Université de Rennes — ENS Rennes, L3 SIF

# Logique

Devoir sur table, 22 février 2024

Durée : 1h30.
Documents autorisés, machines interdites.

Dans tout l'énoncé, les clauses sont vues comme des multi-ensembles de littéraux. Les systèmes NK et LK sont rappelés en dernière page.

## A. Systèmes de preuve

**Question 1.** On considère l'ensemble de formules suivant :

$$S = \{ (\neg A \vee B) \Rightarrow F,\ F \Rightarrow (E \vee A),\ A \Rightarrow (C \vee B) \}$$

a. Donner un ensemble de clauses $S'$ logiquement équivalent à $S$, en faisant une mise en forme normale conjonctive.

b. Dériver la clause $C \vee A \vee F \vee E$ à partir de $S'$, en utilisant exclusivement la règle de résolution. *Indice : passer par $A \vee A \vee E$.*

c. Sans énumérer toutes les dérivations possibles, montrer qu'on ne peut dériver la clause vide à partir de $S'$ en utilisant les règles de résolution et factorisation.

**Question 2.** Démontrer la formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ en calcul des séquents.

**Question 3.** Démontrer la formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ en déduction naturelle.
*Indication :* $\neg\phi, A \vdash B \Rightarrow A$.

**Question 4.** Soit $E$ un ensemble de formules et $\phi$ une formule, tels que $\phi$ est conséquence logique de $E$. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma \subseteq E$ tel que $\Gamma \vdash \phi$ est dérivable en calcul des séquents.

## B. Graphes

On considère des graphes non orientés sur l'ensemble des sommets $\mathbb{N}$, pouvant comporter un nombre infini d'arêtes. On utilisera l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{ P_{i,j} \mid i,j \in \mathbb{N} \}$. Étant donné un graphe $G$, on note $I_G$ l'interprétation qui rend vraie $P_{i,j}$ ssi l'arête $\{i,j\}$ est présente dans $G$. On note $E_G$ l'ensemble des littéraux satisfaits dans $G$.

**Question 1.** On fixe deux sommets $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il ne peut exister de formule $\phi$ telle que, pour tout $G$, on a $I_G \models \phi$ ssi $a$ et $b$ sont reliés par un chemin (de longueur arbitraire) dans $G$.

**Correction.** Si une telle formule existait, elle ne pourrait parler que d'un sous-ensemble fini des variables. Soit un sommet $k$ tel que $\phi$ ne contient aucune variable $P_{i,k}$ ni $P_{k_i}$, et $G$ un graphe où $a$ et $b$ sont reliés uniquement à $k$ : alors $I_G \models \phi$ ssi $I_{G'} \models \phi$, où $G'$ est obtenu en enlevant les arêtes passant par $k$, donc $\phi$ ne peut exprimer le fait que $a$ et $b$b soient reliés.

**Question 2.** On fixe deux sommets $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il ne peut exister d'ensemble de formules $E$ tel que, pour tout $G$, $I_G \models E$ ssi $a$ et $b$ sont reliés par un chemin dans $G$.
*Indication : en supposant que $E$ existe, considérer un graphe quelconque $G$ où $a$ et $b$ ne sont* pas *reliés, et utiliser le théorème de compacité sur l'ensemble $E_G \cup E$.*

**Correction.** Soit $G$ un graphe où $a$ et $b$ ne sont pas reliés. Alors $E_G \cup E$ n'est pas satisfaisable, puisque la seule interprétation qui satisfait $E_G$ est $I_G$. Par compacité il existe un sous-ensemble fini $F \subseteq E_G$ tel que $F \cup E$ est encore insatisfaisable. Ce sous-ensemble ne mentionne qu'un nombre fini de sommets. Soit $k$ tel que pour tout $i$, ni $P_{i,k}$ ni $P_{k,i}$ n'apparaissent dans $F$. Alors $G'$ obtenu à partir de $G$ en reliant $a$ et $b$ à $k$. On a $F \subseteq E_{G'}$, donc $E_{G'} \cup E$ est insatisfaisable, ce qui signifie que $I_{G'} \not\models E$, contradiction.

## C. Clauses de Horn

Une clause de Horn est une clause qui comporte au plus un littéral positif. On dit qu'une telle clause est stricte si elle comporte exactement un littéral positif, et négative si elle n'en comporte aucun.

Soit $X \subseteq \mathcal{P}$ un sous-ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et $S$ un ensemble de clauses de Horn strictes. On définit $F_S(X) = \{P' \in \mathcal{P} \mid (\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee P') \in S,\ P_i \in X \text{ pour tout } i\}$.

