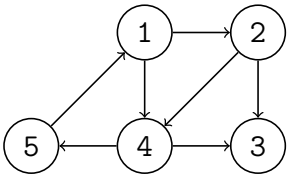
Graphes

6 décembre 2013

Exercice 1 — Algorithme de Kosaraju

1. Appliquer l'algorithme de Kosaraju au graphe suivant :



Exercice 2 — Fermeture réflexive et transitive

[source : Handbook of Computer Science, Algorithms and complexity]

1. Soit un graphe orienté $G = (S, A)$ représentée par des listes d'adjacence. Supposons que les sommets sont $S = \{1, \ldots, n\}$. Montrer comment trier les listes d'adjacence par ordre croissant en temps $O(|S| + |A|)$?

Considérons un graphe orienté acyclique $G = (S, A)$. L'objectif est de calculer la clôture réflexive et transitive $G^* = (S, A^*)$ de G.

2. En utilisant un tri topologique, et en supposant que les listes d'adjacence sont triées par ordre croisant, écrire un algorithme qui calcule $A^*(i)$ pour $i = n$ jusqu'à 1. Pour chaque i, on parcourt la liste $A(i)$.

Soit $G^- = (S, A^-)$ le graphe appelée réduction transitive obtenue à partir de G et en supprimant tout arc $x \to y$ s'il existe un chemin non direct de x à y.

3. Adapter l'algorithme et prouver que sa complexité temporelle est en $O(|S||A^-| + |S| + |A|)$.

Après, considérons un graphe orienté $G = (S, A)$ qui peut éventuellement contenir des cycles. L'objectif est de calculer la clôture réflexive et transitive $G^* = (S, A^*)$ de G.

4. Montrer que l'on peut calculer la cloture reflexive et transitive en $O(|S| + |A^*| + |S_C||E_C^-|)$ où le graphe quotient des composantes fortement connexes est $G_C = (S_C, E_C)$ et où E_C^- est l'ensemble des arcs dans la réduction transitive de G_C.

`Exercice 3` `2-SAT`

Le problème 3-SAT est NP-complet. Dans cet exercice, nous allons montrer que si on se restreint aux formules qui sont des *formes normales conjonctives* d'ordre 2, comme par exemple $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge \ldots$ alors le problème de satisfiabilité est dans P.

On définit le problème 2-SAT de la manière suivante :

entrée : une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ sous formule normale conjonctive d'ordre 2
sortie : oui ssi il existe une valuation pour $x_1 \ldots x_n$ qui rende ϕ vraie

1. En observant que la formule $x \vee y$ est équivalente à $\neg x \to y$, donner un problème équivalent sur les graphes orientés résoluble en temps polynomial.

2. Conclure.

`Exercice 4` `chemin eulérien`

1. Écrire un algorithme qui calcule un chemin eulérien dans un graphe orienté s'il en existe un.

`Exercice 5` `Composantes 2-connexes`

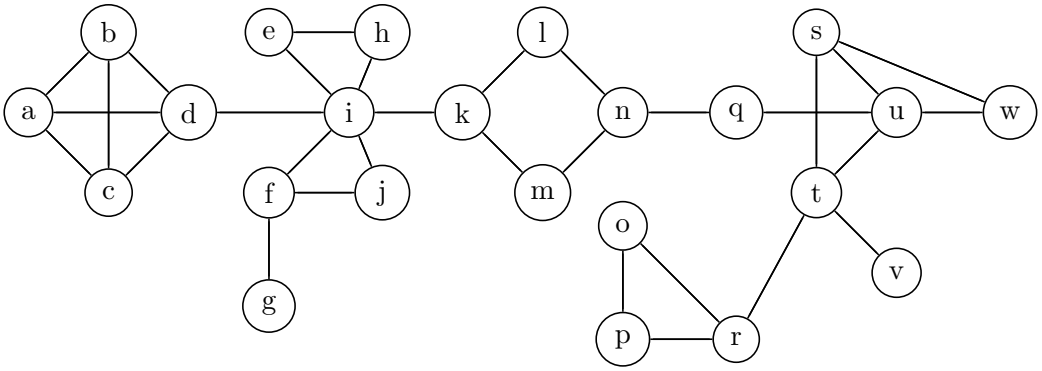
[Source : Cormen, p. 574]

