Logique

David Baelde, ENS Rennes, L3 SIF

16 mars 2023 (en chantier)

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Un des objectifs de la formalisation de la logique est d'éviter les raisonnements incorrects. Un exemple célèbre est le paradoxe de Russell : si l'on peut former $R = \{x \mid x \notin x\}$ on déduit $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, puis $\bot$. Même si nous n'avons pas pour objectif de bien poser la théorie des ensembles, cet exemple doit nous inciter à questionner les raisonnements et les définitions que nous nous autorisons à faire.

1.1 Définitions inductives

Considérons la définition inductive d'élément accessible par rapport à l'ordre canonique dans $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$. Comment comprendre et justifier ces définitions ?

Proposition 1.1.1. *Soit E un ensemble. Soit $f : 2^E \to 2^E$ une fonction monotone sur les parties de E, c'est à dire qu'on a, pour tous $X, Y \subseteq E$ tels que $X \subseteq Y$, $f(X) \subseteq f(Y)$. La fonction f admet un* plus petit point fixe *: il existe X tel que $X = f(X)$ et tout autre ensemble ayant cette propriété contient X.*

Démonstration. On définit X comme l'intersection des ensembles Y tels que $f(Y) \subseteq Y$.

- Montrons que $f(X) \subseteq X$. Soit Y tel que $f(Y) \subseteq Y$. On a $X \subseteq Y$ par définition de X, donc $f(X) \subseteq f(Y)$ puis $f(X) \subseteq Y$. On en déduit $f(X) \subseteq X$ par définition de X.
- On montre ensuite que $X \subseteq f(X)$. En fait, par le point précédent et la monotonicité de f on a $f(f(X)) \subseteq f(X)$, d'où $X \subseteq f(X)$ par définition de X.
- Il est enfin clair que $X \subseteq Y$ pour tout Y tel que $f(Y) \subseteq Y$. □

Ce plus petit point fixe contient les itérées de f à partir de l'ensemble vide : $\emptyset \subseteq X$, puis $f(\emptyset) \subseteq f(X) \subseteq X$, $f^2(\emptyset) \subseteq X$, etc. Mais ces inclusions sont en général strictes – considérer par exemple l'accessibilité sur $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ avec $i < \omega$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Quand on définit inductivement un prédicat sur E, qu'on peut voir comme un sous-ensemble de E (le sous-ensembles de valeurs pour lesquelles p est vrai), on dit en fait que p est le plus petit point fixe de la fonction associée à la définition, qui doit être monotone. C'est le cas pour l'accessibilité :

$$f(X) = \{n \mid \forall m.\ m < n \Rightarrow m \in X\}$$

Exemple 1.1.1. *On peut tout à fait définir inductivement p par "p est vrai si p est vrai" : c'est une façon détournée de décrire le prédicat faux. Pour*

voir un prédicat sans argument comme un sous-ensemble, il faut considérer les sous-ensembles d'un singleton $S = \{\mathbf{1}\}$: l'ensemble vide est le prédicat faux, l'ensemble plein est le prédicat faux. Ici, notre prédicat p défini inductivement est le plus petit point fixe de la fonction identité sur 2^S, c'est à dire l'ensemble vide.

Il est important de comprendre ce qui n'est pas une définition inductive, i.e. ce que ne permet pas le théorème précédent.

Exemple 1.1.2. *On ne peut pas définir inductivement p par "p est vrai si p est faux" – ce qui nous ramènerait au paradoxe de Russell. La fonction associée est définie par $f(\emptyset) = S$ et $f(S) = \emptyset$, et n'est donc pas monotone.*

Chapitre 2

Logique propositionnelle

2.1 Syntaxe

On se donne un ensemble $\mathcal{P}$ de *variables propositionnelles*.

Définition 2.1.1. *L'ensemble des formules du calcul propositionnel est défini inductivement comme suit :*
- $\bot$ *et* $\top$ *sont des formules ;*
- *les variables propositionnelles sont des formules ;*
- *si* ϕ *est une formule, alors* $\neg\phi$ *aussi ;*
- *si* ϕ *et* ψ *sont des formules, alors* $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ *et* $\phi \Rightarrow \psi$ *aussi.*

Mais sur quel ensemble de départ se place-t-on quand on crée cette définition ? On peut considérer qu'on se place sur un ensemble d'arbres étiquetés, ou de graphes.

Cette définition peut être vue comme la définition d'un type de données algébrique en OCaml :

```
type form = Bot | Top | Var of var | Not of form | ...
```

C'est une intuition utile, mais la variante OCaml permet des objets récursifs qui sont exclus ici : par exemple, `let rec x = Not x`.

Certains considèrent que les formules sont des suites de symboles, mais il faut alors ajouter des symboles parenthèses dans la définition ci-dessus pour assurer une lecture unique : on préfère une vision de plus haut niveau. Cela n'empêche pas d'écrire nos formules-arbres en utilisant une notation linéaire, avec des règles de priorité pour nos opérateurs et des parenthèses pour désambiguer :
- On considèrera que les trois connecteurs binaires sont associatifs à droite.
- On considèrera que le $\wedge$ lie plus fortement que $\vee$, qui lie plus fortement que $\Rightarrow$.

Ainsi, $A \vee B \wedge C \vee D$ correspond à $A \vee ((B \wedge C) \vee D)$.

2.2 Sémantique

Pour donner un sens à nos formules, on utilise la notion d'interpétation : une interprétation est une fonction $\mathcal{I} : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$.

Définition 2.2.1. *La relation de satisfaction entre les interprétations et les formules, notée* $\mathcal{I} \models \phi$*, est définie par induction sur les formules :*
- $\mathcal{I} \models \top$ *et* $\mathcal{I} \not\models \bot$ *;*
- $\mathcal{I} \models A$ *ssi* $\mathcal{I}(A) = 1$ *;*
- $\mathcal{I} \models \phi \wedge \psi$ *ssi* ($\mathcal{I} \models \phi$ *et* $\mathcal{I} \models \psi$) *;*

— $\mathcal{I} \models \phi \vee \psi$ *ssi* ($\mathcal{I} \models \phi$ *ou* $\mathcal{I} \models \psi$) ;
— $\mathcal{I} \models \phi \vee \psi$ *ssi* ($\mathcal{I} \models \phi$ *implique* $\mathcal{I} \models \psi$) ;
— $\mathcal{I} \models \neg\phi$ *ssi* $\mathcal{I} \not\models \phi$.

Il faut bien noter ici que la relation de satisfaction n'est pas définie inductivement.

À partir de la relation de satisfaction on peut définir une fonction d'interprétation, qu'on peut noter sans confusion $\mathcal{I}(\phi)$ et définie par $\mathcal{I}(\phi) = 1$ si $\mathcal{I} \models \phi$ et 0 sinon. Ces deux définitions peuvent être posées dans l'autre sens : si l'on définit d'abord $\mathcal{I}$, on définit ensuite $\mathcal{I} \models \phi$ par $\mathcal{I}(\phi) = 1$.

Dans ce cours, on utilise en priorité la notation $\models$ qui est de toute façon standard, et en fait plus versatile en logique.

On dérive à partir de la notion de satisfaction de nombreuses notions incontournables.

