Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Syntaxe du 1er ordre)

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de symboles de fonctions $\{0(0), +(2), \mathrm{succ}(1)\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble de symboles de prédicats $\{=(2)\}$. Soit x, y et z des variables de $\mathcal{X}$. Pour chaque expression suivante, dire si c'est une formule sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{X}$. Le cas échéant, la représenter sous forme d'arbre (où les feuilles sont les formules atomiques).

1. $\forall x\ (0 + \mathrm{succ}(x) = x)$
2. $\forall x\ (x \Rightarrow x \vee y)$
3. $\forall x\ (\mathrm{succ}(x) + y = \mathrm{succ}(x + y))$
4. $\forall x\ (\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y) \Rightarrow x = \mathrm{succ}(y))$
5. $\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ (x = \mathrm{succ}(y)))$
6. $\forall x\ (\neg\, \mathrm{succ}(x) = 0)$
7. $\forall x\ (\neg\, \mathrm{succ}(x) \Rightarrow x = 0)$
8. $\forall x \forall y \exists z\ (x + z = y)$

Exercice 2 (Sémantique du 1er ordre)
On considère le même ensemble de symboles de fonctions qu'à l'exercice précédent. On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble de symboles de prédicats $\{=(2), R(2)\}$. Pour cet exercice, on se restreint aux structures où l'égalité est interprétée naturellement.

1. Est-ce que $\exists x, \forall y, x = y$ est satisfiable ?
2. Est-ce que $\exists x, \forall y, R(x, y)$ et $\forall y, \exists x, R(x, y)$ sont équivalentes ?
3. Est-ce que $\exists x, \top$ est valide ?
4. Est-ce que $\mathrm{succ}(0) + 0 = \mathrm{succ}(0)$ est valide ?
5. Est-ce que $\mathrm{succ}(0) + \mathrm{succ}(0) = \mathrm{succ}(0) + \mathrm{succ}(0)$ est valide ?

Exercice 3 (Formule du buveur)
Le paradoxe du buveur s'énonce ainsi :

> Dans tout bar (non vide) il existe un client, appelé le buveur, tel que si le buveur boit tout le monde boit.

Cet énoncé vous semble-t-il valide ? Formaliser en logique du premier ordre et justifier.

Exercice 4 (Axiomes de l'égalité)

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}$ contient le symbole $=$ d'arité 2. On cherche à définir un ensemble de formules $\mathcal{A}_{eq}$ (les axiomes de l'égalité) tel que pour tout modèle de $\mathcal{A}_{eq}$, on puisse toujours se ramener à un modèle qui interprète le symbole $=$ comme l'égalité usuelle. On dit qu'une structure $\mathcal{S}$ est égalitaire si $=_\mathcal{S}$ est l'égalité sur le domaine de $\mathcal{S}$.

1. Donner un ensemble de formules E tel que pour tout modèle $\mathcal{S}$ de E, $=_\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner un ensemble de formules E' tel que pour tout modèle $\mathcal{S}$ de E', $=_\mathcal{S}$ est compatible avec les fonctions $f_\mathcal{S}$ et les relations $P_\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$.

Soit $\mathcal{S}$ un modèle de $\mathcal{A}_{eq}$. La relation $=_\mathcal{S}$ est donc une relation d'équivalence ; on note $[e]$ la classe d'équivalence de $e \in D_\mathcal{S}$ pour cette relation. On construit $\mathcal{S}'$ comme suit :

— $D_{\mathcal{S}'} = D_\mathcal{S}/{=_\mathcal{S}}$, l'ensemble des classes d'équivalences ;
— pour tout symbole de fonction, $f_{\mathcal{S}'}([e_1], \ldots, [e_n]) = f_\mathcal{S}(e_1, \ldots, e_n)$;
— pour tout symbole de prédicat, $([e_1], \ldots, [e_n]) \in P_{\mathcal{S}'}$ ssi $(e_1, \ldots, e_n) \in P_\mathcal{S}$.

3. Justifier en quoi cela définit bien une unique structure.
4. Pour tout $\sigma : \mathcal{X} \to D_\mathcal{S}$ on note $[\sigma]$ l'assignation $x \mapsto [\sigma(x)]$. Montrer qu'on a, pour tous σ et ϕ :

$$\mathcal{S}, \sigma \models \phi \text{ ssi } \mathcal{S}', [\sigma] \models \phi$$

5. En déduire qu'une formule est satisfaite dans tous les modèles de la théorie de l'égalité ssi elle est satisfaite dans toutes les structures égalitaires.