**Question 1.** Donner $F_S(\emptyset)$, $F_S(\{A\})$, $F_S(\{B\})$ et $F_S(\{C\})$ pour l'ensemble $S$ suivant :

$$S \ = \ \{ \neg A \vee B, \quad C, \quad \neg A \vee \neg D \vee F, \quad \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee E \}$$

**Correction.** On a $F_S(\emptyset) = F_S(\{B\}) = F_S(\{C\}) = \{C\}$ et $F_S(\{A\}) = \{B, C\}$.

**Question 2.** L'opérateur $F_S$ est évidemment croissant. Il admet donc un plus petit point fixe, noté $\mu_S$, qui est égal à l'intersection de tous les sous-ensembles $X$ tels que $F_S(X) \subseteq X$ :

$$\mu_S = \cap\{X \subseteq \mathcal{P} \mid F_S(X) \subseteq X\}$$

Montrer que le plus petit point fixe est aussi égal à l'union des itérées de $F_S$ : $\mu_S = \cup_{i\in\mathbb{N}} F_S^i(\emptyset)$. *Indice : montrer que l'union des itérées est un point fixe, puis que c'est le plus petit point fixe ; on pourra aussi montrer que* $F_S^i(\emptyset) \subseteq F_S^j(\emptyset)$ *pour tout* $i \leq j$.

**Correction.** On commence par montrer que $i \leq j$ entraîne $F_S^i(\emptyset) \subseteq F_S^j(\emptyset)$ : on a évidemment $\emptyset \subseteq F_S(\emptyset)$ puis, par croissance, $F_S(\emptyset) \subseteq F_S^2(\emptyset)$, et ainsi de suite : $F_S^i(\emptyset) \subseteq F_S^{i+1}(\emptyset)$ pour tout $i$. Le résultat suit par réflexivité et transitivité de l'inclusion.

Montrons d'abord que l'union des itérées est un point fixe. On a d'une part $\cup_i F_S^i(\emptyset) \subseteq F_S(\cup_i F_S^i(\emptyset))$ car tout élément de $F_S^i(\emptyset)$ (nécessairement pour $i > 0$) est élément de $F_S(F_S^{i-1}(\emptyset))$ et donc (par croissance) de $F_S(\cup_i F_S^i(\emptyset))$. D'autre part, $F_S(\cup_i F_S^i(\emptyset)) \subseteq \cup_i F_S^i(\emptyset)$ : supposons qu'on a $(\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee P) \in S$ avec, pour tout $j$, $P_j \in \cup_i F_S^i(\emptyset)$, et montrons que $P \in \cup_i F_S^i(\emptyset)$. Chaque $P_j$ appartient à un $F_S^{i_j}(\emptyset)$, donc ils appartiennent tous à $F_S^k(\emptyset)$ pour $k$ le maximum des $i_j$. Ainsi, $P \in F_S^{k+1}(\emptyset)$, ce qui permet de conclure.

Il reste à montrer que l'union des itérées est le plus petit des points fixes ou, plus directement, qu'elle est contenue dans $\mu_S$. Comme $\emptyset \subseteq \mu_S$, on obtient par croissance $F_S(\emptyset) \subseteq F_S(\mu_S) = \mu_S$, puis, en répétant l'argument, $F_S^i(\emptyset) \subseteq \mu_S$ pour tout $i$. Ainsi l'union des itérées est encore contenue dans $\mu_S$.

**Question 3.** Étant donné un sous-ensemble $X \subseteq \mathcal{P}$, on note $I_X$ l'interprétation qui rend vraies les variables de $X$ et fausses celles de $\mathcal{P} \setminus X$. Montrer que, pour tout $X$, on a $I_X \models S$ ssi $F_S(X) \subseteq X$.

**Correction.** $I_X \models S$ signifie que, pour chaque clause de $S$, si les variables apparaissant négativement dans la clause sont dans $X$ alors la variable apparaissant positivement est aussi dans $X$. Or, $F_S(X)$ est précisément l'ensemble des variables positives des clauses dont les variables négatives sont dans $X$.

**Question 4.** Soit $E$ un ensemble de clauses de Horn, et $S \subseteq E$ le sous-ensemble de ses clauses strictes – les autres sont négatives. Montrer que $E$ est satisfaisable ssi il n'existe pas de clause négative de $E$ dont tous les littéraux sont des négations de variables de $\mu_S$.

**Correction.** Toute interprétation est de la forme $I_X$ pour un certain $X$, et un modèle de $E$ s'écrit forcément $I_X$ pour $\mu_S \subseteq X$, par la question précédente et la définition du plus petit point fixe. Autrement dit, tout modèle de $E$ est aussi modèle de $\mu_S$. Ainsi, s'il existe une clause négative contredisant $\mu_S$, il ne peut y avoir de modèle. Réciproquement, si aucune clause négative ne contredit $\mu_S$, alors $I_{\mu_S}$ satisfait toutes les clauses négatives, et est donc un modèle de $E$.