Définition 2.2.2. *L'ensemble des modèles d'une formule ϕ est l'ensemble des interprétations $\mathcal{I}$ qui satisfont ϕ, i.e. $\mathcal{I} \models \phi$.*

Définition 2.2.3. *Une formule ϕ est* valide *si elle est satisfaite par toute interprétation : $\mathcal{I} \models \phi$ pour tout $\mathcal{I}$.*

Définition 2.2.4. *La formule ψ est* conséquence logique *de la formule ϕ, ce qu'on note $\phi \models \psi$, si tous les modèles de ϕ sont aussi des modèles de ψ :*

$$\mathcal{I} \models \phi \text{ implique } \mathcal{I} \models \psi \text{ pour tout } \mathcal{I}$$

Définition 2.2.5. *Deux formules sont* logiquement équivalentes *si chacune est conséquence logique de l'autre, i.e. elles ont les mêmes modèles. L'équivalence logique de ϕ et ψ est notée $\phi \equiv \psi$.*

Plusieurs équivalentes logiques remarquables, quelles que soient ϕ et ψ : $\neg\neg\phi \equiv \phi$, $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$, etc.

2.3 Formes normales

Proposition 2.3.1. *Pour toute formule ϕ il existe une formule logiquement équivalente ψ n'utilisant pas le connecteur $\Rightarrow$ et dans laquelle la négation n'est utilisée que sur des variables.*

Exemple 2.3.1. *$\neg(\neg P \Rightarrow Q)$ sera transformé en $\neg P \wedge \neg Q$.*

Démonstration.

— Première possibilité : par induction sur la taille (ou la hauteur de) la formule. Si la formule n'est pas construite (à toplevel) avec une négation ou une implication, on conclut aisément par hypothèse d'induction. Sinon, on se ramène à une formule équivalente avant d'invoquer l'hypothèse d'induction : par exemple pour ϕ de la forme $\neg(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ on appliquera l'hypothèse d'induction sur ϕ_1 et $\neg\phi_2$ pour obtenir ϕ'_1 et ϕ'_2 et on conclut avec $\phi'_1 \wedge \phi'_2$.
— Deuxième possibilité, équivalente : on définit une fonction / un algorithme qui calcule récursivement la transformation, on constate sa correction partielle et on vérifie aisément qu'il termine.
— Troisième possibilité : on oriente les équivalences logiques utiles comme des règles de réécriture, qu'on applique autant que possible sans stratégie particulière ; on vérifie qu'une quantité décroit à chaque réécriture et qu'on a la forme normale attendue quand on ne peut plus réécrire.
Ici, une quantité naturelle est la somme des tailles des sous-formules commençant par une négation ou une implication. □

Dans tous les cas il y a unicité [1] de la forme normale obtenue, qui a une taille linéaire en la taille de la formule de départ, et peut être calculée en temps polynomial.

Définition 2.3.1. *Un littéral est une variable ou la négation d'une variable.*

Proposition 2.3.2 (Forme normale conjonctive)**.** *Toute formule est logiquement équivalente à une conjonction de disjonctions de litéraux.*

Proposition 2.3.3 (Forme normale disjonctive)**.** *Toute formule est logiquement équivalente à une disjonction de conjonctions de litéraux.*

2.4 Le problème de la satisfaisabilité

On a déja vu que SAT, le problème général de satisfaisabilité, est NP-complet : c'est le théorème de Cook. Si on rentrait dans les détails de la preuve, on verrait qu'on a en fait (modulo ajustements mineurs) une preuve que CNF-SAT est NP-complet. Il n'est pas utile de le détailler car on va faire mieux plus bas.

Il n'est pas intéressant de restreindre SAT en fixant l'ensemble des variables utilisables — pourquoi ? Par contre, il est intéressant de voir ce qu'il se passe si on restreint la forme syntaxique des formules :

— Il est clair que DNF-SAT se résout en temps polynomial.
— On verra plus tard que 2-SAT est polynomial et même linéaire.
— En fait, 3-SAT est encore NP-complet. Cela dérive du résultat suivant.

Définition 2.4.1. *On dit que deux formules sont equi-satisfaisables quand la satisfaisabilité de l'une est équivalente à la satisfaisabilité de l'autre. Autrement dit, soit les deux sont satisfaisables, soit aucune ne l'est.*

Proposition 2.4.1 (Transformation de Tseitin)**.** *Pour toute formule ϕ on peut calculer en temps polynomial une formule équisatisfaisable ψ (de taille linéaire en $|\phi|$) en forme 3-CNF.*

Démonstration (à compléter). Soit ϕ une formule de départ. On se donne des nouvelles variables P_ψ pour toute sous-formule de ϕ, y compris ϕ.

On considère la formule $T(\phi) = P_\phi \wedge \bigwedge_{\psi \text{ sous-formule}} t(\psi)$ où les formules $t(\psi)$ sont définies comme suit :

— ...

On vérifie qu'on a bien construit une 3-CNF. On constate de plus qu'il existe une borne k sur la taille de tous les $t(\psi)$, donc la taille de notre formule est linéaire en la taille de ϕ.

Vérifions que la formule construite est équisatisfaisable à ϕ :

— Si on a un modèle $\mathcal{I} \models \phi$ on l'étend en $\mathcal{I}'$ tel que $\mathcal{I}'(P_\psi) = 1$ ssi $\mathcal{I} \models \psi$. On vérifie que $\mathcal{I}' \models T(\phi)$.
— Si on a un modèle $\mathcal{J} \models T(\phi)$ on prend $\mathcal{J}'$ sa restriction aux variables de ϕ et on vérifie $\mathcal{J}' \models \phi$.

□

2.5 Compacité

Théorème 2.5.1. *Un ensemble de formules E est insatisfaisable ssi il existe un sous-ensemble fini $F \subseteq_{\mathsf{fin}} E$ insatisfaisable.*

1. Il n'y a pas unicité dans l'absolu : l'énoncé de notre proposition permet de donner $\bot$ comme forme normale pour $\neg\neg P \wedge \neg P$, mais nos transformations donnent $P \wedge \neg P$.

Démonstration (grandes lignes). La direction intéressante est celle où l'on montre qu'un ensemble insatisfaisable admet un sous-ensemble insatisfaisable. On la démontre par la méthode des arbres sémantiques, sous l'hypothèse que $\mathcal{P}$ est dénombrable. On observera d'abord que l'arbre élagué d'un ensemble de formules a une branche infinie ssi l'ensemble est satisfaisable. L'arbre élagué d'un ensemble insatisfaisable est donc sans branche infinie et, par le lemme de König, il est donc fini. Le sous-ensemble fini recherché est obtenu en collectant les formules décorant les feuilles de cet arbre. □

On verra diverses applications de la compacité : pour montrer que certains ensembles de modèles ne peuvent être axiomatisés ; pour montrer que des problèmes encodables dans SAT satisfont une propriété de compacité analogue ; mais surtout, la compacité nous dit qu'on peut toujours établir une conséquence logique à partir d'un sous-ensemble fini, ce qui est nécessaire pour obtenir des systèmes de preuves finies.

2.6 Résolution

La preuve par résolution travaille sur des formules en CNF, ou plutôt sur le résultat de l'éclatement des conjonctions de telles formules. C'est suffisant pour traiter le problème de la satisfaisabilité : pour décider la satisfaisabilité d'un ensemble de formules, on peut mettre chaque formule en CNF, éclater les conjonctions, et décider la satisfaisabilité de l'ensemble résultant.

2.6.1 Définitions

Un littéral est une variable, ou la négation d'une variable. On définit la négation d'un littéral, notée $\overline{L}$, comme suit :

$$\overline{P} = \neg P \qquad \overline{\neg P} = P$$

Une clause est alors une disjonction de littéraux ; la disjonction vide est $\bot$. Plus précisément, on considère les clauses comme des multi-ensembles de littéraux. Ainsi $C \vee C'$ doit être vu comme une union multi-ensembliste, et $\bot$ est le multi-ensemble vide.

