

# Introduction à la logique épistémique

## Luminy 2014

Francois Schwarzentruher

ENS Rennes

24 avril 2014

# Introduction à la logique ~~épistémique~~ de la connaissance

Luminy 2014

Francois Schwarzenruber

ENS Rennes

24 avril 2014

## Connaissance commune

 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



A priori, tout se passe bien si

- A sait que l'on roule à droite
- B sait que l'on roule à droite

## Connaissance commune

📄 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



Ça peut mal se passer si

- $A$  sait que l'on roule à droite
- $B$  sait que l'on roule à droite
- $A$  ne sait pas que  $B$  sait que l'on roule à droite

## Connaissance commune

 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



A priori, tout se passe bien si

- *A* sait que l'on roule à droite
- *B* sait que l'on roule à droite
- *A* sait que *B* sait que l'on roule à droite

## Connaissance commune

 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



Ça peut mal se passer si

- $A$  sait que l'on roule à droite
- $B$  sait que l'on roule à droite
- $A$  sait que  $B$  sait que l'on roule à droite
- $B$  ne sait pas que  $A$  sait que l'on roule à droite

## Connaissance commune

 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



A priori, tout se passe bien si

- A sait que l'on roule à droite
- B sait que l'on roule à droite
- A sait que B sait que l'on roule à droite
- B sait que A sait que l'on roule à droite

## Connaissance commune

 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



### Ça peut mal se passer si

- *A* sait que l'on roule à droite
- *B* sait que l'on roule à droite
- *A* sait que *B* sait que l'on roule à droite
- *B* sait que *A* sait que l'on roule à droite
- *A* ne sait pas que *B* sait que *A* sait que l'on roule à droite

## Connaissance commune

 [David Lewis. *Convention, a Philosophical Study*. Harvard University Press, 1969]



A priori, tout se passe bien si

- A sait que l'on roule à droite
- B sait que l'on roule à droite
- A sait que B sait que l'on roule à droite
- B sait que A sait que l'on roule à droite
- A sait que B sait que A sait que l'on roule à droite
- etc.

## Connaissance commune

Connaissance commune parmi  $\{A, B\}$  que l'on roule à droite

Pour toute séquence finie  $s_1, \dots, s_n \in \{A, B\}$ , on a

$s_1$  sait que  $s_2$  sait que  $\dots$   $s_n$  sait que l'on roule à droite

Différent de

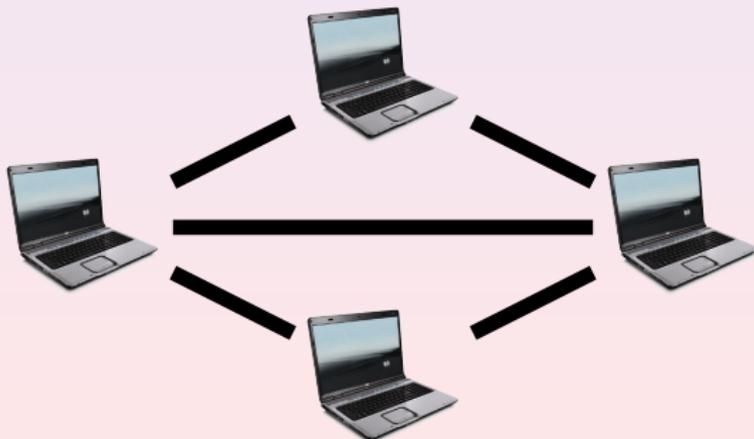
$A$  sait que l'on roule à droite

$B$  sait que l'on roule à droite

## Impossibilité d'atteindre la connaissance commune

📄 [Halpern, Moses, Knowledge and Common Knowledge in a Distributed Environment]

Dans un système distribué où la communication n'est pas garantie, on ne peut pas obtenir la connaissance commune d'une information.



## Problème des deux armées

1 sait que :

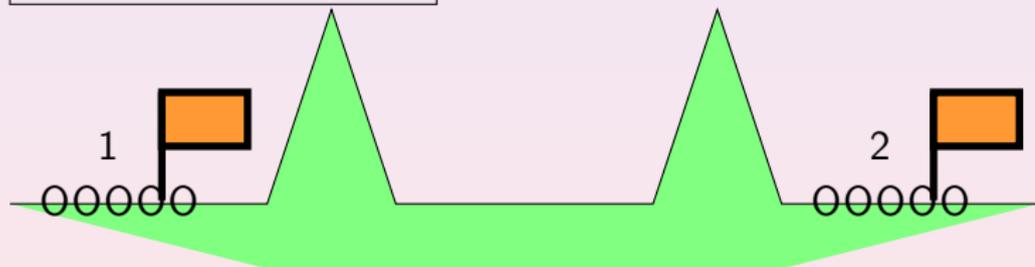
- AUBE

1 ne sait pas que :

- 2 sait que AUBE

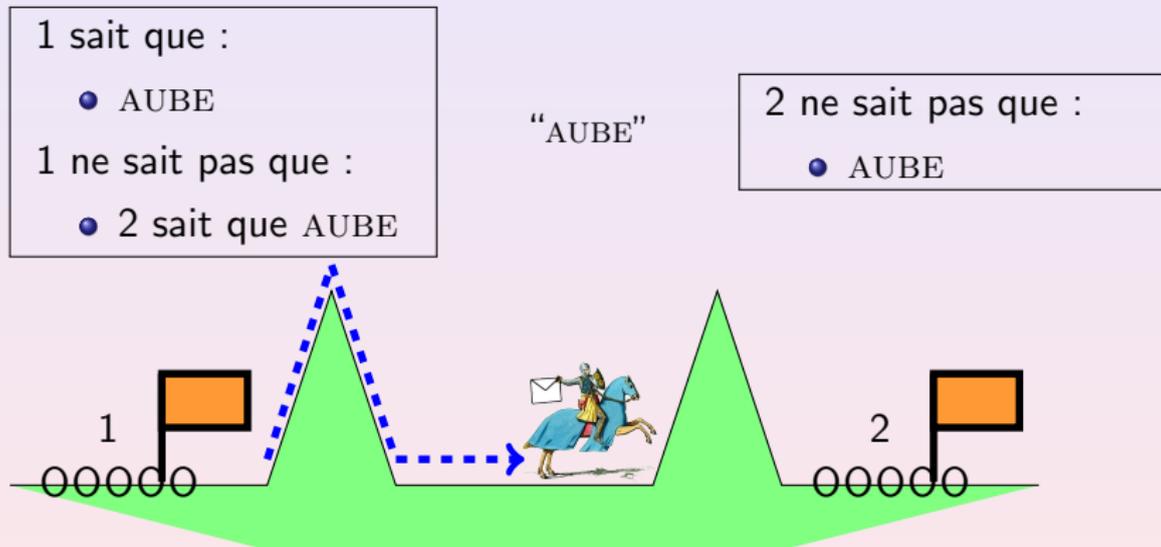
2 ne sait pas que :

- AUBE



AUBE = 'la prochaine attaque a lieu à l'aube'

## Problème des deux armées



AUBE = 'la prochaine attaque a lieu à l'aube'

## Problème des deux armées

1 sait que :

- AUBE

1 ne sait pas que :

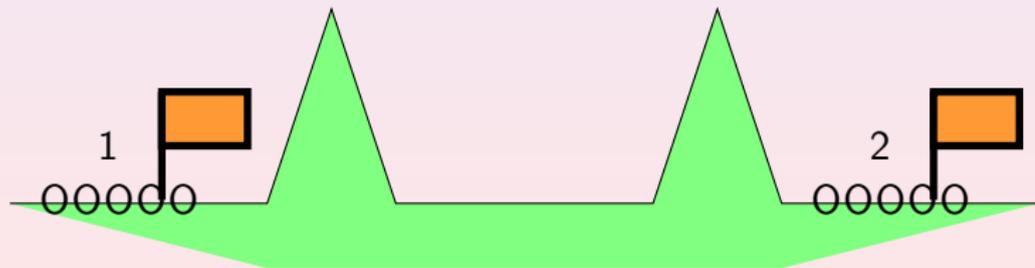
- 2 sait que AUBE

2 sait que :

