# Logique propositionnelle

## Sémantique

Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des variables propositionnelles, une *interprétation* est une fonction $\mathcal{I} : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$.

La relation de *satisfaction* entre les interprétations et les formules, notée $\mathcal{I} \models \phi$, est définie par induction sur les formules:

- $\mathcal{I} \models \top$ et $\mathcal{I} \not\models \bot$;
- $\mathcal{I} \models A$ ssi $\mathcal{I}(A) = 1$;
- $\mathcal{I} \models \phi \wedge \psi$ ssi ($\mathcal{I} \models \phi$ et $\mathcal{I} \models \psi$);
- $\mathcal{I} \models \phi \vee \psi$ ssi ($\mathcal{I} \models \phi$ ou $\mathcal{I} \models \psi$);
- $\mathcal{I} \models \phi \Rightarrow \psi$ ssi ($\mathcal{I} \models \phi$ implique $\mathcal{I} \models \psi$);
- $\mathcal{I} \models \neg\phi$ ssi $\mathcal{I} \not\models \phi$.

Une formule est *valide* si elle est satisfaite par toutes les interprétations. Deux formules sont *logiquement équivalentes* si elles sont satisfaites par les mêmes interprétations.

## Preuves en déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_{\mathrm{E}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \wedge_{\mathrm{E}}^{i}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_{\mathrm{I}}^{i} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\ \text{RAA} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_{\mathrm{E}}$$

Un séquent $\Gamma \vdash \phi$ est composé d'un ensembles de formules $\Gamma$ et d'une formule $\phi$.

Le système est *correct*: si un séquent $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ est dérivable alors la formule $(\wedge_i \phi_i) \Rightarrow \psi$ est valide.