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe. Dans G :

- un *point d'articulation* est un sommet dont la suppression déconnecte le graphe ;
- un *isthme* est une arrête dont la suppression déconnecte le graphe ;
- une *composante 2-connexe* est un ensemble maximal connexe de sommets tel que le sous-graphe induit par ces sommets n'a pas de point d'articulation.

On notera $T = (V, F)$ un arbre de parcours de G obtenu par parcours en profondeur et $deb(v)$ le début de visite de v dans la numérotation associée à ce parcours en profondeur.

1. Sur l'exemple ci-dessous, déterminer les points d'articulation, les isthmes et les composantes 2-connexes.



2. Expliquer pourquoi dans le parcours en profondeur d'un graphe non orienté et connexe on n'obtient que deux sortes d'arcs : les arcs de l'arbre et les arcs retour.

3. Montrer que la racine de T est un point d'articulation si et seulement si elle a au moins deux fils dans T.

Dans la suite, on dira que x est descendant de y pour dire que x est descendant de y dans T. Par convention, « descendant » est pris au sens large : on a aussi x est un descendant de x.

4. Soit x un sommet de T distinct de la racine. Prouver que x est un point d'articulation si et seulement s'il existe un fils y de x dans l'arbre tel qu'il n'existe pas d'arc retour de la forme (z, t) où z est un descendant de y et t est un ancêtre propre de x.

On définit la fonction *auDessous*, de V dans $\mathbb{N}$ par

$$auDessous(x) = min(\{deb(x)\} \cup A(x))$$

où $A(x) = \{deb(z) \mid (y, z)$ est un arc retour avec y descendant de $x\})$.

5. Donner un algorithme en $O(|V|+|E|)$ de calcul de la fonction *auDessous*.

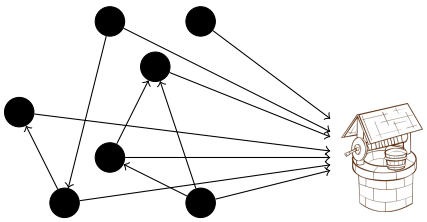
6. Montrer comment calculer les points d'articulation en $O(|V| + |E|)$.

7. Prouver qu'une arête est un isthme si et seulement si elle n'appartient à aucun cycle élémentaire.

8. Montrer comment calculer les isthmes en $O(|V| + |E|)$.

9. Considérer le graphe H dont les sommets sont les composantes 2-connexes de G et tel que deux composantes sont adjacentes si et seulement si elles ont au moins un sommet en commun. Que pouvez vous dire de ce graphe ?

`Exercice 6` `Puits dans un graphe`



On considère un graphe orienté $G = (S, A)$ où les arcs sont décrits à l'aide d'une matrice d'adjacence $A = (A_{i,j})_{i,j \in S}$. On suppose que $A_{i,i} = 0$ pour tout $i \in S$. Un puits est un sommet $s \in S$ ssi $\sum_{t \in S} A_{t,s} = n - 1$ et $\sum_{t \in S} A_{s,t} = 0$.

On souhaite vérifier qu'un tel graphe possède un puits, et si oui, le donner.

1. Ecrire un algorithme en $O(|S|)$ qui donne le puits d'un graphe G si G possède un puits et qui retourne $\square$ sinon. (indice : qu'apprend-on de la valeur de $A_{i,j}$?)

On suppose que $A_{i,j}A_{j,i} = 0$ pour tout $i, j \in S$. Malheureusement, le graphe est stockée sur un serveur trèèèès lent et on dispose une instruction $telecharger(i, j)$ qui donne la valeur de $A[i, j]$.