- AUBE

2 ne sait pas que :

- 1 sait que 2 sait que AUBE



AUBE= 'la prochaine attaque a lieu à l'aube'

## Problème des deux armées

1 sait que :

- AUBE

1 ne sait pas que :

- 2 sait que AUBE

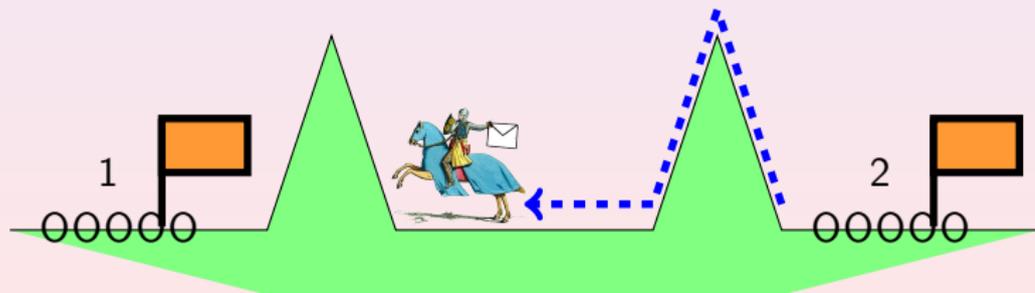
"2 sait que  
AUBE"

2 sait que :

- AUBE

2 ne sait pas que :

- 1 sait que 2 sait  
que AUBE



AUBE = 'la prochaine attaque a lieu à l'aube'

## Problème des deux armées

1 sait que :

- AUBE
- 2 sait que AUBE

1 ne sait pas que :

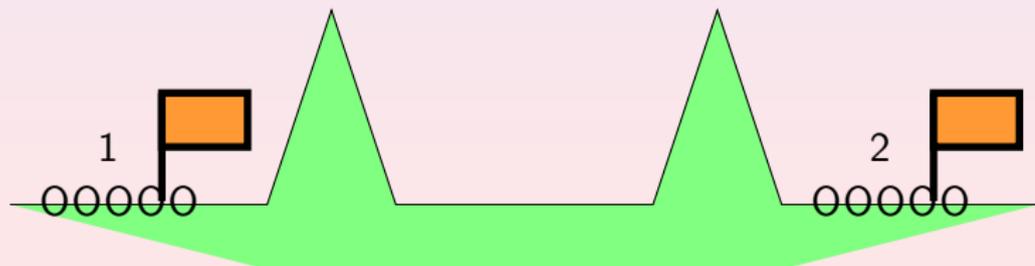
- 2 sait que 1 sait  
que 2 sait que  
AUBE

2 sait que :

- AUBE

2 ne sait pas que :

- 1 sait que 2 sait  
que AUBE



AUBE = 'la prochaine attaque a lieu à l'aube'

## Problème des deux armées

1 sait que :

- AUBE
- 2 sait que AUBE

1 ne sait pas que :

- 2 sait que 1 sait  
que 2 sait que  
AUBE

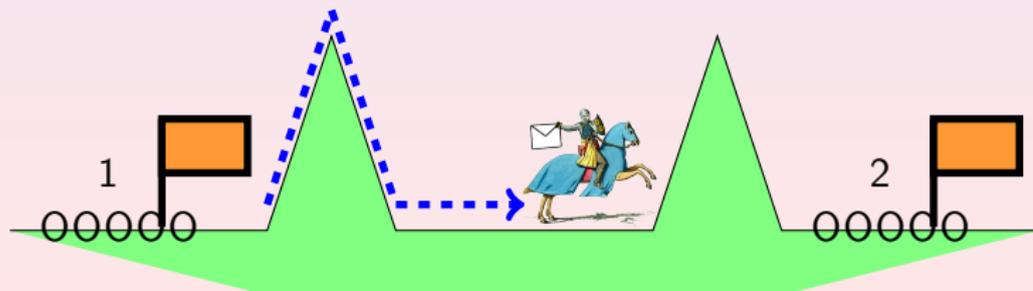
“ 1 sait que  
2 sait que  
AUBE”

2 sait que :

- AUBE

2 ne sait pas que :

- 1 sait que 2 sait  
que AUBE



# Outline

- 1 Logique épistémique
  - Syntaxe
  - Sémantique
  - Annonces publiques
  - Model checking
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

# Outline

- 1 Logique épistémique
  - Syntaxe
  - Sémantique
  - Annonces publiques
  - Model checking
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

# Logique modale

## Auxiliaires modaux

I know ...	je sais que ...	$K...$
I believe...	je crois que...	$B...$
I must...	je dois faire que...	$O...$
in the future...	dans le futur ...	$F...$
	il existe une démonstration de ...	$P...$

$\neg p \wedge Fp \wedge Bp$

' $p$  est faux et dans le futur,  $p$  est vraie et je crois que  $p$ '

# Agents

Soit  $AGT = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  un ensemble dénombrable d'agents.

## Exemple (Notations plus agréables)

$A$  le joueur  $A$

$B$  le joueur  $B$

1 le joueur 1

2 le joueur 2

# Propositions atomiques

Soit  $ATM = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble dénombrable de propositions atomiques.

## Exemple (Notations plus agréables)

$4_A$	le joueur $A$ a la carte 4
AUBE	nous allons attaquer à l'aube
ilfaitbeau	il fait beau

# Syntaxe

## Definition

L'ensemble  $\mathcal{L}_K$  des formules de la logique épistémique est engendré par la grammaire suivante :

$$\varphi, \psi, \dots ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_a\varphi$$

où  $p \in ATM$ ,  $a \in AGT$ ,  $J \in 2^{AGT}$ .

## Lecture

$\neg\varphi$	$\varphi$ est faux
$(\varphi \wedge \psi)$	$\varphi$ et $\psi$
$K_a\varphi$	l'agent $a$ sait que $\varphi$ est vraie

# Macros

	Ecrire	est un raccourci pour
Opérateurs duaux	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
	$\hat{K}_a\varphi$	$\neg K_a\neg\varphi$
Et aussi...	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$(\neg\varphi \vee \psi)$
	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

## Exemple : enfants sales

### DEUX VOLONTAIRES !

#### Exemple (de formules)

- $\neg K_1 \text{sale}_1 \wedge \neg K_2 \text{sale}_2$   
' 1 ne sait pas que 1 est sale et 2 ne sait pas que 2 est sale '
- $K_1 \text{sale}_2 \vee K_1 \neg \text{sale}_2$   
' 1 connaît l'état du front '
- $K_2 \text{ilfaitbeau}$

## Exemple : enfants sales

### État initial

$\neg K_1 \text{sale}_1 \wedge \neg K_2 \text{sale}_2.$

J'annonce la formule  $\text{sale}_1 \vee \text{sale}_2.$

### État 2

$\neg K_1 \text{sale}_1 \wedge \neg K_2 \text{sale}_2.$

Vous venez d'annoncer que la formule  $\neg K_1 \text{sale}_1 \wedge \neg K_2 \text{sale}_2.$

### État 3

$K_1 \text{sale}_1 \wedge K_2 \text{sale}_2.$

# Syntaxe

## Definition

L'ensemble  $\mathcal{L}_{K,CK}$  des formules de la logique épistémique avec connaissance commune est engendré par la grammaire suivante :

$$\varphi, \psi, \dots ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_a\varphi \mid CK_J\varphi$$

où  $p \in ATM$ ,  $a \in AGT$ ,  $J \in 2^{AGT}$ ,  $J$  fini.

## Lecture

$CK_J\varphi$  : il y a connaissance commune dans  $J$  que  $\varphi$  est vraie

## Example

$CK_{\{A,B\}}\neg K_C \text{ il fait beau}$

# Outline

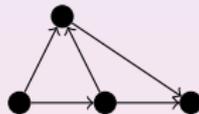
- 1 Logique épistémique
  - Syntaxe
  - **Sémantique**
  - Annonces publiques
  - Model checking
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

## Modélisation

- Est-ce que  $K_1sale_1$  est vraie (dans la réalité) ?
- Est-ce que  $K_2sale_2$  est vraie (dans la réalité) ?



