Dualité en programmation linéaire

François Schwarzentruber

10 février 2021

1 Certificat d'optimalité ?

Exemple 1 Considérons le programme linéaire suivant :

$$\text{maximiser } x_1 + 6x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 200 & (1) \\ x_2 \leq 300 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 400 & (3) \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Question. $(x_1, x_2) = (100, 300)$ est une solution optimale avec un objectif de 1900. Me croyez-vous ?

Réponse.

- On a : (1) + 6(2) donne $x_1 + 6x_2 \leq 200 + 300 \times 6 = 2000$.
- Mieux : 0(1) + 5(2) + 1(3) donne $x_1 + 6x_2 \leq 5 \times 300 + 400 = 1900$. Cela me certifie que 1900 est l'optimum.

Idée de généralisation. S'occuper de minimiser $200y_1 + 300y_2 + 400y_3$ sous la contrainte

$$\underbrace{(y_1 + y_3)x_1 + (y_2 + y_3)x_2}_{\geq x_1 + 6x_2 ?} \leq 200y_1 + 300y_2 + 400y_3$$

Quid de considérer

$$\text{minimiser } 200y_1 + 300y_2 + 400y_3$$
$$\begin{cases} y_1 + y_3 \geq 1 \\ y_2 + y_3 \geq 6 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \qquad ?$$

2 Problème dual

Définition 2 (programme dual) A tout programme linéaire, appelé *programme primal*, on associe un programme linéaire, appelé le *programme dual*, en utilisant cette recette de cuisine :

	Programme primal	Programme dual
Variables	$x_1, \ldots, x_n$	$y_1, \ldots, y_m$
Matrice	A	A^t
Vecteur de droite	b	c
Fonction objectif	**maximiser** $c^t x$	**minimiser** $b^t y$
Constraintes	la i-ème contrainte a $\leq$	$y_i \geq 0$
	la i-ème contrainte a $\geq$	$y_i \leq 0$
	la i-ème contrainte a $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-ème contrainte a $\geq$
	$x_j \leq 0$	j-ème contrainte a $\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	j-ème contrainte a $=$

Proposition 3 Le dual du dual de P est P.

Exercice 4 Donner le programme dual de

$$\text{maximiser } 5x + 3y$$
$$\begin{cases} -5x + 2y \leq 0 \\ x + y \leq 7 \\ x \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

3 Théorèmes de dualité

Considérons un programme primal P et son programme dual D :

Programme primal
maximiser $c^t x$
$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Programme dual
minimiser $b^t y$
$$\begin{cases} A^t y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3.1 Dualité faible

Théorème 5 (de dualité faible) Pour toute solution x de P, pour toute solution y de D, $c^t x \leq b^t y$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} c^t x &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j && \text{par } A^t y \geq c \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i && \text{par } Ax \leq b \end{aligned}$$

■

3.2 Dualité forte

Théorème 6 (de dualité forte) On est dans l'une des quatre situations suivantes :

1. P et D n'admettent pas de solutions ;
2. P est non borné et D n'admet pas de solutions ;
3. P n'admet pas de solutions et D est non borné ;
4. P possède une solution optimale x^*, D possède une solution optimale y^* et $c^t x^* = b^t y^*$.

1. 2. 3. 4.

Démonstration. On se ramène à ces quatre cas via le théorème de dualité faible. Par exemple, le cas P non borné et D possède une solution optimale est impossible. Il ne reste plus qu'à montrer le quatrième cas. Supposons que P possède une solution optimale x^*, montrer que D possède une solution optimale y^* et que $c^t x^* = b^t y^*$.