Le système de preuve par résolution est défini par les deux règles suivantes, appelées Résolution et Factorisation :

$$\frac{C \vee L \quad \overline{L} \vee C'}{C \vee C'}\ R \qquad \frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}\ F$$

On dit qu'une clause C est dérivable par résolution à partir d'un ensemble de clauses E quand il existe une arbre de dérivation avec des feuilles dans E, C en conclusion, et utilisant nos deux règles. On note cela $E \vdash_{RF} C$.

Théorème 2.6.1 (Correction)**.**
Pour tous E, C tels que $E \vdash_{RF} C$, on a $E \models C$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que, pour chacune de nos règles, la conclusion est conséquence logique des prémisses. □

La réciproque s'appellerait complétude, mais n'est vraie que quand C est la clause vide : on peut dériver la clause vide à partir de tout ensemble de clauses insatisfaisable, et c'est déja bien utile.

Théorème 2.6.2 (Complétude réfutationnelle)**.**
Pour tout E tel que $E \models \bot$, on a $E \vdash_{RF} \bot$.

Démonstration (grandes lignes). On reprend les outils de la preuve du théorème de compacité. Étant donné un ensemble E, on définit l'ensemble des clauses déductibles à partir de E par résolution :

$$E^* = \{C \mid E \vdash_{RF} C\}$$

On montre aisément que $E^{**} = E^*$.

Supposons maintenant E insatisfaisable. On a aussi E^* insatisfaisable car $E \subseteq E^*$. On montre qu'en plus de cela, l'arbre sémantique de E^* est restreint à la racine, par l'absurde : si l'arbre a un noeud interne, on considère un noeud interne de profondeur maximale, qui a donc pour filles deux feuilles, chacune étant falsifiée par une clause de E^* ; par résolution et factorisation à partir de ces clauses, on obtient une clause de E^* qui falsifie le noeud interne, qui devrait donc être une feuille. L'arbre étant réduit à la racine, on a $\bot \in E^*$, ce qui conclut la démonstration. □

2.6.2 Variantes et stratégies

Résolution ordonnée

Stratégie *set of support*

Algorithme de saturation

Résolution complète

On enrichit la résolution de deux nouvelles règles :

$$\frac{C \vee L \quad \overline{L} \vee C'}{C \vee C'}\ R \qquad \frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}\ F \qquad \frac{C}{C \vee C'}\ A \qquad \frac{}{L \vee \overline{L}}\ T$$

Pour C une clause et E un ensemble de clauses, on note $E \vdash_{RFAT} C$ quand C est dérivable à partir des clauses de E au moyen des règles R, F, A et T.

Théorème 2.6.3. *Ce système est correct et complet : pour tous E et C, on a $E \models C$ ssi $E \vdash_{RFAT} C$.*

Idée de preuve. Ce résultat a été démontré en TD, par transformation des preuves de $E, \overline{L_1}, \ldots, \overline{L_k} \vdash_{RF} C$ en preuves de $E \vdash_{RFAT} C \vee L_1 \ldots \vee L_k$. □

Chapitre 3

Déduction naturelle

Les preuves par déduction naturelle correspondent assez bien aux preuves qu'on écrit en mathématiques, et elles ne nécessitent notamment pas de passer par une mise en CNF c'est le cas pour la résolution. Néanmoins, la déduction naturelle ne vous paraitra pas tout de suite naturelle. En particulier, il n'est pas toujours facile de formuler en déduction naturelle une démonstration mathématique informelle, et il est encore plus difficile d'utiliser la déduction naturelle pour découvrir des démonstrations. Néanmoins, c'est un formalisme important, construit de façon modulaire et jouissant de propriétés riches, dont des connexions avec la programmation fonctionnelle typée pure.

La déduction naturelle est dûe à Gerhard Gentzen en 1934, elle pré-date donc largement la résolution, inventée par Robinson en 1965.

3.1 Définitions

La déduction naturelle est un formalisme de preuve arborescent, où l'on construit des dérivations par applications successives de règles d'inférence, comme en résolution. Contrairement à la résolution, on ne va pas dériver des clauses, ni même des formules, mais des *séquents*.

Définition 3.1.1. *Un séquent est une paire* (Γ, ϕ) *formée d'un multi-ensemble*[1] *de formules* Γ *et d'une formule* ϕ*. On note cet objet* $\Gamma \vdash \phi$*.*

Les formules de Γ sont vues comme des hypothèses, et le séquent énonce intuitivement que la conjonction de ces hypothèses implique ϕ. Il serait naturel d'appeler ϕ la *conclusion* du séquent, mais cela créerait une confusion avec la notion de conclusion d'un arbre de dérivation (dont les noeuds seraient décorés par des séquents). On parle ainsi parfois des antécédents Γ et du succédent ϕ d'un séquent $\Gamma \vdash \phi$.

Définition 3.1.2. *La lecture logique d'un séquent* $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ *est la formule* $\psi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \psi_n \Rightarrow \phi$*. On dit que le séquent est valide quand cette formule est valide.*

3.2 Déduction naturelle minimale

La déduction naturelle minimale, notée NM_0 quand elle porte sur des formules propositionnelles, est le système de preuve composé des règles données en Figure 3.1.

1. La plupart du temps, on peut considérer qu'il s'agit en fait d'un ensemble. C'est le cas quand on cherche une preuve. Cependant, certains résultats sont plus clairs avec des multi-ensembles.

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\ \text{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge_{\text{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \wedge_{\text{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee_{\text{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \vee_{\text{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\ \Rightarrow_{\text{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \Rightarrow_{\text{E}}$$

FIGURE 3.1 – Règles de la déduction naturelle minimale

La première règle, l'axiome ax, a un statut particulier. C'est la seule règle qui exige que quelquechose soit présent à gauche du séquent ; ce sera donc la seule façon d'utiliser une hypothèse. Ensuite, pour chaque connecteur logique on a deux (schémas de) règle(s) :

- La règle d'introduction permet de dériver un séquent ayant comme succédent une formule construite avec ce connecteur.
- La règle d'introduction permet de dériver quelquechose à partir d'un séquent ayant comme succédent une formule construite avec ce connecteur.

On peut remarque que les règles d'introduction et d'élimination d'un connecteur ne parlent que de ce connecteur logique.

Exemple 3.2.1. On peut dériver les séquents suivants :

- $\phi \Rightarrow \psi, \phi \vdash \psi$
- $(\phi \Rightarrow \phi' \Rightarrow \phi'') \vdash (\phi' \Rightarrow \phi \Rightarrow \phi'')$
- $\phi \wedge \phi' \vdash \phi' \wedge \phi$

Les règles d'introduction et d'élimination disent "tout ce qu'il y a à dire" sur chaque connecteur logique, en ce sens qu'elles définissent complètement le connecteur. Par exemple, la règle d'introduction dit qu'il suffit d'avoir ϕ_1 et ϕ_2 pour avoir leur conjonction, et la règle d'introduction énonce qu'on a nécessairement chaque ϕ_i dès lors qu'on a $\phi_1 \wedge \phi_2$. On peut voir cela en jouant à définir un nouveau connecteur, défini par les mêmes règles qu'un connecteur existant, et à vérifier en déduction naturelle que les deux sont équivalents. Par exemple, on peut démontrer $\phi_1 \star \phi_2 \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ et vice versa si l'on ajoute un connecteur logique $\star$ binaire à la syntaxe de nos formules, et que l'on se dote des règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \star \phi_2}\ \star_{\text{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \star \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\ \star_{\text{E}}$$

3.2.1 Propriétés simples

Voyons quelques propriétés simples et utiles de ce système de preuve.