Réalité

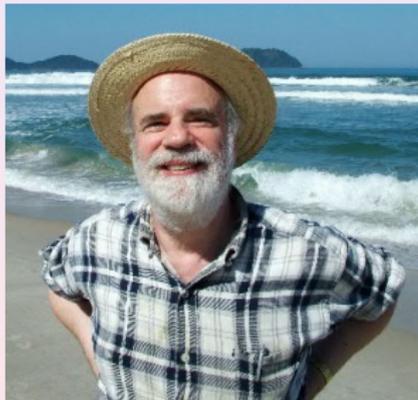


Modèle

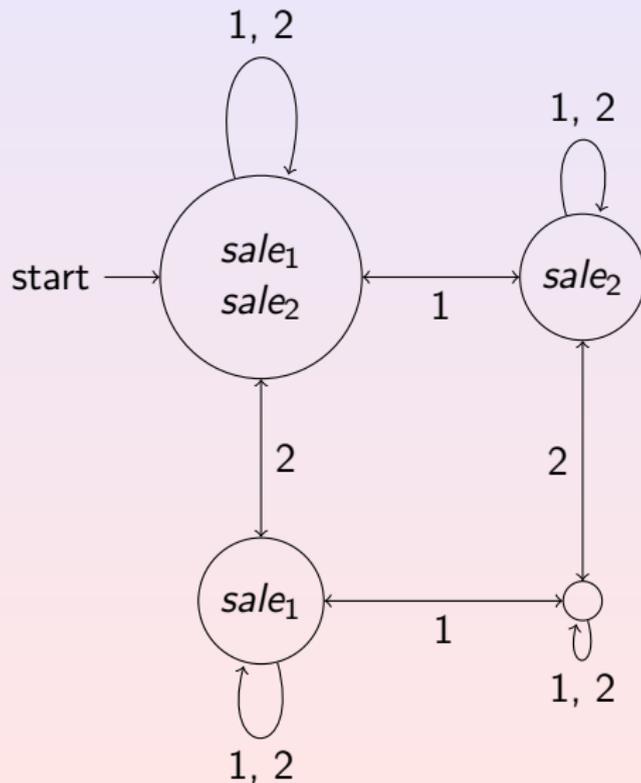
- Est-ce que  $K_1sale_1$  est vraie dans le modèle ?
- Est-ce que  $K_2sale_2$  est vraie dans le modèle ?

## Modélisation du monde

On modélise le monde avec un graphe des mondes possibles : un modèle (pointé) de Kripke.



## Modélisation du monde



# Modèle de Kripke

## Definition

Un modèle de Kripke est un triplet  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  où :

- $W$  est un ensemble non vide ;
- $R : AGT \rightarrow 2^{W \times W}$  ;
- $V : W \rightarrow 2^{ATM}$ .

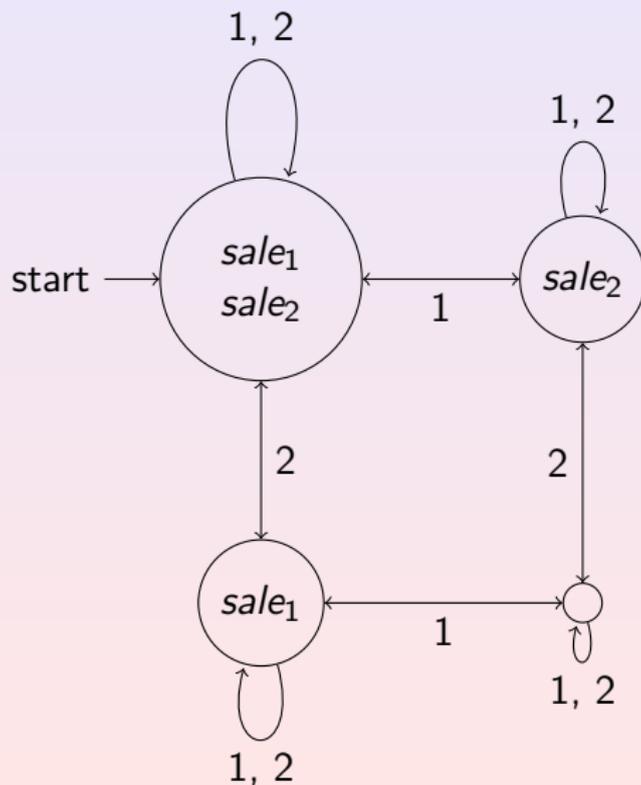
## Condition de vérité

### Definition

Soit  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un modèle de Kripke et  $w \in W$ . On définit la relation  $\mathcal{M}, w \models \varphi$  par induction sur  $\varphi$  :

- $\mathcal{M}, w \models p$  ssi  $p \in V(w)$  ;
- $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$  ssi  $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$  ;
- $\mathcal{M}, w \models (\varphi \wedge \psi)$  ssi  $\mathcal{M}, w \models \varphi$  et  $\mathcal{M}, w \models \psi$  ;
- $\mathcal{M}, w \models K_a\varphi$  ssi pour tout  $u \in R_a(w)$  on a  $\mathcal{M}, u \models \varphi$  ;
- $\mathcal{M}, w \models CK_J\varphi$  ssi pour tout  $u \in (\bigcup_{a \in J} R_a(w))^*$ , on a  $\mathcal{M}, u \models \varphi$ .

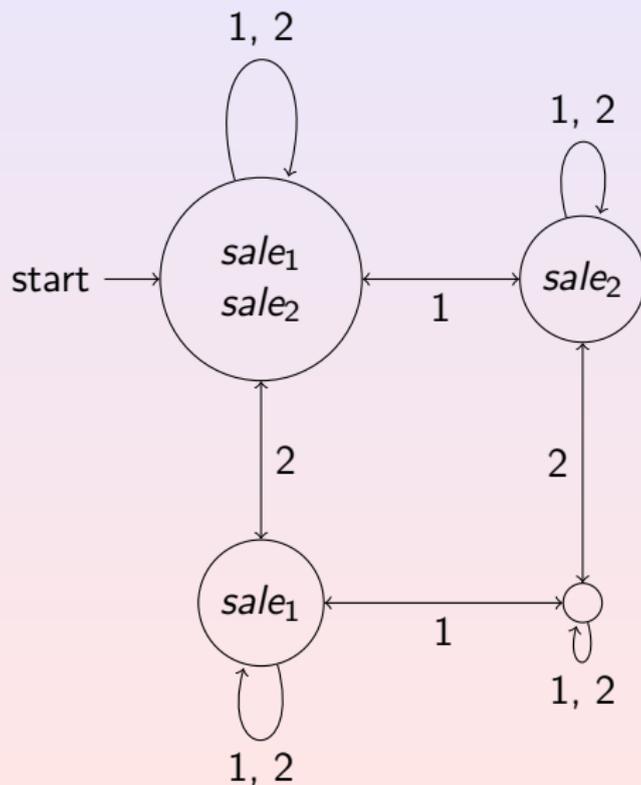
## Modélisation du monde



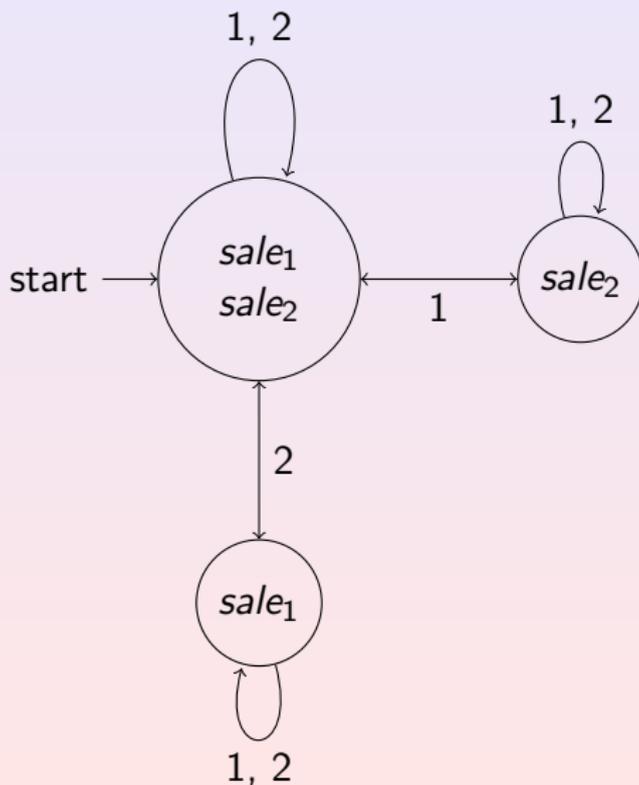
# Outline

- 1 Logique épistémique
  - Syntaxe
  - Sémantique
  - **Annonces publiques**
  - Model checking
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

