Logique

Stanislas Riou

Exercice 1 (Preuves sans détour dans NM_0)
On s'intéresse dans cet exercice à la déduction naturelle minimale. On se retreint à des formules utilisant uniquement l'implication. Le but est de montrer que dans une dérivation sans détour de $\Gamma \vdash \phi$, on ne rencontre que des sous-formules de $\Gamma \cup \phi$.

1. Donner un contre-exemple si l'on retire l'hypothèse d'une preuve sans détour.
2. Montrer que si la dérivation termine par un axiome ou une élimination, toutes les formules apparaissant sont sous-formules de Γ, et que sinon les formules de la dérivation sont sous-formules des formules du séquent conclusion (antécédent ou succédent).
3. (bonus) Que se passe-t-il si on ne se restreint plus à l'implication ?

Exercice 2 (Élimination de coupures)
On considère la règle *multicut*

$$\frac{\Gamma \vdash \psi \quad \Delta, \psi^n \vdash \phi}{\Gamma, \Delta \vdash \phi}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et Δ, ψ^n est le multi-ensemble Δ auquel n occurences de ψ ont été ajoutées. La règle multicut est une généralisation de la règle cut. Pour le reste de cet exercice, on considère le système LJ_0 contenant la règle multicut au lieu de la règle cut. On cherche à montrer que la règle (multi)cut n'est pas indispensable.

1. Étant donné deux dérivations sans règle (multi)cut

$$\frac{\Pi}{\Gamma \vdash \psi} \qquad \frac{\Pi'}{\Delta, \psi^n \vdash \phi}$$

on peut leur appliquer la règle multicut pour conclure $\Gamma, \Delta \vdash \phi$. Montrer qu'on peut toujours transformer une telle dérivation en une dérivation sans utilisation de la règle multicut.

Indices :

a) Procéder par induction structurelle sur ψ suivie par une induction sur la somme des hauteurs de Π and Π'.

b) Traiter en premier les cas où les deux sous-dérivations ne commencent pas par une règle logique sur la formule coupée.

   c) Dans un premier temps considérer uniquement le connecteur logique $\Rightarrow$, puis ajouter les autres un par un.

2. Conclure.

Exercice 3 (Non-non-traduction)
Étant donnée une formule ϕ, on définit sa traduction de Gödel (ou non-non-traduction) par induction structurelle sur ϕ :

— si ϕ est atomique, $\mathcal{G}(\phi) = \neg\neg\phi$
— $\mathcal{G}(\top) = \top$
— $\mathcal{G}(\bot) = \bot$
— $\mathcal{G}(\neg\psi) = \neg\mathcal{G}(\psi)$
— $\mathcal{G}(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathcal{G}(\phi_1) \wedge \mathcal{G}(\phi_2)$
— $\mathcal{G}(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg\neg(\mathcal{G}(\phi_1) \vee \mathcal{G}(\phi_2))$
— $\mathcal{G}(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) = \mathcal{G}(\phi_1) \Rightarrow \mathcal{G}(\phi_2)$

Si Γ est un ensemble de formules, on écrit $\mathcal{G}(\Gamma)$ l'ensemble $\{\mathcal{G}(\phi) \mid \phi \in \Gamma\}$. Le but de l'exercie est de prouver que $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi$ (i.e. $\Gamma \vdash \phi$ en déduction naturelle classique) ssi $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{NJ}_0} \mathcal{G}(\phi)$ (i.e. $\Gamma \vdash \phi$ en déduction naturelle intuitioniste).

1. Montrer que pour toute formule ϕ, $\vdash_{\mathrm{NJ}_0} \neg\neg\mathcal{G}(\phi) \Rightarrow \mathcal{G}(\phi)$. Traiter au moins les cas $\bot$; $\neg$; $\wedge$.
2. Montrer que pour toute formule ϕ, si $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi$ alors $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{NJ}_0} \mathcal{G}(\phi)$. Traiter au moins les cas : introduction de $\wedge$ et $\vee$; élimination de $\vee$; RAA.
3. Montrer que pour toute formule ϕ, $\vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi \Leftrightarrow \mathcal{G}(\phi)$.
4. Montrer que pour toute formule ϕ, si $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{NJ}_0} \mathcal{G}(\phi)$ alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_0} \phi$.

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \wedge_{\mathrm{E}}^i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_{\mathrm{I}}^i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\mathrm{E}}$$

Figure 1 – Système NM_0 : déduciton naturelle minimale.

Groupe identité

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \text{axiom} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \phi, \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \text{cut}$$

Groupe structurel

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}\ \mathrm{c}_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}\ \mathrm{w}_L$$

Groupe logique

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \psi}\ \bot_L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi_1, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \psi}\ \wedge_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \psi}\ \vee_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_R^i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash \psi}\ \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2}\ \Rightarrow_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \psi}\ \neg_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_R$$

Figure 2 – Système LJ_0 : calcul des séquents pour la logique propositionnelle constructive.