Proposition 3.2.1 (Affaiblissement)**.**
Si $\Gamma \vdash \phi$ *est dérivable dans* NM_0*, alors* $\Gamma, \psi \vdash \phi$ *aussi.*

Proposition 3.2.2 (Renforcement)**.**
Si $\Gamma, \psi \vdash \phi$ *a une dérivation dans* NM_0 *sans règle axiome portant sur* ψ*, alors* $\Gamma \vdash \phi$ *est dérivable dans* NM_0*.*

Proposition 3.2.3 (Coupure)**.**
Si $\Gamma, \phi \vdash \psi$ *et* $\Gamma \vdash \phi$ *sont dérivables dans* NM_0*,*
alors $\Gamma \vdash \psi$ *l'est aussi.*

Toutes ces propositions peuvent s'énoncer comme l'admissibilité de nouvelles règles, que l'on peut distinguer par une double ligne pour insister sur le fait que ce ne sont pas des règles données dans le système de déduction mais des règles qui ne permettent de dériver que des choses qui étaient déja dérivables dans le système de départ :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

On peut remarquer que ces deux règles admissibles ont des statuts un peu différents : la seconde peut être obtenue comme un *widget*, une composition de règles de NM_0, tandis que l'admissibilité de la première nécessite de raisonner sur la dérivation de sa prémisse.

3.2.2 Détours

La structuration des preuves en déduction naturelle fait apparaitre la notion de détour. Comme le nom l'indique, ces détours peuvent être évités pour obtenir des preuves plus directes – mais potentiellement plus grosses.

Définition 3.2.1. *Un détour est l'utilisation d'une règle d'introduction pour dériver la première prémisse d'une règle d'élimination.*

La forme de nos règles fait que les deux règles en question sont forcément l'introduction et l'élimination d'un même connecteur logique.

Exemple 3.2.2.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\,\wedge_{\mathrm{I}}}{\Gamma \vdash \phi_1}\,\wedge_{\mathrm{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}} \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

On peut vérifier que tout détour peut être éliminé. Dans certains cas cette élimination réduit la taille de la preuve, et n'introduit pas de nouveaux détours. Dans le cas de l'implication, la situation est plus compliquée. Néanmoins, l'élimination systématique des détours est possible. Mieux, toute stratégie d'élimination des détours (utilisant les simplifications officielles, détaillées en cours) va aboutir, en temps fini, sur une preuve sans détour.

Théorème 3.2.1. *Tout séquent dérivable dans* NM_0 *admet une dérivation sans détour.*

L'importance de ce résultat se mesure notamment à ses corollaires, qui s'obtiennent simplement en remarquant qu'une dérivation sans détour d'un séquent sans antécédent débute forcément par une règle d'introduction.

Corollaire 3.2.1. *Le séquent* $\vdash \bot$ *n'est pas dérivable en* NM_0*.*

Corollaire 3.2.2. *Si un séquent* $\vdash \phi_1 \vee \phi_2$ *est dérivable en* NM_0*, alors il existe* $i \in \{1, 2\}$ *tel que* $\vdash \phi_i$ *est aussi dérivable.*

Corollaire 3.2.3. *Le tiers exclu n'est pas prouvable en logique minimale.*

3.3 Isomorphisme de Curry-Howard

Interlude : tout ceci ressemble fort à du λ-calcul !

Pour faire simple, ne gardons que l'implication comme seul connecteur logique. Alors un type simple du λ-calcul peut être vu comme une formule : les types de base deviennent des variables propositionnelles, et la flèche devient l'implication. Un jugement de typage $\Gamma \vdash M : T$ induit un séquent, en traduisant les types en formules, et en effaçant le programme M ainsi que les variables de Γ.

Les règles de NM_0 ne sont alors rien d'autre que les règles de typage, auxquelles on a fait subir la traduction précédente. Plus fort : les détours sont les β-redexes, et le Théorème 3.2.1 découle du résultat de normalisation (faible ou forte) pour le λ-calcul simplement typé !

Tout ceci est surprenant, mais aussi fructueux : cette observation est à la base d'une vision des preuves comme des programmes, donnant corps à l'intuition mathématique de "preuve constructive". Quand je prouve $\phi, \phi \Rightarrow \psi \vdash \psi$ en déduction naturelle minimale, je construis en fait un programme qui permet de transformer une preuve de ϕ et preuve de $\phi \Rightarrow \psi$ en une preuve de ψ. Tout ceci s'étend à la conjonction (type produit) et à la disjonction (type somme) et l'on comprend que la preuve de la commutativité de la conjonction n'est autre que le programme qui déconstruit une paire et la reconstruit dans l'autre sens.

3.4 Déduction naturelle intuitionniste

On obtient la déductibles naturelle intuitionniste NJ_0 en ajoutant à NM_0 les règles donnant leur sens aux constantes logiques. Le faux n'a qu'une règle d'élimination (puisqu'on ne peut pas le prouver) et le vrai n'a qu'une règle d'introduction (puisqu'on ne peut rien en déduire) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_{\mathrm{E}}$$

On peut définir dans ce système la négation $\neg\phi$ comme $\phi \Rightarrow \bot$. De façon équivalente, on peut se donner des règles définissant la négation :

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\ \neg_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_{\mathrm{E}}$$

Proposition 3.4.1. *Les règles de* NJ_0 *sont correctes en logique propositionnelle classique : tout séquent dérivable en* NJ_0 *est valide.*

Tout ce qu'on a dit sur la logique minimale reste vrai en logique intuitionniste, notamment la possibilité de transformer toute preuve en preuve sans détour, et l'impossibilité de dériver le tiers-exclu. La logique intuitionniste est parfois appelée logique constructive.

Exemple 3.4.1. On a $\phi \Rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{NJ}} \neg\psi \Rightarrow \neg\phi$, mais on ne pourra pas dériver la réciproque. Intuitivement, montrer une formule en établissant sa contraposée n'est pas un argument constructif.

3.5 Déduction naturelle classique

La déduction naturelle classique NK_0 est enfin obtenue en ajoutant aux règles précédentes l'unique règle suivante, appelée *reductio ad absurdo* :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\ \mathrm{RAA}$$

Théorème 3.5.1. NK_0 *est correcte et complète : un séquent est dérivable dans* NK_0 *ssi il est valide.*

On peut vérifier qu'on sait dériver le tiers-exclu grâce à cette nouvelle règle. Inversement, si on s'était donné le tiers-exclu comme règle, on aurait pu dériver la règle du raisonnement par l'absurde.

Attention, l'introduction de ces nouvelles règles invalide tout ce qu'on a dit sur la notion de détour et les résultats afférents !

3.6 Extension au premier ordre

La déduction naturelle s'étend très bien au delà du calcul propositionnel. En particulier, nous allons l'étudier dans le cadre du calcul des prédicats, aussi appelé logique du premier ordre. Ce langage logique est celui dans lequel la plupart des mathématiques se fait.

3.6.1 Syntaxe

On définit ici la syntaxe des formules du premier ordre. La grande nouveauté est que les variables propositionnelles sont maintenant des prédicats qui énoncent des propriétés à propos d'objets représentés par des termes. Il y a une construction à deux étages, avec les termes en dessous et les formules au dessus, qu'il faut bien comprendre et respecter quand on fait de la logique du premier ordre !

Définition 3.6.1. *Étant donné une signature* $\mathcal{F}$ *spécifiant un ensemble de symboles de fonctions munis d'une arité, et un ensemble de variables* $\mathcal{X}$*, l'ensemble* $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ *des termes est défini inductivement :*

- $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ *;*
- *pour tout* $f \in \mathcal{F}$ *d'arité* k *et* $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$*, on a* $f(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$*.*

Les termes seront toujours notés avec les lettres s, t, u, v, w. Les variables seront notées avec les noms x, y, z.

