licence STS mention informatique

parcours recherche et innovation

2013–2014

LOGIQUE

examen final

Durée 2 h. Notes de cours et de TD autorisées. Les quatre parties sont indépendantes.

Remarque : la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction, à la rigueur et la précision des argumentations.

I Question de cours (1 page maximum)

Quels sont les ingrédients principaux d'une logique ? Détaillez-les, en mettant en évidence les liens entre eux, et en illustrant vos propos par des exemples.

II Interprétations tri-valuées et déduction

On se donne un ensemble $\{0, 1, 2\}$ et une nouvelle interprétation du connecteur $\Rightarrow$ sur cet ensemble, fournie par la table de vérité suivante.

$[\![\Rightarrow]\!]_2$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

1. Montrer qu'on a $[\![\varphi]\!]_2 = 2$ pour tout théorème $\vdash \varphi$ de la logique dont les axiomes sont

$$\begin{array}{ll} K & \vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p \\ S & \vdash (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r \end{array}$$

   et la règle

$$MP \quad \frac{\vdash p \Rightarrow q \quad \vdash p}{\vdash q}$$

2. Trouver une interprétation pour p et q telle que

$$[\![((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p]\!]_2 = 1$$

3. Qu'en concluez-vous ?

III Résolution

Soient P, Q, U, W des prédicats unaires, S un prédicat binaire. Montrer par la méthode de résolution que F est conséquence de $\{F_1, F_2, F_3\}$.

$$\begin{array}{ll} F_1 & = \forall x\ ((U(x) \wedge \neg W(x)) \Rightarrow \exists y\ (S(x,y) \wedge Q(y))) \\ F_2 & = \exists x\ (P(x) \wedge U(x) \wedge \forall y(S(x,y) \Rightarrow P(y))) \\ F_3 & = \forall x\ (P(x) \Rightarrow \neg W(x)) \\ F & = \exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \end{array}$$

IV Modèles

On considère le langage du premier ordre L qui contient un seul symbole de prédicat binaire R, et aucun symbole de fonction. On note ϕ_0 l'ensemble des formules sans quantificateur construites sur $\mathcal{L}$. On admettra sans démonstration la propriété suivante : $\mathcal{M} \models \varphi$ si et seulement si la forme skolémisée φ_{Sk} de φ a un modèle dont le domaine est le même que celui de $\mathcal{M}$.

1. Soit $\phi_1 = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \varphi \mid \varphi \in \phi_0, VarLibres(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}\}$. Montrez que si $\varphi \in \phi_1$ est satisfiable, alors φ a un modèle fini.
2. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Donnez une formule φ_k de ϕ_1 qui est satisfiable et qui n'a pas de modèle de cardinal inférieur ou égal à k. Justifiez votre réponse.
3. Soit φ la formule

   $$\exists x \forall y \exists z\ \neg R(y,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,z)$$

   Montrez que φ n'a pas de modèle de cardinal inférieur ou égal à 2. Donnez un modèle de φ de cardinal 3.
4. Donnez une formule ψ de la forme

   $$\exists x \forall y \exists z \forall y_1, \ldots, y_m \psi_0$$

   où $\psi_0 \in \phi_0$, $VarLibres(\psi_0) \subseteq \{x, y, z, y_1, \ldots, y_m\}$, telle que ψ est satisfiable et n'a pas de modèle fini. Justifiez votre réponse.

V Réécriture

Calculer les paires critiques du système de réécriture suivant.

$$x * (y * z) \rightarrow (x * y) * z \tag{1}$$

$$x * x \rightarrow x \tag{2}$$