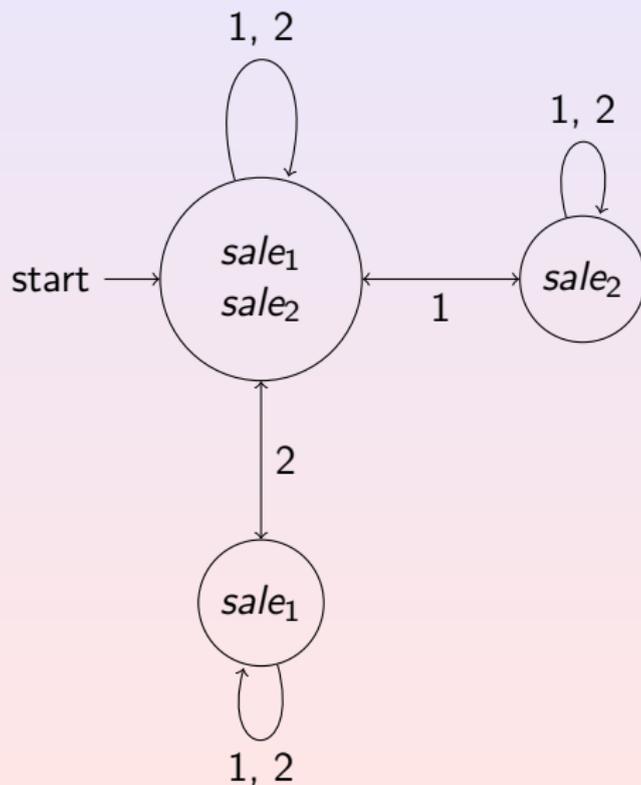
## Apprêtons nous à annoncer $sale_1 \vee sale_2$



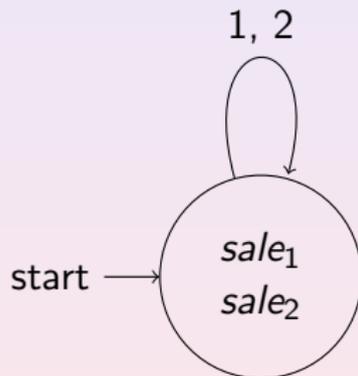
## Après avoir annoncé $sale_1 \vee sale_2$



Apprêtons nous à annoncer  $\neg K_1 \text{sale}_1 \wedge \neg K_2 \text{sale}_2$



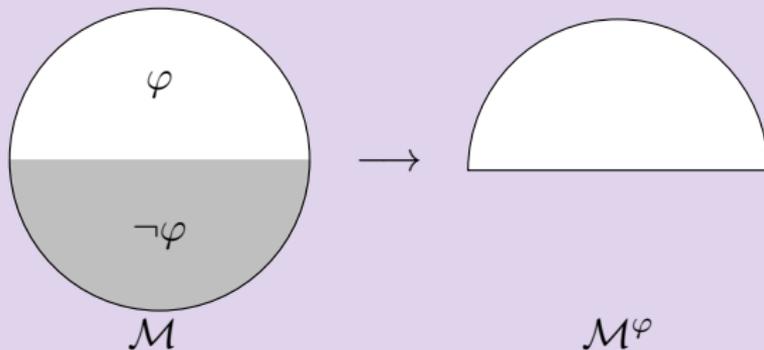
Après avoir annoncé  $\neg K_1 \text{sale}_1 \wedge \neg K_2 \text{sale}_2$



## Annonce publique de $\varphi$

### Restriction par $\varphi$

$\mathcal{M}^\varphi$  est le modèle restreint aux mondes  $u$  tels que  $\mathcal{M}, u \models \varphi$ .



## Annonce publique de $\varphi$

### Definition (Restriction de $\mathcal{M}$ par $\varphi$ )

Soit  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  un modèle épistémique. On définit  $\mathcal{M}^\varphi = (W^\varphi, R^\varphi, V^\varphi)$  où :

- $W^\varphi = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$ ;
- $R_a^\varphi = R_a \cap (W^\varphi \times W^\varphi)$ ;
- $V^\varphi = V|_{W^\varphi}$ .

### Example (Enfants sales)

 $\mathcal{M}$ 
 $\mathcal{M}^{sale_1 \vee sale_2}$ 
 $(\mathcal{M}^{sale_1 \vee sale_2})^{\neg K_1 sale_1 \wedge \neg K_2 sale_2}$

# Outline

- 1 Logique épistémique
  - Syntaxe
  - Sémantique
  - Annonces publiques
  - Model checking
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

# Model checking

## Definition

Le problème du model checking (vérification de modèles) est défini de la manière suivante :

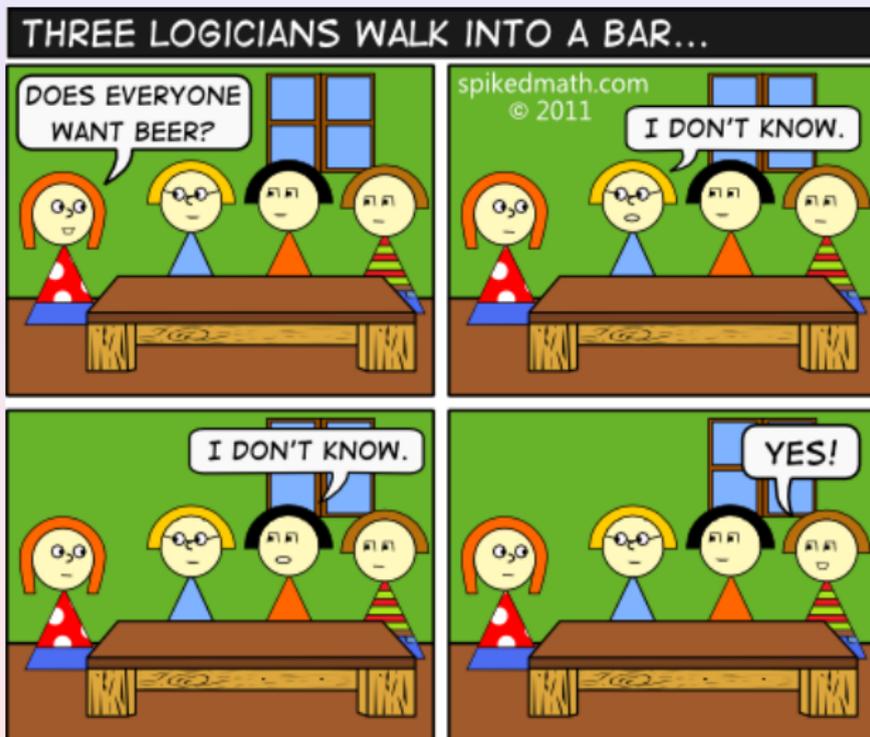
- entrée : un modèle  $\mathcal{M} = (W, R, V)$ ,  $w \in W$ , une formule  $\varphi$  ;
- sortie : oui si  $\mathcal{M}, w \models \varphi$ .