Exemple 3.6.1. Sur $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ et $\mathcal{F} = \{f, c\}$ avec f d'arité 2 et c d'arité 0, on peut former les termes c, $f(x, c)$, ou encore $f(f(c, c), x)$. Par contre, ni $c(x)$ ni $f(c)$ ne sont des termes.

Définition 3.6.2. *Étant donnés une signature* $\mathcal{F}$ *ainsi qu'un ensemble de variables* $\mathcal{X}$*, et un ensemble de symboles de prédicats* $\mathcal{P}$ *munis d'une arité, on définit inductivement les formules de la logique du premier ordre :*

- $p(t_1, \dots, t_k)$ *est une formule si* $p \in \mathcal{P}$ *d'arité* k *et que les* $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ *;*
- *si* ϕ *et* ψ *sont des formules, alors* $\top$*,* $\bot$*,* $\neg\phi$*,* $\phi \wedge \psi$*,* $\phi \vee \psi$ *et* $\phi \Rightarrow \psi$ *sont des formules ;*
- *si* ϕ *est une formule est* $x \in \mathcal{X}$*, alors* $\forall x.\phi$ *et* $\exists x.\phi$ *sont des formules.*

On dit qu'une variable x est libre dans une formule ϕ quand elle apparait dans ϕ à une position qui n'est pas "sous" une quantification utilisant la même variable. On note $\mathsf{fv}(\phi)$ l'ensemble des variables libres de ϕ. Les termes et formules sont munis d'une opération de substitution, notée $u[x := v]$ ou $\phi[x := v]$. On considèrera les formules modulo renommage des variables liées (ou muettes). Nous reviendrons sur tout cela plus formellement dans la suite...

Dans la suite on suppose $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{X}$ fixés, avec $\mathcal{X}$ infini.

Nous n'avons pas défini de sémantique pour pouvoir définir ce qu'est une formule valide, et donc une règle de déduction valide. Néanmoins, nous pouvons

avancer un peu avec notre connaissance intuitive de la logique du premier ordre, basée sur notre pratique informelle des mathématiques.

3.6.2 Systèmes de preuve

Les séquents manipulés jusque là, contenant des formules de la logique propositionnelle, s'adaptent naturellement à la logique du premier ordre, en considérant simplement des formules du premier ordre. Les règles de la Figure 3.1 peuvent alors être vues comme des règles portant sur des séquents du premier ordre, et elles sont intuitivement raisonnables pour cette logique là.

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.\phi}\ \exists_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x.\phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \exists_{\mathrm{E}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \psi))$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x.\phi}\ \forall_{\mathrm{I}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_{\mathrm{E}}$$

FIGURE 3.2 – Règles de déduction naturelle pour le premier ordre

La déduction naturelle minimale au premier ordre, NM_1, est obtenue en ajoutant les règles de la Figure 3.2 aux règles de la Figure 3.1.

Ensuite, NJ_1 est obtenue en ajoutant à NM_1 les règles du faux et du vrai, puis NK_1 est obtenue en ajoutant la règle du raisonnement par l'absurde. Autrement dit, pour tout $\mathrm{X} \in \{\mathrm{M}, \mathrm{J}, \mathrm{K}\}$, le système NX_1 est obtenu en ajoutant les règles de la Figure 3.2 à celles de NX_0 (vu comme un système de déduction pour des séquents du premier ordre).

Exemple 3.6.2. Si p est un symbole de prédicat unaire et f un symbole de fonction unaire, on peut dériver $\forall x.\ p(x) \vdash \forall x.\ p(f(x))$ dans NM_1.

L'enjeu est de sentir ici l'intérêt des conditions sur les variables libres des formules impliquées dans les règles $\forall_{\mathrm{I}}$ et $\exists_{\mathrm{E}}$. Sans ces conditions, on pourrait dériver des âneries, par exemple $p(x) \vdash \forall x.\ p(x)$.

Nous verrons dans la suite du cours comment munir la logique du premier ordre d'une sémantique, et justifier ainsi les règles. En attendant, une propriété purement preuve-théorique peut déja nous donner confiance dans nos règles :

Proposition 3.6.1. *Si un séquent $\Gamma \vdash \phi$ est dérivable dans l'un des systèmes de déduction naturelle au premier ordre, alors $\Gamma[x := t] \vdash \phi[x := t]$ est dérivable aussi dans le même système.*

Considérons une instance de $\forall_{\mathrm{I}}$, avec une conclusion $\Gamma \vdash \forall x.\phi$ telle que $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)$, et une prémisse $\Gamma \vdash \phi$. Si l'on prouve la prémisse, la proposition précédente nous garantit déja qu'on a aussi des preuves de $\Gamma \vdash \phi[x := t]$ pour tout t (la condition $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)$ nous assure que la substitution n'a pas d'effet sur Γ). On a donc bien vérifié que ϕ était vrai pour toute valeur de x... ou du moins, toute valeur qu'on peut représenter par un terme.

Chapitre 4

Logique du premier ordre

Dans ce chapitre nous introduisons la syntaxe et la sémantique de la *logique du premier ordre*, aussi appelée *calcul des prédicats*. C'est la logique dans laquelle on fait la plupart des mathématiques, elle sert notamment de cadre à la théorie des ensembles, à l'arithmétique, etc. On la retrouve aussi largement en informatique, en preuve automatique (e.g. solveurs SMT), preuve de programmes (cf. logique de Hoare), bases de données, etc.

Les notes de cours de ce chapitre sont fortement inspirées des des notes du MOOC "Introduction à la logique informatique (partie 2)", réalisé par David Baelde, Hubert Comon et Étienne Lozes en 2015.

4.1 Syntaxe

La syntaxe du premier ordre est stratifiée entre termes et formules, qu'il faut bien distinguer. Les termes représentent des individues (entiers naturels, listes, etc.) tandis que les formules représentent des propositions, i.e. des énoncés à propos de ces individus. On utilisera des variables pour représenter des termes arbitraires ; les variables ne pourront représenter des formules. On pourra enfin quantifier sur des termes en représentant un terme arbitraire par une variable. On ne pourra *pas* quantifier sur les formules : cela serait de la logique du *second* ordre.

4.1.1 Termes

Une *signature* est un ensemble $\mathcal{F}$ dont les éléments seront appelés *symboles de fonction*. Chaque symbole $f \in \mathcal{F}$ est muni d'une *arité* $a(f) \in \mathbb{N}$ qui fixe le nombre d'arguments. On se donne de plus un ensemble infini $\mathcal{X}$ de *symboles de variables*, disjoint de $\mathcal{F}$.

Définition 4.1.1. *L'ensemble $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ des* termes *sur la signature $\mathcal{F}$ et les variables $\mathcal{X}$ est le plus petit ensemble tel que :*

— $X \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$;

— *si $f \in \mathcal{F}, a(f) = n$ et $t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.*

Les termes clos*, i.e. sans variables, sont les éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$, qu'on notera simplement $T(\mathcal{F})$.*

Un terme doit être vu comme un arbre fini étiqueté par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{X}$.

On note $\mathsf{fv}(t)$ l'ensemble des variables apparaissant dans le terme t. C'est aussi le plus petit ensemble S tel que $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, S)$.

Exemple 4.1.1. Si l'on suppose que $\mathcal{F}$ est composé des symboles $+, 0, s$ d'arités respectives $2, 0, 1$, et $x \in \mathcal{X}$, alors

$$+(x, x) \qquad \text{et} \qquad +(+(0, +(x, x)), x)$$

sont des termes de $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. On utilise parfois l'écriture en notation infixée pour certains symboles usuels. Par exemple, $+(0, s(0))$ s'écrira aussi $0 + s(0)$.

