un arc.

Pour les graphes non orientés, un chemin s'appelle aussi une **chaîne**.

Un **chemin eulérien** est un chemin qui passe exactement une fois par chaque arc. Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui passe exactement une fois par chaque sommet.

¹selon Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Algorithmique.

Qualificatifs pour les graphes

Un graphe **simple** est un graphe sans boucles. Un graphe sans cycle est **acyclic**. Un graphe non orienté est **connexe** ssi tout sommet est accessible depuis tous les autres sommets. Une **composante connexe** d'un graphe est une classe d'équivalence pour la relation 'est accessible depuis'. Un **arbre** est un graphe non orienté, connexe et acyclique.

Un graphe orienté est **fortement connexe** si pour tout s, t , $s \rightsquigarrow t$ et $t \rightsquigarrow s$. Une composante fortement connexe est une classe d'équivalence pour la relation sRt : $s \rightsquigarrow t$ et $t \rightsquigarrow s$.

Un graphe **complet** est un graphe tel que pour tout couple de sommets (s, t) , on a $s \rightarrow t$.

Un graphe est dit **plan** ssi il est dessiné dans le plan de manière à ce que deux arcs ne se croisent pas.

Graphe pondéré

Un **graphe pondéré** $G = (S, A)$ est un graphe muni d'une **fonction de pondération** $w : A \rightarrow \mathbb{R}$. $w(s \rightarrow t)$ s'appelle le **poind** de l'arc $s \rightarrow t$.

Le **poind d'un chemin** $\langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle$ est $\sum_{i=0}^{n-1} w(s_i \rightarrow s_{i+1})$.