Exemple 7 Considérons le programme primal suivant :
maximiser $5x + 3y$
$$\begin{cases} -5x + 2y \leq 0 \\ x + y \leq 7 \\ x \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Considérons l'exécution de l'algorithme du simplexe sur le problème primal P. L'algorithme commence par mettre sous forme équationnelle :

$$\text{maximiser } \bar{c}^t\bar{x} \quad \begin{cases} \bar{A}\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{où } \bar{c} = (c, 0, \ldots, 0),\ \bar{A} = (A\ Id_m).$$

Exemple 8 Voici le programme équationnel : $\text{maximiser } 5x + 3y \quad \begin{cases} -5x + 2y + \alpha = 0 \\ x + y + \beta = 7 \\ x + \gamma = 5 \\ x, y, \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \end{cases}$

L'algorithme considère alors le tableau associé, puis exécute des pivotages jusqu'à un tableau final de base B :

$$\text{maximiser } obj + c'^t\bar{x}_N \quad \begin{cases} \bar{x}_B = p - Q\bar{x}_N \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{où les coordonnées du vecteur } c' \text{ sont négatives.}$$

Exemple 9 Le tableau final de base $B = \{x, y, \alpha\}$ est $\text{maximiser } 31 - 2\gamma - 3\beta \quad \begin{cases} x = 5 - \gamma \\ y = 2 + \gamma - \beta \\ \alpha = 21 - 7\gamma + 2\beta \end{cases}$

La solution basique $\bar{x}^*$ de ce dernier tableau est telle que les n premières coordonnées x^* de $\bar{x}^*$ forment une solution optimale du primal. On rappelle que $\bar{x}^*_B = p = \bar{A}_B^{-1}b$ et $\bar{x}^*_N = 0$; aussi $c' = \bar{c}_N - (\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N)^t$; (voir cours sur l'algorithme du simplexe).

Exemple 10 $x^* = (5, 2)$ et $\bar{x}^* = (5, 2, 21, 0, 0)$. $\bar{x}^*_B = (5, 2, 21)$.

$\boxed{\text{Posons } y^* = (\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1})^t.}$

Exemple 11 Ici, $\bar{c}^t_B = (5, 3, 0)$. La matrice $\bar{A}_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Son inverse est $\bar{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. On trouve $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Fait 12 $c^tx^* = b^ty^*$.

Démonstration. $c^tx^* = \bar{c}^t\bar{x}^* = \bar{c}^t_B\bar{x}^*_B + \bar{c}^t_N \underbrace{\bar{x}^*_N}_{0} = \bar{c}^t_B(\bar{A}_B^{-1}b) = (\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1})b = (y^*)^tb = b^ty^*$. ■

Fait 13 y^* est une solution du dual (et donc est une solution minimale).

Démonstration. Il suffit de montrer les conditions de faisabilité $A^ty^* \geq c$ et $y^* \geq 0$, que l'on peut résumer par $\bar{A}^ty^* \geq \bar{c}$. Posons $w := \bar{A}^ty^* = \bar{A}^t(\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1})^t = (\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1}\bar{A})^t$. Regardons maintenant les coordonnées de w selon que c'est une coordonnée dans la base du tableau final ou non :
$w_B = (\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_B)^t = \bar{c}_B$.
$w_N = (\bar{c}^t_B\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N)^t = \bar{c}_N - c' \geq \bar{c}_N$ car c' est un vecteur négatif. ■
■

4 Plus court chemin : dualité et système physique

Vidéo 14 `https://www.youtube.com/watch?v=hnUj2zTsDFI`

Définition 15 **Problème d'un plus court chemin d'une source à une destination**

entrée : graphe $G = (S, A, poids)$ pondéré positivement, deux sommets $s, t \in S$
sortie : le poids d'un plus court chemin depuis s vers t ; $+\infty$ sinon.