Un model checker est un outil qui permet de faire du model checking.

## Exemple 1 : enfants sales



## Exemple 2 : Trois logiciens dans un bar



## Exemple 3 : Pièce de théâtre avec somme et produit

Père : j'ai choisi deux nombres  $x, y$ , tels que

$$1 < x < y \text{ et } x + y \leq 100.$$

Je vais informer de manière privée  $A$  de  $x + y$ .

Je vais informer  $B$  de  $xy$ .

*(le père s'exécute)*

$B$  : je ne connais pas  $x$  et  $y$ .

$A$  : je le savais.

$B$  : je connais  $x$  et  $y$ .

$A$  : oui, moi aussi.

### Question

Quelles sont les valeurs de  $x$  et  $y$  qui rendent la pièce de théâtre cohérente ?

# Démonstration

Vote! Démonstration de l'exemple 1, 2, ou 3? Tous les exemples?

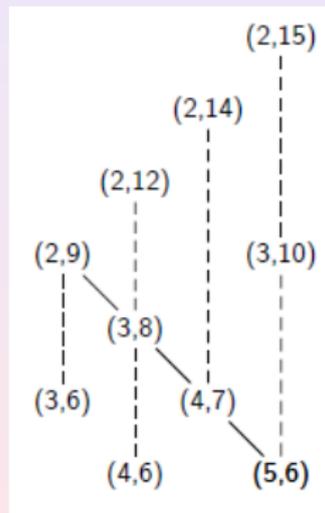
Model checker DEMO

[http://homepages.cwi.nl/~jve/software/demo\\_s5/](http://homepages.cwi.nl/~jve/software/demo_s5/)

Logiciel créé par Jan van Eijck

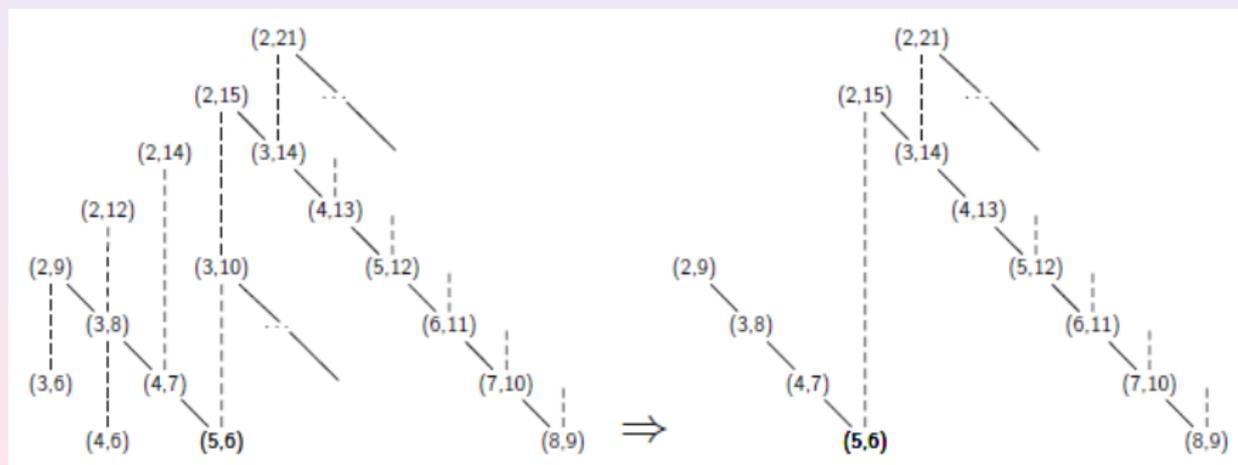
## Morceau du modèle de Kripke

Mondes où la somme vaut 11.

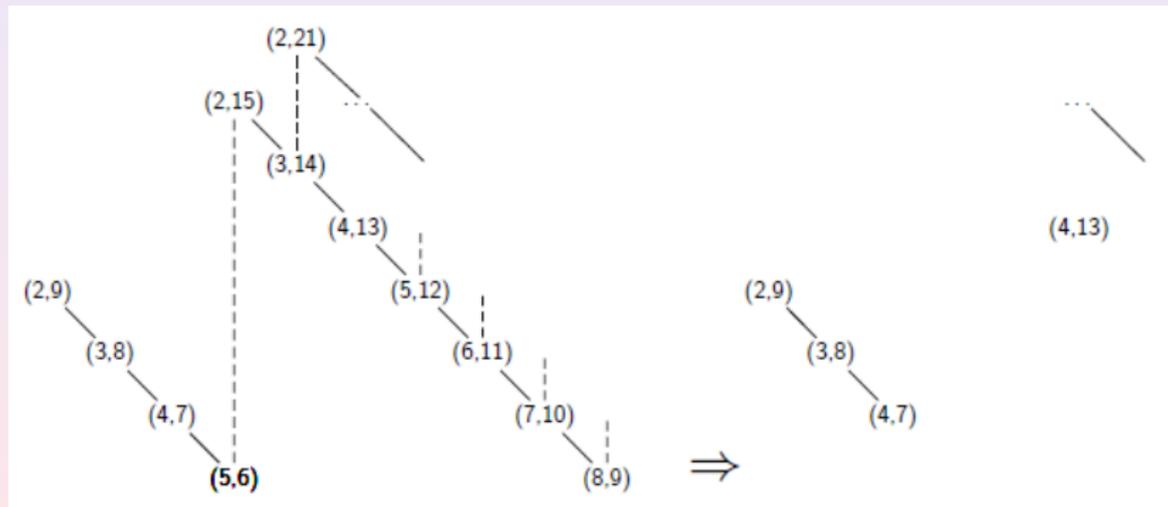


$$\mathcal{M}, (2,9) \models K_S \wedge_{x,y} \neg K_P p_{x,y}$$

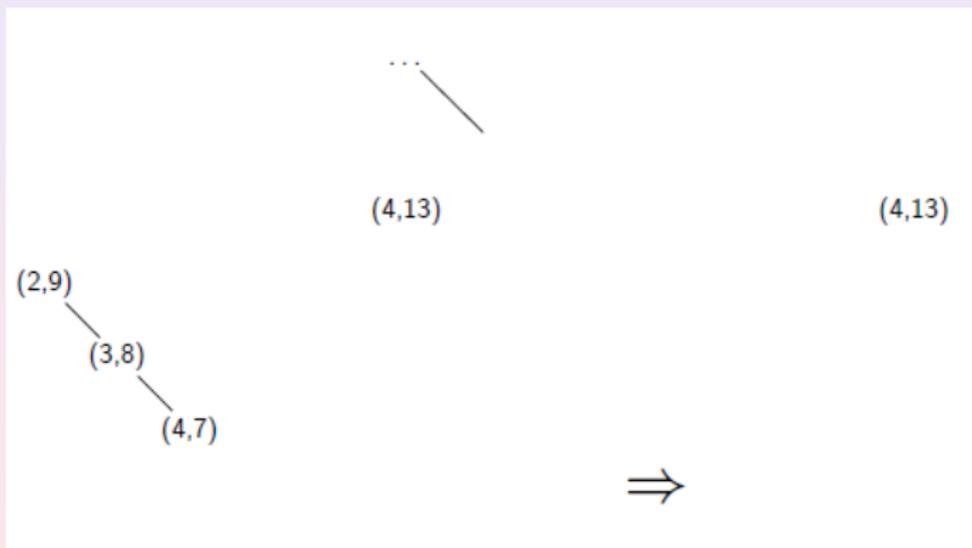
# Annonce publique de $K_S \wedge_{x,y} \neg K_P p_{x,y}$



# Annonce publique de $\bigvee_{x,y} K_{PP} p_{x,y}$



# Annonce publique de $\bigvee_{x,y} Ksp_{x,y}$



# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
  - Validité/Satisfiabilité
  - Algorithme
  - Principes et classes de modèles
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
  - Validité/Satisfiabilité
  - Algorithme
  - Principes et classes de modèles
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

## Validité

Etant donné une formule  $\varphi$ , on cherche à savoir si  $\varphi$  est vraie dans toutes situations (modèles).