Dans les exemples, $\mathcal{F}$ est donné en listant ses éléments avec, entre parenthèses, l'arité du symbole correspondant.

Exemple 4.1.2. Si $\mathcal{F} = \{\mathsf{nil}(0), \mathsf{cons}(2), @(2)\}$ et $x, y, z \in \mathcal{X}$, $@(\mathsf{cons}(x, y), z) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

Exemple 4.1.3. Si $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$ et $x, y \in \mathcal{X}$, $\times(s(x), y) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. On écrit aussi $\times(s(x), y)$ en notation infixe : $s(x) \times y$.

On notera que $\mathcal{F}$ peut être vide, auquel cas $T(\mathcal{F})$ est aussi vide. La réciproque n'est pas vraie. Bien sûr, $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ n'est jamais vide.

4.1.2 Formules atomiques

On se donne un ensemble $\mathcal{P}$ dont les éléments seront appelés *symboles de prédicat*. Chacun de ces symboles est à nouveau muni d'une arité. On suppose $\mathcal{P}$ disjoint de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{X}$.

Les termes $P(t_1, \ldots, t_n)$ où $t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ et $P \in \mathcal{P}$ est d'arité n sont appelés *formules atomiques*.

4.1.3 Formules du premier ordre

Définition 4.1.2. *L'ensemble $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$ des formules du premier ordre sur les symboles de prédicat $\mathcal{P}$, les symboles de fonction $\mathcal{F}$ et les variables $\mathcal{X}$ est le plus petit ensemble tel que :*

- *les formules atomiques sont dans $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$;*
- *Si $\phi, \psi \in CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$ et $x \in \mathcal{X}$ alors les formules suivantes sont toutes dans $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$:*

$$\bot,\ \top,\ \phi \wedge \psi,\ \phi \vee \psi,\ \neg\phi,\ \phi \Rightarrow \psi,\ \forall x.\phi,\ \exists x.\phi.$$

Remarquons que, lorsque tous les symboles de $\mathcal{P}$ sont d'arité 0, les formules sans quantificateur de $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$ sont aussi des formules de la logique propositionnelle.

On précisera rarement l'ensemble $\mathcal{X}$ utilisé, car il n'a (dans le cadre de ce cours) par grande importance : on supposera simplement qu'il est infini. Les symboles de $\mathcal{X}$ sont notés avec les lettres x, y, z.

Exemple 4.1.4. Si $\mathcal{P} = \{B(1)\}$ et $\mathcal{X} = \{x, y, z, \ldots\}$,

$$\exists x.\ (B(x) \Rightarrow\ (\forall y.\ B(y)))$$

est une formule de $CP_1(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{X})$. On l'appelle la formule du buveur.

Exemple 4.1.5. La formule suivante n'est pas une formule du premier ordre :

$$\forall P.(P(0) \wedge \forall x.P(x) \Rightarrow P(s(x))) \Rightarrow \forall x.P(x)$$

4.1.4 Variables libres et variables liées

Les quantificateurs *lient* les variables. On définit ainsi $\mathsf{fv}(\phi)$, l'ensemble des variables libres (*free variables*) d'une formule ϕ, par récurrence sur la formule :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{fv}(P(t_1,\ldots,t_n)) & = & \mathsf{fv}(t_1)\cup\ldots\cup\mathsf{fv}(t_n) \quad \text{pour tout } P\in\mathcal{P} \text{ d'arité } n \\ \mathsf{fv}(\bot)=\mathsf{fv}(\top) & = & \emptyset \\ \mathsf{fv}(\phi\wedge\psi)=\mathsf{fv}(\phi\vee\psi) & = & \mathsf{fv}(\phi)\cup\mathsf{fv}(\psi) \\ \mathsf{fv}(\phi\Rightarrow\psi) & = & \mathsf{fv}(\phi)\cup\mathsf{fv}(\psi) \\ \mathsf{fv}(\neg\phi) & = & \mathsf{fv}(\phi) \\ \mathsf{fv}(\exists x.\phi)=\mathsf{fv}(\forall x.\phi) & = & \mathsf{fv}(\phi)\setminus\{x\} \end{array}$$

Quand $\mathsf{fv}(\phi)=\emptyset$, on dit que ϕ est une formule *close*.

On définit ensuite $\mathsf{bv}(\phi)$, l'ensemble des variables liées (*bound variables*) de ϕ, comme l'ensemble des variables x tel que ϕ contient une sous-formule de la forme $\exists x.\psi$ ou $\forall x.\psi$.

Exemple 4.1.6. Si ϕ est la formule

$$P(x)\wedge\exists x.Q(f(x))\wedge\exists x.\exists z.Q(g(x,y,z))$$

alors $\mathsf{fv}(\phi)=\{x,y\}$ et $\mathsf{bv}(\phi)=\{x,z\}$.

4.2 Sémantique

4.2.1 $\mathcal{F}$-algèbres

Etant donné une signature $\mathcal{F}$ une *$\mathcal{F}$-algèbre* $\mathcal{A}$ est constituée d'un ensemble non vide $D_\mathcal{A}$ appelé son *domaine* et, pour chaque symbole de fonction $f\in\mathcal{F}$ d'arité n, d'une fonction $f_\mathcal{A}: {D_\mathcal{A}}^n \to D_\mathcal{A}$.

Exemple 4.2.1. $T(\mathcal{F})$ et $T(\mathcal{F},\mathcal{X})$ sont des $\mathcal{F}$-algèbres, avec $f_{T(\mathcal{F})}(t_1,t_2)=f(t_1,t_2)$ et de même pour $f_{T(\mathcal{F},\mathcal{X})}$.

Exemple 4.2.2. Soit $\mathcal{F}=\{0(0),s(1),+(2)\}$. La $\mathcal{F}$-algèbre canonique pour cette signature est :

$$\big(\mathbb{N},0,(n\mapsto n+1),(x,y\mapsto x+y)\big)$$

Une autre $\mathcal{F}$-algèbre, construite sur l'ensemble des rationnels strictement positifs, est :

$$\big(\mathbb{Q}_+,1,(x\mapsto x\div 2),(x,y\mapsto x\div y)\big)$$

Définition 4.2.1 (Affectation)**.** *Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{F}$-algèbre, une* $\mathcal{A}$-affectation *est une application σ de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{A}$.*

Si $a_1,\ldots,a_n\in\mathcal{A}$, et $\mathcal{X}=\{x_1,\ldots,x_n\}$, on note $\{x_1\mapsto a_1,\ldots,x_n\mapsto a_n\}$ l'affectation σ telle que $\sigma(x_i)=a_i$ pour tout i. Cette notation suppose que $x_1,\ldots,x_n$ sont des variables distinctes.

Définition 4.2.2 (Interprétation)**.** *Si $t\in T(\mathcal{F},\{x_1,\ldots,x_n\})$ et si σ est une affectation dans la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{A}$ telle que $\{x_1,\ldots,x_n\}\subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$, on définit $[\![t]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}$ par induction structurelle sur t :*

$$\begin{array}{rcl} [\![x]\!]_{\sigma,\mathcal{A}} & = & \sigma(x) \\ [\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{\sigma,\mathcal{A}} & = & f_\mathcal{A}([\![t_1]\!]_{\sigma,\mathcal{A}},\ldots,[\![t_n]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}) \end{array}$$

Une substitution θ est une affectation de domaine $\mathcal{X}$ et à images dans la $\mathcal{F}$-algèbre des termes. L'application d'une substitution θ à un terme t, notée $t\theta$, est simplement définie comme $[\![t]\!]_{\theta,T(\mathcal{F},\mathcal{X})}$.