2. Montrer qu'il existe un algorithme où il y a au plus $3n - \lceil \log_2 n \rceil - 3$ appels à *telecharger*. (faites un tournoi avec 'i bat j' quand $A[i, j] = 0$)

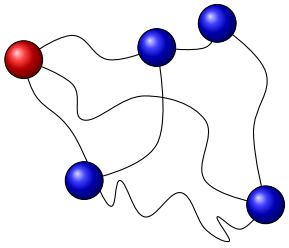
[source : Handbook of Computer Science, Algorithms and complexity, p. 534]

`Exercice 7` `caractérisation des arbres`

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre (i.e. connexe et acyclique) ;
2. Deux sommets quelconques de G sont reliés par une chaîne simple unique ;
3. G est connexe mais, si l'on enlève une arête, le graphe résultant n'est plus connexe ;
4. G connexe et $|A| = |S| - 1$;
5. G acyclique et $|A| = |S| - 1$;
6. G est acyclique mais, si l'on ajoute une arête, le graphe résultant contient un cycle.

`Exercice 8`



Considérons le problème des plus courts chemins à partir d'une source :
entrée : un graphe pondéré positivement $G = (S, p)$ et un sommet s ;
sortie : $(\delta_t)_{t\in S}$ où δ_t est la distance d'un plus court chemin de s vers t ou $+\infty$ si il n'y a pas de chemin de s vers t

À une instance G, s du problème des plus court chemins à partir d'une source, on considère l'instance de programmation linéaire suivante :

maximiser $\sum_{t\in S} d_t$
sous les contraintes :
— $d_s = 0$;
— $d_v \leqslant d_t + p(t, v)$ pour tout $t, v \in S$.

1. Montrer qu'une solution $(d_t)_{t\in S}$ du programme linéaire est telle que $\delta_t = d_t$ pour tout $t \in S$.

`Exercice 9` `Des probabilités pour montrer l'existence !`

On considère un graphe non orienté $G = (S, A)$. On appelle coupe une partition (S_1, S_2) de l'ensemble des sommets S. La taille de la coupe (S_1, S_2) est le nombre d'arêtes qui relient un sommet de S_1 à un sommet de S_2.

On s'intéresse au problème de la coupe maximale

entrée : un graphe non orienté G
sortie : la taille maximum d'une coupe

Le problème de décision associé est NP-complet (admis). On s'intéresse ici à écrire un algorithme qui calcule une coupe de taille $\geq \frac{|A|}{2}$.

1. Écrire un algorithme 'naïf' qui parcourt les sommets un à un et qui les met avec une probabilité $\frac{1}{2}$ dans S_1 et sinon dans S_2.

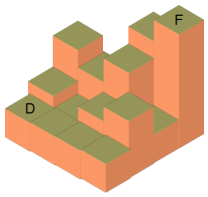
2. En calculant l'espérance de la taille de coupe, montrer qu'il existe une coupe de taille $\geq \frac{|A|}{2}$.

3. Écrire l'algorithme qui maximise l'espérance à chaque fois.

`Exercice 10`

[SWERC 2013]

Considérons une pièce dont les cases de la pièce est $\{1, \ldots, M\}^2$. Link se trouve en $(1, 1)$. La hauteur de la case (x, y) est $h_{x,y}$. Le but de Link est d'arriver en (M, M). Link ne peut aller sur une case voisine (en haut, en bas, à gauche ou à droite) uniquement si la différence des hauteurs des cases est de -1, 0 ou 1.



Malheureusement, les cases d'une hauteur trop basse sont empoisonnées et Link meurt. Soit π un chemin. On note $h(\pi)$ la hauteur minimale des cases qui composent le chemin π.

1. Donner un algorithme pour résoudre le problème suivant : calculer un chemin π tel que $h(\pi)$ est maximal.

2. Entraîner vous à le programmer dans un des langages proposés à l'agrégation.