Logique – L3 SIF – ǝnbıƃo⅂

Devoir à la maison

Merci de rendre une copie papier en TD, ou un PDF composé en LaTeXpar email à maxime.bridoux@ens-rennes.fr. Vous êtes encouragés à travailler de façon individuelle **et** en groupe, mais les copies doivent être rédigées individuellement. Soignez la rédaction, et soyez précis sur les définitions des objets manipulés !

1 Résolution

On considère dans cet exercice le système de preuve par résolution comportant les règles de Résolution, Factorisation, Affaiblissement et Tiers-exclu, définies comme suit :

$$\frac{C \vee L \quad \overline{L} \vee C'}{C \vee C'}\ R \qquad \frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}\ F \qquad \frac{C}{C \vee C'}\ A \qquad \frac{}{L \vee \overline{L}}\ T$$

On considère que les clauses sont des multi-ensembles de littéraux, et que la disjonction correspond à l'union multi-ensembliste. On a donc notamment $C \vee C' = C' \vee C$ et $C \vee \bot = C$. On écrira $C \subseteq C'$ quand C' peut s'écrire $C \vee C''$.

Pour C une clause et E un ensemble de clauses, on note $E \vdash_{RFAT} C$ quand C est dérivable à partir des clauses de E au moyen des règles R, F, A et T. On étend cette notation pour tout sous-ensemble des règles, par exemple $E \vdash_{RF} C$ correspond à la dérivabilité de C à partir de E au moyen des règles R et F.

On verra au TD du 9 février que les quatre règles ci-dessus forment un système de preuve correct et complet pour les clauses : $E \models C$ ssi $E \vdash_{RFAT} C$. On admet ici ce résultat.

Question 1
Montrer qu'on a $\vdash_{AT} C$ quand C est une clause valide.

Question 2
Montrer que si $E \vdash_{RFAT} C$, on a $E \vdash_{RFA} C$ ou bien $E \vdash_{AT} C$.

Question 3
Supposons que l'on a $E \models C$ mais $E \not\models C'$ pour tout $C' \subsetneq C$.
Montrer que $E \vdash_{RFT} C$.

2 Indépendance

Un ensemble de formules E est dit *indépendant* si, pour toute formule $\phi \in E$, on a $E \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

Par exemple, $\{P \vee Q, P\}$ n'est pas indépendant mais $\{P, Q\}$ l'est.

Question 4
Montrer que, pour tout ensemble fini de formules E, il existe un sous-ensemble indépendant $E' \subseteq E$ tel que, pour tout $\phi \in E$, $E' \models \phi$.

Question 5
Donner un ensemble infini de formules E qui n'admette aucun sous-ensemble E' qui soit indépendant et logiquement équivalent à E.

Question 6
On suppose que l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$ est dénombrable. Soit $E = \{\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de formules. Montrer qu'il existe un ensemble de formules indépendant et logiquement équivalent à E.
Indications : on pourra d'abord traiter le cas où $\phi_0, \ldots, \phi_{i-1} \not\models \phi_i$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *et considérer les formules* ϕ'_i *définies comme* $\phi_0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \phi_{i-1} \Rightarrow \phi_i$.

3 Mensonge

Vous êtes sur une île paradisiaque, au soleil, en bonne compagnie, avec des sources d'eau et de nourriture à profusion. La nature et la mer sont magnifiques, aucun prédateur ne menace votre vie. Pas de problème ? Attendez…

Lors d'une balade au coeur de l'île, vous découvrez n coffres, et un perroquet perché non loin. Un panneau indique qu'un de ces coffres contient un trésor, mais que l'ouverture des autres coffres le détruira. Pour déterminer quel coffre ouvrir, vous pouvez poser des questions au perroquet, formulées en logique propositionnelle en utilisant des variables C_i exprimant que le i$^{\text{ème}}$ coffre contient le trésor. Une fois toutes les questions posées, le perroquet répondra à toutes mais mentira pour exactement une question.

Question 7
Montrer que deux questions suffisent pour déterminer la solution pour $n = 2$.

Question 8
Soient k questions. Montrer que le perroquet peut faire au plus nk réponses possibles en fonction de la position du trésor. Montrer que les questions ne permettent pas de déterminer la position du trésor s'il y a strictement moins que nk réponses possibles. En conclure qu'il n'est pas possible de déterminer à coup sûr le coffre gagnant avec k questions si $2^k < nk$.

Question 9
Construire des questions $(\phi_i)_{i \in [1;\log_2(n)]}$ tel que ϕ_i exprime que le i$^{\text{ème}}$ bit de l'écriture en base 2 de $n - 1$ vaut 1.

Question 10
Construire, pour n quelconque, un jeu de $\log_2(n) + \log_2(\log_2(n)) + 1$ questions permettant de déterminer la position du coffre mystère.
Indication : on pourra considérer ψ_j le ou exclusif de tous les ϕ_i pour lesquels l'écriture binaire de i comporte un 1 en position j — ces questions sont des checksums.