### Definition

$\varphi$  est valide ssi pour tout modèle pointé  $\mathcal{M}, w$  on a  $\mathcal{M}, w \models \varphi$ .

### Example

$\varphi := (K_a p \wedge K_a(p \rightarrow q)) \rightarrow K_a q$ .

Méthodologie :

- on cherche un *contre-modèle*, i.e. un modèle pour  $\neg\varphi$ .

## Problème dual : satisfiabilité

### Definition

$\varphi$  est satisfiable ssi il existe un modèle pointé  $\mathcal{M}, w$  on a  $\mathcal{M}, w \models \varphi$ .

### Proposition

$\varphi$  valide si, et seulement si  $\neg\varphi$  n'est pas satisfiable.

## Expressivité

### Theorem

*Il n'existe pas de formule  $\varphi \in \mathcal{L}_K$  telle que  $CK_{\{a,b\}}p \leftrightarrow \varphi$  soit valide.*

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
  - Validité/Satisfiabilité
  - **Algorithme**
  - Principes et classes de modèles
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

## Algorithme pour la satisfiabilité : méthode de tableau

### Méthode de tableau

- Construire un modèle à partir des contraintes imposées par  $\varphi$ .

### Démonstration

Outil : <http://people.irisa.fr/Francois.Schwarzentruber/lotrecscheme/>

Schwarzentruber/lotrecscheme/

Exemple :  $\neg((K_a p \wedge K_a(p \rightarrow q)) \rightarrow K_a q)$ .

## Première tentative de règles pour les connecteurs booléens

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi \quad \psi}$$

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \mid \neg\psi}$$

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

$$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\text{clash}}$$

## Règles pour les connecteurs booléens

$$\frac{(\sigma \ \varphi \wedge \psi)}{(\sigma \ \varphi) \ (\sigma \ \psi)}$$

$$\frac{(\sigma \ \neg(\varphi \wedge \psi))}{(\sigma \ \neg\varphi) \mid (\sigma \ \neg\psi)}$$

$$\frac{(\sigma \ \neg\neg\varphi)}{(\sigma \ \varphi)}$$

$$\frac{(\sigma \ \neg\varphi) \quad (\sigma \ \varphi)}{\textit{clash}}$$

## Règles pour l'opérateur modal

$$\frac{(\sigma \neg K_a \varphi)}{(\sigma \ a \ \sigma_{new})(\sigma_{new} \neg \varphi)} \text{ où } \sigma_{new} \text{ est un nouveau symbole}$$

$$\frac{(\sigma \ K_a \varphi)(\sigma \ a \ \sigma')}{(\sigma' \ \varphi)}$$

# Algorithme

## But

Construire un modèle pour  $\varphi$ .

def tableau( $\varphi$ ) :

- $\Sigma := \{(\sigma_{initial} \quad \varphi)\}$  ;
- Appliquer les règles sur  $\Sigma$  jusqu'à saturation  
(Gérer le backtracking pour les règles non-déterministes)

## Correction de l'algorithme

### Theorem

*Soit  $\varphi$  une formule.*

*$\varphi$  est satisfiable ssi  $\text{tableau}(\varphi)$  réussit.*

### Démonstration.

(idées)

- $\Rightarrow$  On utilise un modèle de  $\varphi$  comme guide pour les choix non déterministes (invariant : les formules présentes sont satisfaites quelque part dans le modèle) ;
- $\Leftarrow$  On extrait un modèle du tableau.



## Propriété

### Theorem

*Si une formule  $\varphi$  est satisfiable*



*elle est satisfiable dans un modèle*

- *qui est un arbre ;*
- *et dont le nombre de noeuds est exponentiel en  $|\varphi|$ .*

### Theorem

*Le problème de validité d'une formule sans connaissance commune est PSPACE-complet.*

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
  - Validité/Satisfiabilité
  - Algorithme
  - Principes et classes de modèles
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

## Problème : notre logique est trop 'libérale'

### Points de vue syntaxique

Auraient dû être valides :

- $K_a\varphi \rightarrow \varphi$ ; vérité
- $K_a\varphi \rightarrow K_aK_a\varphi$ ; introspection positive
- $\neg K_a\varphi \rightarrow K_a\neg K_a\varphi$ . introspection négative

### Points de vue sémantique

Pour tout agent  $a$ , la relation  $R_a$  est a priori toujours une relation d'équivalence.

## Logique $S5_n$

### Systèmes de Clarence Irving Lewis

S1	S2	S3	S4	S5
----	----	----	----	----

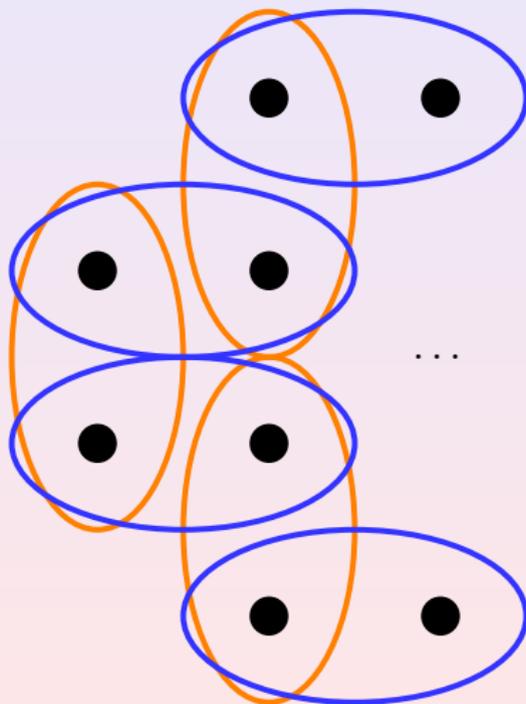
#### Definition

Un modèle  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  est un modèle de  $S5_n$  ssi pour tout agent  $a \in AGT$ ,  $R_a$  est une relation d'équivalence sur  $W$ .

#### Definition

$\varphi$  est  $S5_n$ -valide ssi pour tout modèle pointé  $\mathcal{M}, w$ , si  $\mathcal{M}$  est un  $S5_n$ -modèle, alors  $\mathcal{M}, w \models \varphi$ .

## Vue artistique d'un modèle avec rel. eq. et 2 agents



## Cas avec un agent : S5

### Theorem

*Si  $\varphi$  est satisfiable alors*

*il existe*

- *un modèle  $\mathcal{M} = (W, R, V)$  avec  $\text{card}(W) \leq |\varphi|$*
- *et un monde  $w \in W$*

*tels que  $\mathcal{M}, w \models \varphi$ .*

 [Blackburn et al. Modal logic]

## $S5_n$ -validité

### Theorem

*Le problème de  $S5_n$ -validité d'une formule sans connaissance commune est*

- *coNP-complet s'il y a un agent ;*
- *PSPACE-complet s'il y a plus de 2 agents.*

 [Halpern, Moses, a guide to the modal logics of knowledge and belief, 1996  
(je crois)]

## Avec connaissance commune

### Theorem

*Les problèmes de validité et de S5-validité sont EXPTIME-complets.*

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique**
  - Annonces publiques
  - Evénements complexes
  - Algorithmes
- 4 Conclusion

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique**
  - **Annonces publiques**
  - Evénements complexes
  - Algorithmes
- 4 Conclusion

# Syntaxe

## Definition

L'ensemble  $\mathcal{L}_{K,CK,!}$  des formules de la logique épistémique **avec annonces publiques** est engendré par la grammaire suivante :

$$\varphi, \psi, \dots ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid CK_J\varphi \mid [\varphi!]\psi$$

## Lecture

$[\varphi!]\psi$  : si  $\varphi$  est vraie, alors après avoir annoncé  $\varphi$  publiquement,  $\psi$  est vraie.

