Logique

Examen, 9 mai 2023

Durée : 2h00
Documents autorisés, machines interdites

A. Questions de cours

1. On suppose qu'on a un unique symbole de fonction c, d'arité 0.
   Donner une formule satisfaisable mais n'ayant aucun modèle de Herbrand.
2. Dériver le séquent suivant en NK_1 (déduction naturelle) : $\exists x.\phi \vdash \neg\forall x.\neg\phi$
   De façon générale, ne pas hésiter à présenter la dérivation par petits morceaux. On peut même se passer de détailler la structure arborescente tant que tous les séquents intermédiaires apparaissent, et que les règles sont nommées.
3. Dériver le séquent suivant en NK_1 : $\neg\forall x.\neg\phi \vdash \exists x.\phi$
4. Donner un exemple de théorie complète et non récursive, sur un langage de votre choix. Justifier brièvement.
5. Donner un exemple de théorie récursive et non complète, sur un langage de votre choix. Justifier brièvement.

B. Résolution au premier ordre

On considère la règle de résolution suivante, au premier ordre (quelques définitions et rappels utiles à sa compréhension suivent) :

$$\frac{C \vee A \quad \neg A' \vee C'}{C\theta \vee C'\theta}\ \theta = \mathsf{mgu}(A, A'),\ \mathsf{fv}(C \vee A) \cap \mathsf{fv}(C' \vee \neg A') = \emptyset$$

Une substitution θ est un *unificateur* de deux atomes $P(t_1, \ldots, t_n)$ et $Q(t'_1, \ldots, t'_m)$ quand $P(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$ et $Q(t'_1\theta, \ldots, t'_m\theta)$ sont identiques [1]. Quand deux atomes A et A' admettent un unificateur, ils admettent un unificateur le plus général [2], noté $\mathsf{mgu}(A, A')$.

Dans la règle, les prémisses et la conclusion sont des *clauses* closes du premier ordre, i.e. des formules sans variable libre de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_k.\ (L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ où les L_i sont des litéraux. Dans la règle, les clauses sont vues modulo associativité et commutativité de la disjonction, et on n'écrit pas les quantifications universelles, qui lient *toutes* les variables. La condition sur les variables libres disjointes peut donc toujours être obtenue par α-renommage.

1. On suppose que c et f sont des symboles de fonction. Quel est la conclusion de cette règle sur les prémisses $\forall x.\ P(f(c, x))$ et $\forall x.\forall y.\forall z.\ \neg P(f(x, y)) \vee P(f(x, f(z, y)))$? Donner de plus la conclusion dans sa forme avec quantificateurs explicités.
2. Démontrer que la règle est correcte, au sens où sa conclusion est toujours conséquence logique de ses prémisses. Une preuve détaillée est attendue. La condition $\theta = \mathsf{mgu}(A, A')$ est-elle nécessaire à la correction ? si non, expliquer son intérêt. De même pour la condition $\mathsf{fv}(C \vee A) \cap \mathsf{fv}(C' \vee \neg A') = \emptyset$.

1. On a donc en particulier $P = Q$ et $n = m$.
2. Un unificateur θ est plus général qu'un autre unificateur θ' quand il existe θ'' tel que, pour tout x, $\theta'(x) = \theta(x)\theta''$, ce qu'on note parfois $\theta' = \theta\theta''$.

C. Boucles

On se place dans un langage comportant une constante a, un symbole de fonction unaire f et un symbole de prédicat binaire $=$ que l'on supposera interprété comme l'égalité dans toutes les structures. Etant donnée une structure $\mathcal{S}$, on note $\hat{f}^i_{\mathcal{S}}$ l'itérée i fois de la fonction $\hat{f}_{\mathcal{S}}$ interprétant f dans $\mathcal{S}$.

Dans ce qui suit, toutes les réponses négatives peuvent être obtenues par le théorème de compacité.

1. Existe-il un ensemble de formules E dont les modèles sont exactement les structures $\mathcal{S}$ telles que, pour tous les entiers $i \neq j$, on a $\hat{f}^i_{\mathcal{S}}(\hat{a}_{\mathcal{S}}) \neq \hat{f}^j_{\mathcal{S}}(\hat{a}_{\mathcal{S}})$? Même question quand E doit être un ensemble fini.
2. Existe-il un ensemble de formules E dont les modèles sont exactement les structures $\mathcal{S}$ pour lesquelles il existe $i \neq j$ tel que $\hat{f}^i_{\mathcal{S}}(\hat{a}_{\mathcal{S}}) = \hat{f}^j_{\mathcal{S}}(\hat{a}_{\mathcal{S}})$? Même question quand E doit être un ensemble fini.
3. Existe-il un ensemble de formules E dont les modèles sont exactement les structures $\mathcal{S}$ pour lesquelles il existe $i \neq j$ tel que $\hat{f}^i_{\mathcal{S}}(\hat{a}_{\mathcal{S}}) \neq \hat{f}^j_{\mathcal{S}}(\hat{a}_{\mathcal{S}})$? Même question quand E doit être un ensemble fini.

