Logique

Stanislas Riou (basé sur un TD de Maxime Bridoux)

Exercice 1 (Dérivations)
Montrer les formules suivantes en logique intuitionniste quand c'est possible et, sinon, donner un contre-modèle intuitionniste et démontrer la formule en calcul des séquents classique :

1. $\vdash \phi \vee \neg\phi$
2. $\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\phi \vee \psi)$
3. $\vdash (\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)$
4. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Exercice 2 (Axiome atomique)
Sans s'appuyer sur la preuve de complétude du cours, montrer que tout ce qui est dérivable en LK_0 l'est toujours si on limite la règle axiom aux formules ϕ atomiques. Procéder en transformant une preuve dans LK_0 en une preuve dans ce système restreint.

Exercice 3 (Changement de contexte)
On considère la variante du calcul des séquents on l'on remplace $\wedge_R$ par la règle $\wedge'_R$ suivante :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \psi, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi \wedge \psi, \Delta_1, \Delta_2} \wedge'_R$$

Démontrer que cette variante est équivalente au système original.

Exercice 4 (Système monolatère)
On s'intéresse dans cet exercice aux symétries entre les règles de LK_0. Par exemple, les règles $\top_R$ et $\bot_L$ sont similaires : un $\top$ à droite d'un séquent est traité de la même manière qu'un $\bot$ à gauche. Les mêmes observations peuvent aussi être faites pour $\vee_R$ et $\wedge_L$, à cause notamment des lois de Morgan.

1. Proposer un système de réécriture $\equiv_\bot$ permettant de réécrire toute formule ϕ sous forme normale négative.Une formule est en forme normale négative si les négations ne sont appliquées que aux variables et si l'opérateur d'implication est interdit.

On observe que si $\phi \equiv_\perp \psi$ alors toute preuve de $\Gamma, \phi \vdash \Delta$ peut être transformée localement en une preuve de $\Gamma, \psi \vdash \Delta$, et réciproquement. De même pour $\Gamma \vdash \phi, \Delta$ et $\Gamma \vdash \psi, \Delta$.

2. Illustrer cette transformation en passant de $\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta$ à $\Gamma, \neg\phi \vee \psi \vdash \Delta$.

On cherche ici à exploiter cette symétrie afin de proposer le système suivant, dit *monolatère* :

$$\frac{}{\vdash \top, \Delta}\ \top \qquad \frac{}{\vdash \phi, \neg\phi, \Delta}\ \text{axiom}$$

$$\frac{\vdash \phi, \psi, \Delta}{\vdash \phi \vee \psi, \Delta}\ \vee \qquad \frac{\vdash \phi, \Delta \quad \vdash \psi, \Delta}{\vdash \phi \wedge \psi, \Delta}\ \wedge$$

où les formules sont implicitement identifiées modulo $\equiv_\perp$.

3. En déduire que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \Delta$ est dérivable en LK_0 si et seulement si $\vdash \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n, \Delta$ est dérivable dans le système monolatère.
4. Que se passerait-il si l'on souhaitait proposer un système de preuve identifiant les formules modulo l'équivalence logique $\equiv$?

Exercice Bonus (Logique intuitionniste et tiers-exclu)
Contrairement à la logique intuitionniste, il est possible en logique classique de faire des preuves non constructives, notamment à l'aide du tiers-exclu :

1. Montrer, en arithmétique classique, qu'il existe a et b irrationnels tels que a^b est rationnel. *Indication : considérer $a = b = \sqrt{2}$ et le tiers-exclu.*

Le but de l'exercice est de montrer que le tiers-exclu n'est pas valide en logique intuitionniste, sans utiliser la sémantique usuelle des modèles dits *de Kripke*. On considère plutôt l'interprétation I suivante des formules dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donné une interprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

- $I(\perp) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
- $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$;
- $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;
- $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
- $I(\phi \Rightarrow \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit *valide* si pour tout I on a $\cap_{Q \in \Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

2. Montrer que le tiers-exclu n'est pas valide.
3. Montrer que tout jugement prouvable en NJ_0 est valide.

Rappels sur les ouverts :

- Les ouverts pour la topologie usuelle sont les unions d'intervalles ouverts.
- Les ouverts sont stables par intersection finie.
- Les ouverts sont stables par union quelconque.
- L'intérieur d'un ensemble E est le plus grand ouvert inclus dans E.