On définit $\mathrm{Dom}(\theta) = \{x \in \mathcal{X} \mid x \neq \theta(x)\}$, c'est l'ensemble des variables sur lesquelles θ "fait quelquechose", qui sera bien souvent fini. On notera parfois une substitution $\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$, il est alors implicite que la substitution se comporte comme la fonction identité sur les autres variables.

Exemple 4.2.3. $[\![x + x]\!]_{\{x\mapsto 1\},\mathbb{N}} = 2$

Exemple 4.2.4. $[\![x + x]\!]_{\{x\mapsto s(0)\},T(\mathcal{F},\mathcal{X})} = s(0) + s(0) = (x + x)\{x \mapsto s(0)\}$

Le résultat suivant explicite le lien entre substitution et interprétation, et se prouve facilement par induction sur t.

Proposition 4.2.1 (substitution)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{F}$-algèbre, $t \in T(\mathcal{F},\mathcal{X})$, $\theta : \mathcal{X} \to T(\mathcal{F},\mathcal{X})$ une substitution, et σ une affectation de domaine $\mathcal{X}$. On a $[\![t\theta]\!]_{\sigma,\mathcal{A}} = [\![t]\!]_{\theta\sigma,\mathcal{A}}$, où $\theta\sigma = x \mapsto [\![\theta(x)]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}$.*

Un autre résultat élémentaire bien utile exprime que $[\![t]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}$ ne dépend que des valeurs $\sigma(x)$ pour $x \in \mathsf{fv}(t)$.

Proposition 4.2.2. *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{F}$-algèbre, $t \in T(\mathcal{F},\mathcal{X})$, σ et σ' des affectations. Si $\sigma|_{\mathsf{fv}(t)} = \sigma'|_{\mathsf{fv}(t)}$, alors $[\![t]\!]_{\sigma,\mathcal{A}} = [\![t]\!]_{\sigma',\mathcal{A}}$.*

4.2.2 $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structures

Définition 4.2.3. *Une $\mathcal{F},\mathcal{P}$-*structure *$\mathcal{S}$ est donnée par une $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{A}$ et, pour chaque symbole de prédicat $P \in \mathcal{P}$ d'arité n une relation $P_{\mathcal{S}} \subseteq D_{\mathcal{A}}^n$, où $D_{\mathcal{A}}$ est le domaine de $\mathcal{A}$.*

On confondra parfois une structure et la $\mathcal{F}$-algèbre sous-jacente.

Soit ϕ une formule, $\mathcal{S}$ une $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structure d'algèbre sous-jacente $\mathcal{A}$ et σ une $\mathcal{A}$-affectation σ telle que $\mathsf{fv}(\phi) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$. On définit la relation de satisfaction $\mathcal{S},\sigma \models \phi$ par récurrence sur ϕ :

- $\mathcal{S},\sigma \models P(t_1,\ldots,t_n)$ si et seulement si $([\![t_1]\!]_{\sigma,\mathcal{A}},\ldots,[\![t_n]\!]_{\sigma,\mathcal{A}}) \in P_{\mathcal{S}}$;
- $\mathcal{S},\sigma \models \phi * \psi$ où $*$ est l'un des connecteurs logiques binaires est défini, comme en calcul propositionnel, à partir des modèles de ϕ et des modèles de ψ, par exemple $\mathcal{S},\sigma \models \phi \vee \psi$ si et seulement si ($\mathcal{S},\sigma \models \phi$ ou $\mathcal{S},\sigma \models \psi$) ;
- $\mathcal{S},\sigma \models \neg\phi$ ssi $\mathcal{S},\sigma \not\models \phi$;
- $\mathcal{S},\sigma \models \exists x.\phi$ ssi il existe $a \in D_{\mathcal{A}}$ tel que $\mathcal{S},\sigma\{x \mapsto a\} \models \phi$;
- $\mathcal{S},\sigma \models \forall x.\phi$ ssi pour tout $a \in D_{\mathcal{A}}$ on a $\mathcal{S},\sigma\{x \mapsto a\} \models \phi$.

Ici $\sigma\{x \mapsto a\}$ désigne l'affectation σ' qui coïncide avec σ sur $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ et telle que $\sigma'(x) = a$.

Proposition 4.2.3. *Soit ϕ une formule, $\mathcal{S}$ une structure, et σ,σ' des affectations coïncidant sur $\mathsf{fv}(\phi)$. On a $\mathcal{S},\sigma \models \phi$ ssi $S,\sigma' \models \phi$.*

Quand ϕ est une formule close (i.e. sans variable libre) on s'autorisera à écrire simplement $\mathcal{S} \models \phi$ pour signifier que $\mathcal{S},\sigma \models \phi$ pour un σ quelconque.

4.2.3 Modèle, validité, conséquence logique

Une structure $\mathcal{S}$ est un *modèle* d'une formule close ϕ si $\mathcal{S} \models \phi$. Un modèle d'un ensemble de formules closes est une structure qui satisfait toutes les formules de l'ensemble. Une formule close est valide quand elle est satisfaite dans tout modèle.

Plus généralement, un modèle d'une formule ϕ telle que $\mathsf{fv}(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est donné par une structure S et une affectation σ tel que $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$, et ϕ est valide quand sa clôture universelle $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ \phi$ est valide.

Ces notions se généralisent à des ensembles de formules, comme suit.

Définition 4.2.4. *Si $\mathcal{E}$ est un ensemble de formules sans variable libre et ϕ est une formule sans variable libre, alors ϕ* est une conséquence logique de $\mathcal{E}$, *ce que l'on note $\mathcal{E} \models \phi$, si, pour toute structure $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \models \mathcal{E}$ entraîne $\mathcal{S} \models \phi$.*

Deux ensembles de formules sans variable libre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont logiquement équivalents *si toute formule de $\mathcal{E}_2$ est conséquence logique de $\mathcal{E}_1$ et, réciproquement, toute formule de $\mathcal{E}_1$ est conséquence logique de $\mathcal{E}_2$.*

Exemple 4.2.5. Soit $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\forall y.P(x,y)$ et $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \forall y.\exists x.P(x,y)$. La formule ϕ a pour conséquence logique ψ, mais la réciproque n'est pas vraie. Autrement dit, $\phi \Rightarrow \psi$ est valide mais il existe une structure ne satisfaisant pas $\psi \Rightarrow \phi$.

Exemple 4.2.6. La formule du buveur (cf. exemple 4.1.4) est valide.

4.3 Substitution

L'application d'une substitution à une formule pose deux problèmes : il ne faut pas remplacer des variables liées ($(\forall x.p(x))\{x \mapsto t\}$ ne doit pas être $(\forall x.p(t))$) ; il ne faut pas que les lieurs de la formule "capturent" des variables des termes insérés par la substitution ($(\forall x.p(y))\{y \mapsto x\}$ ne doit pas être $(\forall x.p(x))$). Pour éviter ces problème on aura recours à l'α-équivalence, qui identifie par exemple $\forall x.p(x)$ et $\forall z.p(z)$, ou encore $\forall x.p(y)$ et $\forall z.p(y)$.

