Université de Rennes | ENS Rennes, L3 SIF

Logique

Examen, 16 mai 2024

Durée : 1h00

Documents autorisés, machines interdites

A. Déduction naturelle

Dans cet exercice on prend $\mathcal{F} = \{f\}$ et $\mathcal{P} = \{=\}$ avec f d'arité 1 et $=$ d'arité 2.

Question 1 Montrer que la formule suivante n'est pas valide :

$$(\forall x.\ \ f(f(x)) = x) \Rightarrow (\forall z.\exists y.\ z = f(y))$$

Question 2 Démontrer la formule suivante en déduction naturelle (système NK_1) :

$$(\forall x.\ \ f(f(x)) = x) \Rightarrow (\forall z.\exists y.\ f(y) = z)$$

B. Skolemisation et calcul des séquents

On prend $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$, où chacun des symboles de prédicat est unaire. On considère la formule suivante :

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \exists x.((\exists z.\ (A(z) \Rightarrow B(x))) \Rightarrow (\forall y.(A(x) \Rightarrow B(y))))$$

Question 1 Montrer que ϕ est valide, par un argument sémantique.

Question 2 Mettre ϕ en forme normale négative puis skolémiser cette formule. Soit ψ_2 la formule résultante. La formule ψ_2 est-elle valide ? si oui, donner une preuve en calcul des séquents.

Question 3 Mettre $\neg\phi$ en forme normale négative puis skolémiser cette formule. Soit ψ_3 la *négation* de la formule résultante. La formule ψ_3 est-elle valide ? si oui, donner une preuve en calcul des séquents.

Question 4 L'une des deux formules ψ_2 et ψ_3 est-elle insatisfaisable ? Si oui, mettez-la en forme clausale : soit E l'ensemble de clauses résultant. Dérivez la clause vide par résolution à partir de E.

C. Indécidabilité de la validité

Dans cet exercice on souhaite démontrer l'indécidabilité de la validité en logique du premier ordre. On s'appuie sur l'indécidabilité du problème de correspondance de Post (PCP) sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

— Entrée : un ensemble fini de paires de mots sur Σ, $D = \{(u_i, v_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

— Question : existe-il $i_1, \ldots, i_n$ avec $n > 0$ tel que $u_{i_1} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n}$.

On dira plus généralement dans ce contexte qu'une paire de mots (u, v) peut être engendrée à partir de l'ensemble D s'il existe $i_1, \ldots, i_n$ tel que $(u, v) = (u_{i_1} \ldots u_{i_n}, v_{i_1} \ldots v_{i_n})$.

Question 1 On fixe $\mathcal{F} = \{a, b, \epsilon\}$, avec ϵ d'arité 0 et a, b d'arité 1, et $\mathcal{P} = \{R\}$ composé d'un unique symbole de prédicat binaire. Donner un encodage d'une instance D de PCP en une formule close ϕ_D du premier ordre, telle que ϕ_D est valide ssi D est une instance positive. Justifier ce résultat.

D. Variante du théorème de Herbrand

Question 1 Donner une condition minimale sur $\mathcal{F}$ pour que l'ensemble des termes clos (i.e. sans variables) construits sur $\mathcal{F}$ soit non-vide. Justifier.

Dans la suite, on supposera que $\mathcal{F}$ satisfait cette hypothèse. On a vu en cours qu'on a alors le théorème suivant, attribué à Herbrand : *un ensemble de formules purement universelles a un modèle ssi elle a un modèle de Herbrand.*

Pour une formule purement universelle ψ, de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ \phi$ avec ϕ sans quantificateurs, on définit l'ensemble de ses instances closes :

$$H(\psi) = \{\phi[x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n] \ \mid t_1, \ldots, t_n \text{ termes clos}\}$$

Pour un ensemble de formules purement universelles E, on pose $H(E) = \{H(\psi) \mid \psi \in E\}$.

Question 2 Soit E un ensemble de formules purement universelles.

1. Montrer qu'un modèle de E est aussi un modèle de $H(E)$, mais que la réciproque n'est pas toujours vraie.
2. Montrer que E est satisfaisable ssi $H(E)$ est satisfaisable.

Question 3 Soit Γ un ensemble fini de formules purement universelles. Montrer que le séquent $\Gamma \vdash \bot$ est dérivable (en LK_1) ssi il existe un sous-ensemble fini Δ de $H(\Gamma)$ tel que $\Delta \vdash \bot$ est dérivable.

Déduction naturelle NK_1

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\ \mathrm{RAA} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_{\mathrm{E}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \wedge_{\mathrm{E}}^i \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_{\mathrm{I}}^i \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x.\phi}\ \forall_{\mathrm{I}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.\phi}\ \exists_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x.\phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_{\mathrm{E}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \psi))$$

Calcul des séquents LK_1

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi, \Delta}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{coupure} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ C_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ C_R \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ W_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ W_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi_1, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Delta}\ \wedge_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \Delta}\ \wedge_R \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \Delta}\ \vee_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1, \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \Delta}\ \vee_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash \Delta}\ \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \Delta}\ \Rightarrow_R \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ \neg_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}\ \neg_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi\{x \mapsto t\} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\phi \vdash \Delta}\ \forall_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.\phi, \Delta}\ \forall_R \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.\phi \vdash \Delta}\ \exists_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi\{x \mapsto t\}, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.\phi, \Delta}\ \exists_R$$

Dans les règles $\forall_R$ et $\exists_L$, on exige $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \Delta)$.