**Question 5.** La résolution unitaire est la restriction de la résolution au cas où une des clauses en prémisse est restreinte à un littéral. Démontrer que la règle de résolution unitaire, seule, est réfutationnellement complète pour les clauses de Horn.
*Indice : montrer que les variables de $\mu_S$ sont dérivables, puis utiliser la question précédente.*

**Correction.** On démontre que, pour tout $i$, les variables de $F_S^i(\emptyset)$ sont dérivables à partir de $S$ par résolution unitaire, par induction sur $i$. C'est évident pour $i = 0$ car $F_S^0(\emptyset) = \emptyset$. Sinon, supposons que les variables de $F_S^i(\emptyset)$ sont dérivables, il est clair par définition de $F_S$ que les variables de $F_S^{i+1}(\emptyset)$ sont dérivables – en reprenantles notations de cette définition, on combine les dérivations des $P_i$, par résolutions unitaires successives, avec la clause $\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee P'$ de $S$.

Si $E$ est insatisfaisable c'est qu'il contient une clause négative $\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m$ tel que tous les $Q_j$ sont dans $\mu_S$. On a alors des dérivations unitaires de $Q_j$, qu'on peut combiner par résolution unitaire avec notre clause négative pour obtenir une dérivation de la clause vide : ce qu'il fallait démontrer.

**Question 6.** La résolution négative est la restriction de la résolution au cas où une des clauses en prémisse ne contient que des littéraux négatifs. Démontrer que la règle de résolution négative, seule, est réfutationnellement complète pour les clauses de Horn.
*Indication : considérez le schéma de dérivation ci-dessous, et proposez-en une transformation.*

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{Q_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\vdots}{Q_{m-1}} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{P_1} \quad \ldots \dfrac{\vdots}{P_n} \quad \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee Q_m}{Q_m} \quad \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m}{\perp}$$

**Correction.** Schématiquement, si l'on regroupe les résolutions unitaires portant sur la même clause de $E$, la dérivation obtenue dans la question précédente a la forme suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{Q_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\vdots}{Q_m} \quad \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m}{\perp}$$

où la clause négative à droite est dans $E$. La dernière inférence représentée ici correspond à des résolutions unitaires qui sont aussi négatives, mais les dérivations des $Q_j$ utilisent des résolutions unitaires non-négatives. Par exemple, pour une clause stricte $\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee Q_m$ de $S$ :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{Q_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\vdots}{Q_{m-1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{P_1} \quad \ldots \dfrac{\vdots}{P_n} \quad \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee Q_m}{Q_m} \qquad \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_m}{\perp}$$

Dans un tel cas de figure, on va cependant pouvoir faire les résolutions dans un autre ordre, pour éviter des résolutions non-négatives (sans pour autant changer le nombre d'étapes de résolution utilisées) :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{Q_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\vdots}{Q_{m-1}} \quad \dfrac{\vdots}{P_1} \quad \ldots \dfrac{\vdots}{P_n} \quad \dfrac{\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee Q_m \quad \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_{m-1} \vee \neg Q_m}{\neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_{m-1} \vee \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n}}{\perp}$$

On a remplacé une résolution non-négative par une résolution négative.

De façon générale, on montre que si l'on peut dériver la clause vide en résolvant des littéraux positifs de $\mu_S$ (dérivés par résolutions unitaires positives en utilisant les clauses de $S$) contre une clause négative obtenue par résolution négative à partir de $E$, alors on peut dériver la clause vide par résolution négative à partir de $E$. Cela se démontre par induction sur la somme des tailles des dérivations des variables de $\mu_S$. On conclut en remarquant que la question précédente nous donne une dérivation sur laquelle ce résultat s'applique.

### Déduction naturelle $\mathbf{NK}_0$

$$\dfrac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\ \textsc{raa} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi}\ \perp_{\mathrm{E}} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{I}}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_{\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \wedge_{\mathrm{E}}^i \qquad \dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_{\mathrm{I}}^i \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\mathrm{E}}$$

$$\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_{\mathrm{I}} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \perp}\ \neg_{\mathrm{E}}$$

### Calcul des séquents $\mathbf{LK}_0$

$$\dfrac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi, \Delta}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{coupure} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta}\ \perp_L \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top_R$$

$$\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ C_L \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ C_R \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ W_L \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ W_R$$

$$\dfrac{\Gamma, \phi_1, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Delta}\ \wedge_L \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \Delta}\ \wedge_R \qquad \dfrac{\Gamma, \phi_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \Delta}\ \vee_L \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi_1, \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \Delta}\ \vee_R$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash \Delta}\ \Rightarrow_L \qquad \dfrac{\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \Delta}\ \Rightarrow_R \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ \neg_L \qquad \dfrac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}\ \neg_R$$