## Example

$$[p_1 \vee p_2!][\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 p_2!][\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 p_2!]K_1 p_1 \wedge K_1 p_2$$

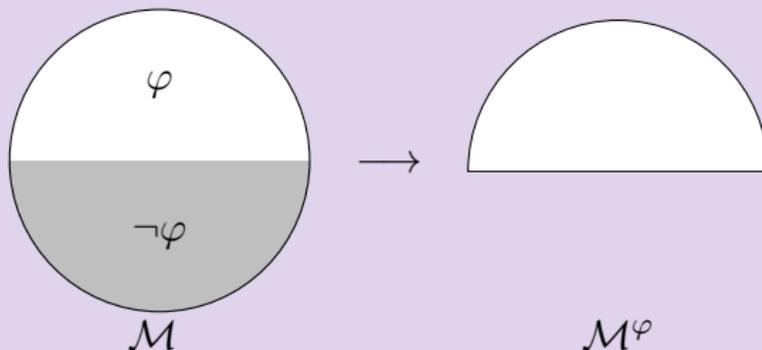
## Sémantique

### Definition

$\mathcal{M}, w \models [\varphi!] \psi$  ssi  $\mathcal{M}, w \models \varphi$  implique  $\mathcal{M}^\varphi, w \models \psi$

### Restriction par $\varphi$

$\mathcal{M}^\varphi$  est le modèle restreint aux mondes  $u$  tels que  $\mathcal{M}, u \models \varphi$ .



## Expressivité

### Proposition

*Sont valides :*

$$\begin{aligned}
 [\varphi!]p & \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p) \\
 [\varphi!](\psi \wedge \chi) & \leftrightarrow ([\varphi!]\psi \wedge [\varphi!]\chi) \\
 [\varphi!](\psi \rightarrow \chi) & \leftrightarrow ([\varphi!]\psi \rightarrow [\varphi!]\chi) \\
 [\varphi!]\neg\psi & \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\varphi!]\psi) \\
 [\varphi!]K_a\psi & \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a[\varphi!]\psi) \\
 [\varphi!][\varphi!]\chi & \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi!]\psi!]\chi
 \end{aligned}$$

### Theorem

*Pour toute formule  $\varphi \in \mathcal{L}_{K,!}$ , il existe une formule  $\psi \in \mathcal{L}_K$  tel que  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$  est valide.*

## Concision

### Theorem

*Il existe une suite de formules  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_{K,!}^{\mathbb{N}}$  telle que :*

- $|\varphi_i| = \Theta(i)$  ;
- *pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , pour toute formule  $\psi \in \mathcal{L}_K$ ,  
si  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$  est valide alors  $|\psi| \geq 2^i$ .*

 [AAMAS 2006, Lutz, Complexity and Succinctness of Public Announcement Logic]

## Exercice

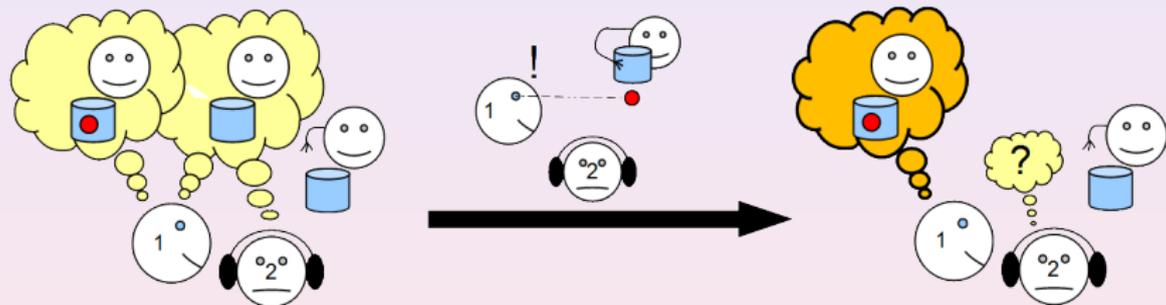
On a vu que  $[\varphi!]K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a[\varphi!]\psi)$  est valide.

Montrer que  $[q!]CK_{\{A,B\}}p \leftrightarrow (q \rightarrow CK_{\{A,B\}}[q!]p)$  n'est pas valide.

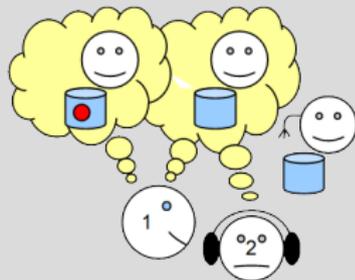
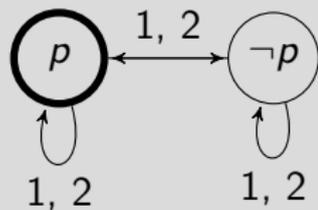
# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique**
  - Annonces publiques
  - Evénements complexes**
  - Algorithmes
- 4 Conclusion

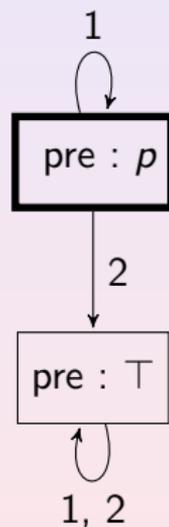
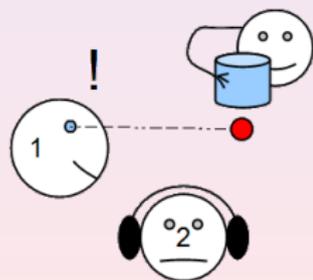
## Notre exemple



## Example



## Modélisation d'un événement



## Modèle d'événements de Kripke

$\mathcal{M}' = (W', R'_1, \dots, R'_n, \text{Pre})$  avec

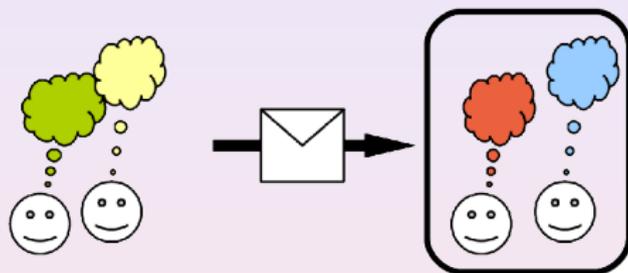
- $W'$  : événements possibles
- $R'_a \subseteq W' \times W'$  : relation pour l'agent  $a$
- $\text{Pre} : W' \rightarrow \mathcal{L}_{K,CK}$  : préconditions

## Modèle mis à jour

Étant donné

$\mathcal{M}$

$\mathcal{M}'$



On définit le modèle mis à jour  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}' = (W^\otimes, R^\otimes, V^\otimes)$  by :

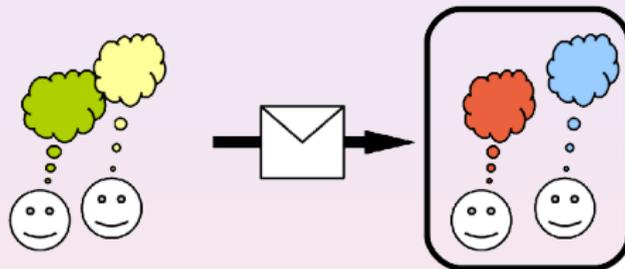
$$\begin{array}{ll}
 (v, v') \in W^\otimes & \text{si } v \in W, v' \in W' \text{ et } \mathcal{M}, v \models \text{Pre}(v') \\
 (v, v') R_i^\otimes (u, u') & \text{si } v R_i u \text{ et } v' R'_i u', \\
 (v, v') \in V^\otimes(p) & \text{si } \mathcal{M}, v \models p.
 \end{array}$$