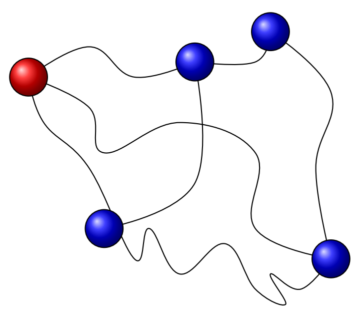
Proposition 16 Le problème d'un plus court chemin d'une source à une destination se réduit à la programmation linéaire réelle. Pour trouver un plus court chemin de s à t dans $G = (S, A, poids)$, on peut résoudre l'un des programmes suivants

Programme primal

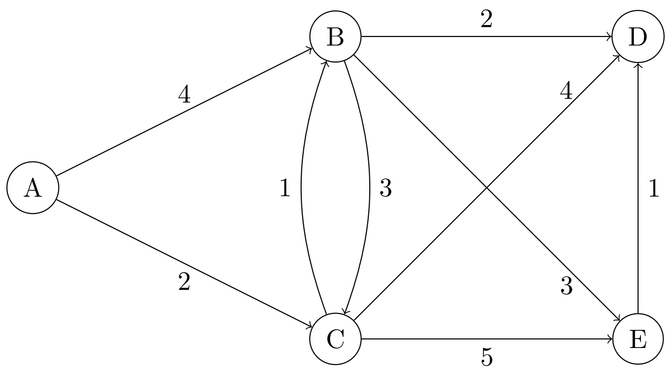
$$\text{minimiser } \sum_{e \in A} x_e poids(e)$$
$$\begin{cases} \sum_{e \text{ partant de } s} x_e - \sum_{e \text{ sortant de } s} x_e & = 1 \\ \sum_{e \text{ partant de } t} x_e - \sum_{e \text{ sortant de } t} x_e & = -1 \\ \sum_{e \text{ partant de } u} x_e - \sum_{e \text{ sortant de } u} x_e & = 0 \text{ pour tout sommet } u \notin \{s, t\} \\ x_e \geq 0 \text{ pour tout arc } e \end{cases}$$

Programme dual

$$\text{maximiser } d_t - d_s$$
$$\begin{cases} d_v - d_u \leqslant poids(u, v) \text{ pour tout arc } u \to v \\ d_u \in \mathbb{R} \text{ pour tout sommet } u \end{cases}$$



Exercice 17 Donner le programme primal et dual sur le graphe suivant avec A comme source et D comme destination :



5 Matrices totalement unimodulaires

Cas où un programme à coefficients entiers admet une solution optimale entière

5.1 Définition

Définition 18 (matrice totalement unimodulaire) Une matrice est totalement unimodulaire si toute sous-matrice (en supprimant quelques lignes et/ou colonnes) carrée est de déterminant -1, 0 ou 1.

Proposition 19 Une matrice totalement unimodulaire ne contient que des -1, 0 ou 1.

Exemple 20 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est totalement unimodulaire.

Exemple 21 $\begin{pmatrix} 42 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas totalement unimodulaires.

5.2 Stabilité par ajout de vecteur unité

Proposition 22 Soit A une matrice totalement unimodulaire. La matrice $\bar{A}$ obtenue en ajoutant un vecteur unité e_i en dernière colonne est aussi totalement unimodulaire.

Démonstration. Calculer le déterminant d'une sous-matrice carrée en faisant un développement de Laplace selon la dernière colonne. ■

Exemple 23 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est totalement unimodulaire.

5.3 Solution optimale entière

Théorème 24 Considérons un programme linéaire

$$\text{maximiser } c^t x \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{où } b \in \mathbb{Z}^m.$$

Si A est totalement unimodulaire, et que le programme admet une solution optimale, alors il admet une solution optimale entière $x^* \in \mathbb{Z}^n$.

Exemple 25 Si $\begin{array}{l} \text{maximiser } x + 3y - 5z \\ \begin{cases} x - y & \leq 30 \\ -x + y + z & \leq 42 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{array}$ est non borné, alors il admet une solution maximale entière.