D. Fragment monadique

On suppose que tous les symboles de prédicat sont unaires, et qu'il n'y a aucun symbole de fonction. Étant donnée une structure $\mathcal{S}$ pour ce langage, on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $D_{\mathcal{S}}$ comme suit :

$$a \sim a' \text{ quand, pour tout } P \in \mathcal{P}, \text{ on a } \big(a \in \hat{P}_{\mathcal{S}} \text{ ssi } a' \in \hat{P}_{\mathcal{S}}\big).$$

On note $[a]$ la classe d'équivalence d'un élement $a \in D_{\mathcal{S}}$ pour cette relation. On définit enfin $\mathcal{S}'$ comme la structure de domaine $\{[a] \mid a \in D_{\mathcal{S}}\}$ où $\hat{P}_{\mathcal{S}'} = \{[a] \mid a \in D_{\mathcal{S}},\ a \in \hat{P}_{\mathcal{S}}\}$.

1. Montrer que, pour tous a et P, on a $[a] \in \hat{P}_{\mathcal{S}'}$ ssi $a \in \hat{P}_{\mathcal{S}}$.
2. Pour une assignation $\sigma : X \to D_{\mathcal{S}}$ on note $[\sigma]$ l'assignation définie par $[\sigma](x) = [\sigma(x)]$.
   Montrer que, pour toute formule ϕ et toute assignation σ, on a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ ssi $\mathcal{S}', [\sigma] \models \phi$.
3. En déduire que la satisfaisabilité est décidable dans le fragment monadique.

E. Instances de Herbrand

On considère une signature comportant des symboles de fonction c d'arité 0 et f d'arité 1.

Soit ϕ la formule $P(x) \Rightarrow P(f(x))$.

1. Donner une dérivation du séquent $P(c), \forall x.\phi \vdash P(f(f(c)))$ dans le système NK_1.
2. Donner t_1 et t_2 tels que $P(c), \phi\{x \mapsto t_1\}, \phi\{x \mapsto t_2\} \vdash P(f(f(c)))$ soit dérivable dans NK_1. Justifier brièvement.
3. Montrer que, quel que soit t, le séquent $P(c), \phi\{x \mapsto t\} \vdash P(f(f(c)))$ n'est pas dérivable en NK_1.

On considère maintenant le calcul des séquents LK_1 plutôt que la déduction naturelle NK_1. On rappelle que, comme NK_1, le système de preuve LK_1 est correct et complet. De plus, la complétude reste vraie si l'on considère le système LK_1 sans la règle de coupure.

4. Donner une dérivation du séquent $P(c), \forall x.\phi \vdash P(f(f(c)))$ dans le système LK_1.
5. Soient ψ, ψ', ψ'' des formules sans quantificateurs, telles que $\psi, \forall x.\psi' \vdash \psi''$ est dérivable en LK_1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que $\psi, \psi'\{x \mapsto t_1\}, \ldots, \psi'\{x \mapsto t_n\} \vdash \psi''$ est aussi dérivable.
   Il s'agit d'une question difficile pour laquelle une preuve détaillée n'est pas exigée. Cependant, un schéma de preuve ou une explication claire est attendue. On veillera notamment à expliquer pourquoi l'hypothèse "sans quantificateurs" est nécessaire.

Déduction naturelle NK_1

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\ \textsc{raa} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_{\mathrm{E}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \wedge^i_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee^i_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x.\phi}\ \forall_{\mathrm{I}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.\phi}\ \exists_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x.\phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_{\mathrm{E}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \psi))$$

Calcul des séquents LK_1

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi, \Delta}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{coupure} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ C_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ C_R \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ W_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ W_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi_1, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \Delta}\ \wedge_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \Delta}\ \wedge_R \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \Delta}\ \vee_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1, \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \Delta}\ \vee_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1, \Delta \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \vdash \Delta}\ \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_2, \Delta}{\Gamma \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2, \Delta}\ \Rightarrow_R \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ \neg_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}\ \neg_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi\{x \mapsto t\} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\phi \vdash \Delta}\ \forall_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.\phi, \Delta}\ \forall_R \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.\phi \vdash \Delta}\ \exists_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi\{x \mapsto t\}, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.\phi, \Delta}\ \exists_R$$

Dans les règles $\forall_R$ et $\exists_L$, on exige $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \Delta)$.