## Modèle mis à jour pointé

Étant donné

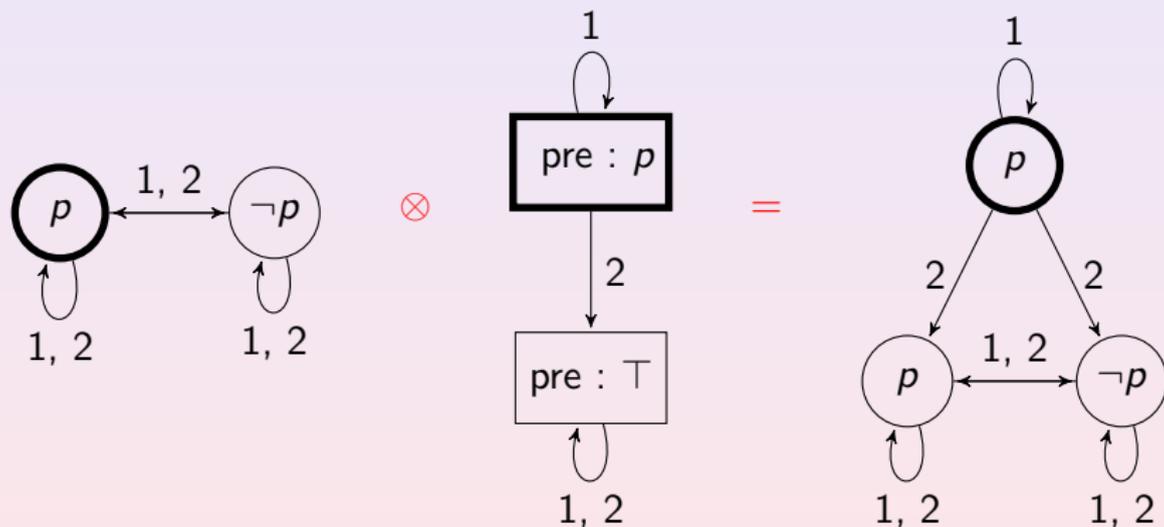
$\mathcal{M}, w$

$\mathcal{M}', w'$



le modèle mis à jour pointé  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}', (w, w')$  est  
défini ssi  $\mathcal{M}, w \models \text{Pre}(w')$

## Exemple



## Langage de la logique épistémique dynamique

- 📄 [Baltag, A., L. S. Moss and S. Solecki, The logic of public announcements, common knowledge and private suspicious]
- 📄 [van Ditmarsch et al. 2007, van der Hoek, Kooi, Dynamic Epistemic Logic]

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid B_j\varphi \mid [\pi]\varphi$$

$$\pi ::= \mathcal{M}', w' \mid \pi \cup \pi$$

### Semantics

- $[\pi]\varphi$  : après l'événement  $\pi$ ,  $\varphi$  est vrai
- $\mathcal{M}, w \models [\mathcal{M}', w']\varphi$  ssi, si  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}', (w, w')$  est défini alors  
 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}', (w, w') \models \varphi$ ;
- $\mathcal{M}, w \models [\pi_1 \cup \pi_2]\varphi$  ssi  $\mathcal{M}, w \models [\pi_1]\varphi$  et  $\mathcal{M}, w \models [\pi_2]\varphi$ .

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
  - Annonces publiques
  - Evénements complexes
  - Algorithmes
- 4 Conclusion

## Problème de validité

### Problème de validité

- Entrée : une formule  $\varphi$  d'un **certain langage** ;
- Sortie : oui, si  $\varphi$  est vraie dans tous les modèles pointés.

$K_i$	PSPACE-complet
Annonces publiques	PSPACE-complet
Annonces arbitraires	indécidable
Annonces publiques + if, while	indécidable
Modèles d'actions	coNEXPTIME-complet
Langages de description de modèles d'actions	$A_{poly}$ EXPTIME-complet ? !

## Problème de planification

### Problème de planification

- Entrée : un modèle pointé  $\mathcal{M}, w$  initial, des événements, une formule  $\varphi_{but}$  ;
- Sortie : une séquence d'événements  $s$  tq.  $\mathcal{M}, w$  mise à jour avec  $s$  satisfait  $\varphi_{but}$ .

Planification 'classique'	PSPACE-complet
Annonces publiques	décidable
Modèles d'action	indécidable
Modèles d'actions (et préconditions booléennes)	décidable
Modèles d'actions (et préconditions de degré modal 1 ? !)	??

# Outline

- 1 Logique épistémique
- 2 Principe de vérité et d'introspection
- 3 Logique épistémique dynamique
- 4 Conclusion

## Résumé

- Syntaxe de la logique modale épistémique
- Sémantique avec des modèles de Kripke
- Comment modéliser une situation statique
- Lien entre condition sur la relation épistémique, vérité et introspections
- Comment modéliser un événement en logique épistémique dynamique

## Conférence sur les systèmes multi-agents



The image shows a banner for the AAMAS 2014 conference. The banner features the text 'AAMAS 2014' in large, stylized letters, with the Eiffel Tower integrated into the letter 'A'. To the right of the text is the UFAAMAS logo, which consists of a stylized sun or flower icon followed by the text 'UFAAMAS'. The background of the banner is a night view of Paris, showing the Eiffel Tower and Notre-Dame de Paris illuminated against a dark sky. Below the banner is a navigation menu with the following items:

- [Home](#)
- [Program new !](#)
  - [Program at a glance](#)
  - [Detailed Program](#)
- [Invited Speakers](#)
  - [Iain D. Couzin](#)
  - [Michael Luck](#)
- [Call for papers](#)
- [Submission instructions](#)
- [Accepted papers](#)
- [Doctoral Symposium](#)
- [Workshops](#)
  - [Accepted workshops](#)
  - [Call for workshops](#)
- [Call for demos](#)

Below the navigation menu is a large graphic with the text 'AAMAS 2014' in large, stylized letters, with the Eiffel Tower integrated into the letter 'A'. Below this graphic is the text 'Paris, France'.

## Conférence sur la logique modale



Home

**Important Dates**

Call For Papers

Paper Submissions

Invited Speakers

Accepted Papers

Program

Registration

Location

Travel and Accommodation

Committees

AiML Series

Sponsors

### Advances in Modal Logic 2014

#### Important Dates

Abstracts and full papers submission deadline: 9 April 2014

Full papers acceptance notification: 19 May 2014

Short presentations submission deadline: 21 May 2014

Short presentations acceptance notification: 2 June 2014

Final version of full papers and short presentations due: 9 June 2014

Conference: 5-8 August, 2014.

## Conférence sur connaissance et rationalité



Home

Poster

Call for Papers

Submission

Important Dates

Accepted Papers

Proceedings

Program

Cultural Events

Invited Speakers

Location

Registration

Participants

### TARK 2013

Fourteenth conference on  
**Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge**

TARK 2013 took place at the [Institute of Mathematical Sciences, Chennai, India](#) on **January 7 - 9, 2013**.

The mission of the [TARK conferences](#) is to bring together researchers from a wide variety of fields, including Artificial Intelligence, Cryptography, Distributed Computing, Economics and Game Theory, Linguistics, Philosophy, and Psychology, in order to further our understanding of interdisciplinary issues involving reasoning about rationality and knowledge.

## Limites pour l'aspect statique

- Omniscience.

*Saviez-vous que la conjecture de Poincaré est vraie ?*

Solution :

- 'Awareness'  [aa];
  - Prise en compte des ressources;
  - Logiques non-normales.
- Mesure quantitative
- Solution :
- Logique épistémique et probabilité  [Halpern ?!]  [Jan van Eijck et al. en soumission...]
  - Théorie de la possibilité

## Limites pour l'aspect dynamique

- Annonces fausses : révision de croyances ;
- Pas de bons langages de spécification d'événements complexes.

 [Ditmarsch et al., LORI2013]

## Problèmes ouverts

- Planification épistémique ;
- Applications ;
- Implémentations efficaces ;
- Algorithmes pour la révision.

## Démonstration avec les 'robots'



Python (avec la bibliothèque *opencv*)

 [Gasquet, Goranko, et al., AAMAS2014]

 [Charrier, Ouchet, et al., AAMAS2014 (demo track)]

## Merci à ...

- Guillaume Aucher
- Philippe Balbiani
- Tristan Charrier
- Hans van Ditmarsch
- Jan van Eijck
- Valentin Goranko
- Andreas Herzig
- Emiliano Lorini
- Bastien Maubert
- Sophie Pinchinat

et merci à vous.