Démonstration. Étudions l'exécution de l'algorithme du simplexe. Il travaille d'abord sur un programme équationnel où les contraintes sont $\bar{A}\bar{x} = b$ avec $\bar{A} = (A \mid Id_m)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$. L'algorithme du simplexe trouve une base $B \in \{1, \ldots, n+m\}$ telle que la solution basique associée $\bar{x}^*$ soit définie par :

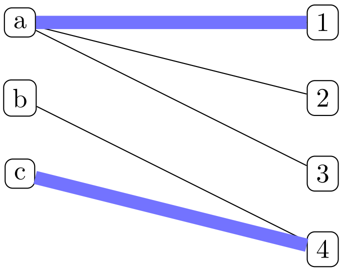
$$\begin{aligned} \bar{x}^*_B &= \bar{A}_B^{-1} b \\ \bar{x}^*_N &= 0 \end{aligned}$$

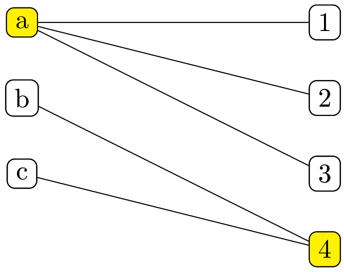
Les coefficients de $\bar{A}_B^{-1}$ s'écrivent, via les **règles de Cramer**, comme des fractions d'entiers avec au dénominateur $det(\bar{A}_B)$. Comme A est totalement unimodulaire, $\bar{A}$ l'est aussi par la proposition 22. Ainsi, $det(\bar{A}_B) \in \{-1, 0, 1\}$ (la valeur 0 est impossible car la matrice est inversible). ■

6 Théorème de König

Théorème 26 Dans un graphe biparti,

$$\text{cardinal d'un couplage maximal} \quad = \quad \text{cardinal d'une couverture minimal de sommets.}$$





Démonstration. Quitte à renommer les objets, on note $\{1, \dots, n\}$ l'ensemble des sommets, et $\{1, \dots, m\}$ l'ensemble des arêtes.

1) Programme linéaire pour le couplage maximal

$$\text{maximiser } \sum_{j=1}^m x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j \text{ incident à } i} x_j \leq 1 \text{ pour tout sommet } i = 1..n \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^m \end{cases}$$

En posant $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ par $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ incident à } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$, ce programme se réécrit en :

$$\text{maximiser } \sum_{j=1}^m x_j$$
$$\begin{cases} Ax \leq 1 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^m \end{cases}$$

2) Programme linéaire pour la couverture minimal

$$\text{minimiser } \sum_{i=1}^n y_i$$
$$\begin{cases} \sum_{j \text{ incident à } i} y_i \geq 1 \text{ pour toute arête } j = 1..m \\ y \geq 0 \\ y \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

que l'on peut réécrire en

$$\text{minimiser } \sum_{i=1}^n y_i$$
$$\begin{cases} A^t y \geq 1 \\ y \geq 0 \\ y \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Si on avait "$\in \mathbb{R}^m$" et "$\in \mathbb{R}^n$" à la place "$\in \mathbb{Z}^m$" et "$\in \mathbb{Z}^n$", les programmes seraient duaux l'un de l'autre et cela conclurait la démonstration. Ici, on ne peut pas conclure car il n'y a pas de théorème de dualité pour la programmation linéaire entière. Mais heureusement, le lemme suivant conclut la démonstration !

Lemme 27 A est totalement unimodulaire.

Démonstration. On pose

$$\mathcal{P}(\ell) : \text{le déterminant de toute sous-matrice de taille } \ell \times \ell \text{ de } A \text{ est dans } \{-1, 0, 1\}.$$

que l'on va démontrer par récurrence. Le cas de base $\mathcal{P}(1)$ est ok par définition de A. Supposons que $\mathcal{P}(\ell - 1)$. Montrons $\mathcal{P}(\ell)$. Considérons une sous-matrice Q de taille $\ell \times \ell$. Par définition de A, chaque colonne de A contient deux 1 (car une arête est incidente à deux sommets). Ainsi, chaque colonne de Q contient au plus deux 1. S'il y a une colonne avec que des 0, $\det(Q) = 0$. S'il y a une colonne avec un seul 1, on se ramène, à signe près, au calcul du déterminant d'une sous-matrice de A de taille $(\ell - 1) \times (\ell - 1)$, qui est par récurrence de déterminant dans $\{-1, 0, 1\}$. Enfin, toutes les colonnes de Q contiennent deux 1, alors on montre que $det(Q) = 0$. Cela est dû au fait que le graphe est biparti. En effet, les lignes sont dépendantes : en notant (S_1, S_2) la partition de l'ensemble des sommets du graphe biparti, on a :

1. en sommant toutes les lignes correspondant aux sommets dans S_1, on obtient le vecteur $(1, \dots, 1)$;
2. idem en sommant les lignes correspondant aux sommets dans S_2, on obtient aussi le vecteur $(1, \dots, 1)$.

■ ■

7 Correspondance entre solutions primal/dual

7.1 Coefficients magiques

Théorème 28 On obtient une solution optimale y^* du problème dual en prenant le vecteur contenant les opposés des coefficients dans c' des variables d'écart α, β, γ, dans la fonction objectif du tableau final de l'exécution du simplexe dans le problème primal.

DÉMONSTRATION. Considérons une variable d'écart i. La i-ème colonne de la matrice $\bar{A}$ que l'on note $\bar{A}_i$ est le i-ème vecteur unité. On a alors l'égalité $w_{Ni} = (\bar{c}_B^t \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_i)^t = y_i^*$. Maintenant, si une variable d'écart i est dans B, alors $w_{Ni} = \bar{c}_i = 0$. Si une variable d'écart i est dans N, alors $w_{Ni} = 0 - c'_i = -c'_i$. ■

7.2 Théorème des écarts complémentaires

Théorème 29 Soit x une solution du primal et y une solution du dual. On a que x et y sont solutions optimales de leurs programmes respectifs ssi on a les deux points :

1. Pour tout i, $y_i \times (b_i - \sum_j a_{ij} x_j) = 0$;
2. Pour tout j, $x_j \times (\sum_i a_{ij} y_i - c_j) = 0$.

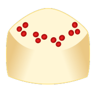
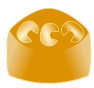
DÉMONSTRATION.

$$\begin{gathered}
x \text{ et } y \text{ solutions optimales de leurs programmes respectifs} \\
\Updownarrow \\
c^t x = b^t y \text{ (dualité forte)} \\
\Updownarrow \\
c^t x = y^t A x = b^t y \text{ (voir démo du th. de dualité faible)} \\
\Updownarrow \\
(c^t - y^t A)^t x = 0 \text{ et } y^t (b - Ax) = 0 \text{ (réécriture algébrique)} \\
\Updownarrow \\
\text{points 1 et 2} \\
\text{(car les coordonnées des vecteurs sont positives et } \textstyle\sum \text{ nombres positifs} = 0 \text{ implique que ces nombres} = 0)
\end{gathered}$$

■

8 Exercices

Exercice 30 (pâtisserie)

On considère le programme primal suivant :
maximiser profit

$$\begin{cases} \text{pas plus de 200 pommes} \\ \text{pas plus de 3 poires} \\ \text{pas plus de 4kg de chocolat} \\ \text{pas plus de 40kg de farine} \\ \text{pas plus de 5kg d'amande.} \end{cases}$$

x_i = nb de gâteau du type i

maximiser $x_1 + 6x_2 + 13x_3$

$$\begin{cases} x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 3 \\ x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Donner le programme dual et discuter d'une interprétation économique.

Exercice 31 Reformuler le théorème max-flow-min-cut comme une application du théorème de la dualité forte.

Exercice 32 Redémontrer le théorème de König en utilisant le théorème max-flow-min-cut.

Exercice 33 Démontrer la proposition 16.

Notes bibliographiques

La dualité est évoquée dans [DPV08] et [CLRS09]. L'explication avec le certificat provient de [DPV08]. Les démonstrations et les applications proviennent essentiellement de [GM07].

Références

[CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, 3rd Edition.* MIT Press, 2009.

[DPV08] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh V. Vazirani. *Algorithms.* McGraw-Hill, 2008.

[GM07] Bernd Gärtner and Jirí Matousek. *Understanding and using linear programming.* Universitext. Springer, 2007.