Définition 4.3.1. *Si θ est une substitution, on pose*

$$\mathsf{vars}(\theta) = \mathrm{Dom}(\theta) \cup \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(\theta)} \mathsf{fv}(\theta(x)).$$

On dit que θ est applicable à une formule ϕ quand $\mathsf{bv}(t) \cap \mathsf{vars}(\theta) = \emptyset$, et l'on définit alors $\phi\theta$ par induction sur ϕ :

$$\begin{array}{rcll}
\bot\theta & \stackrel{def}{=} & \bot & \\
\top\theta & \stackrel{def}{=} & \top & \\
(P(t_1,\ldots,t_n))\theta & \stackrel{def}{=} & P(t_1\theta,\ldots,t_n\theta) & \\
(\neg\phi)\theta & \stackrel{def}{=} & \neg(\phi\theta) & \\
(\phi * \psi)\theta & \stackrel{def}{=} & \phi\theta * \psi\theta & \textit{pour } * \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \\
(\mathcal{Q}x.\phi)\theta & \stackrel{def}{=} & \mathcal{Q}x.(\phi\theta) & \textit{pour } \mathcal{Q} \in \{\exists, \forall\}
\end{array}$$

Autrement dit, $\phi\theta$ est obtenue à partir de t en remplaçant chaque terme t apparaissant dans ϕ (nécessairement en argument d'un prédicat) par $t\theta$.

Proposition 4.3.1 (substitution)**.** *Soit ϕ une formule, θ une substitution applicable à ϕ, $\mathcal{S}$ une structure, et σ une affectation de domaine $\mathcal{X}$. On a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi\theta$ ssi $\mathcal{S}, \theta\sigma \models \phi$.*

Démonstration. On procède par induction sur ϕ, les cas intéressants étant ceux des quantificateurs. Considérons le cas où ϕ est de la forme $\forall x.\psi$. On a les équivalences suivantes :

	$\mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\psi\theta$	
ssi	pour tout $a \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}, \sigma\{x \mapsto a\} \models \psi\theta$	par définition de la satisfaction
ssi	pour tout $a \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}, \theta(\sigma\{x \mapsto a\}) \models \psi$	par hypothèse d'induction sur ψ

On remarque alors que $\theta(\sigma\{x \mapsto a\}) = (\theta\sigma)\{x \mapsto a\}$: les deux affectations valent a en x car $x \in \mathsf{bv}(\phi)$ donc $x \notin \mathrm{Dom}(\theta)$, i.e. $\theta(x) = x$; elles coïncident sur toute autre variable y car $[\![\theta(y)]\!]_{\sigma\{x\mapsto a\}} = [\![\theta(y)]\!]_\sigma$ puisque $x \in \mathsf{bv}(\phi)$ entraîne $x \notin \mathsf{fv}(\theta(y))$. On conclut alors aisément par les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\psi\theta \\ \text{ssi} & \text{pour tout } a \in \mathcal{S},\ \mathcal{S}, \theta(\sigma\{x \mapsto a\}) \models \psi \\ \text{ssi} & \text{pour tout } a \in \mathcal{S},\ \mathcal{S}, (\theta\sigma)\{x \mapsto a\} \models \psi \\ \text{ssi} & \mathcal{S}, \theta\sigma \models \forall x.\psi \end{array}$$

□

On définit maintenant l'α-équivalence qui va nous permettre, pour tout θ et ϕ, de toujours nous ramener à une formule α-equivalente (et logiquement équivalente) ψ pour laquelle θ est applicable.

Définition 4.3.2. *La relation d'α-renommage est définie par*

$$\mathcal{Q}x.\phi \to_\alpha \mathcal{Q}y.\phi\{x \mapsto y\}$$

où $\mathcal{Q}$ est un quantificateur, ϕ une formule, x et y sont des variables telles que $y \notin \mathsf{fv}(\phi)$ et que la substitution $\{x \mapsto y\}$ s'applique à ϕ.

L'α-équivalence $\equiv_\alpha$ est la plus petite congruence[1] *contenant l'α-renommage.*

Proposition 4.3.2. *Pour tous ϕ et θ il existe $\psi \equiv_\alpha \phi$ tel que θ s'applique à ψ.*

Idée de preuve. On peut toujours changer, par α-renommage, les variables liées de ϕ (en traitant les quantificateurs du plus interne au plus externe) pour éviter l'ensemble fini $\mathsf{vars}(\theta)$. □

Proposition 4.3.3. *Deux formules α-équivalentes sont logiquement équivalentes : pour tous $\mathcal{S}$, σ, ϕ et ψ tels que $\phi \equiv_\alpha \psi$, on a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ ssi $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour l'α-renommage, cela passe ensuite directement à la congruence. On détaille seulement le cas d'une quantification existentielle. Soit $\exists x.\phi \to_\alpha \exists y.\phi\{x \mapsto y\}$ avec $y \notin \mathsf{fv}(\phi)$ et $\{x \mapsto y\}$ s'appliquant à ϕ. On vérifie :

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\phi \\ \text{ssi} & \text{il existe } a \text{ tel que } \mathcal{S}, \sigma\{x \mapsto a\} \models \phi \\ \text{ssi} & \text{il existe } a \text{ tel que } \mathcal{S}, \{x \mapsto y\}(\sigma\{y \mapsto a\}) \models \phi \\ \text{ssi} & \text{il existe } a \text{ tel que } \mathcal{S}, \sigma\{y \mapsto a\} \models \phi\{x \mapsto y\} \\ \text{ssi} & \mathcal{S}, \sigma \models \exists y.\phi\{x \mapsto y\} \end{array}$$

On notera bien l'utilisation de $y \notin \mathsf{fv}(\phi)$ pour la deuxième étape, et de l'applicabilité de $\{x \mapsto y\}$ à ϕ pour l'étape suivante. □

4.4 Exemples de théories

Exemple 4.4.1. L'ensemble des formules données dans la figure 4.1 est connu sous le nom d'*axiomes de l'égalité*. C'est un ensemble fini de formules si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ sont finis. On note, comme nous en avons l'habitude, $u = v$ au lieu de $=(u, v)$.

Toute structure $\mathcal{S}$ dans laquelle $=$ est interprété par l'égalité sur $D_\mathcal{S}$ est un modèle de $\mathcal{A}_{eq}$.

1. Une congruence est une relation d'équivalence qui passe au contexte : ici cela signifie que $\phi \equiv_\alpha \psi$ entraîne $\phi \wedge \phi' \equiv_\alpha \psi \wedge \phi'$, $\forall x.\phi \equiv_\alpha \forall x.\psi$, etc.

$$\forall x. \quad x = x$$

$$\forall x, y. \quad x = y \Leftrightarrow y = x$$

$$\forall x, y, z. \quad (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout symbole $f \in \mathcal{F}$ d'arité n :

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n. \quad (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i = y_i) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout symbole $P \in \mathcal{P}$ d'arité n :

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n. \quad (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i = y_i) \Rightarrow P(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow P(y_1, \ldots, y_n)$$

FIGURE 4.1 – Axiomes de l'égalité : $\mathcal{A}_{eq}$

$$\begin{array}{lrcl}
\forall x. & 0 + x = x & & \\
\forall x, y. & s(x) + y = s(x + y) & & \\
\forall x. & 0 \times x = 0 & & \\
\forall x, y. & s(x) \times y = (x \times y) + y & & \\
\forall x. & s(x) \neq 0 & & \\
\forall x, y. & s(x) = s(y) & \Rightarrow & x = y \\
\forall x. \exists y. & x \neq 0 & \Rightarrow & x = s(y)
\end{array}$$

FIGURE 4.2 – Arithmétique élémentaire : $\mathcal{A}_{EL}$

Proposition 4.4.1. *Soit $\mathcal{S}$ une structure satisfaisant $\mathcal{A}_{eq}$. Il existe une structure $\mathcal{S}'$ dans laquelle $=$ est interprété comme l'égalité (sur $D_{\mathcal{S}'}$) telle que pour toute formule close ϕ, on a $\mathcal{S} \models \phi$ ssi $\mathcal{S}' \models \phi$.*

Exemple 4.4.2. On considère ici $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{\geq(2)\}$. L'algèbre des entiers naturels (avec l'ordre habituel sur les entiers) satisfait la formule suivante :

$$\begin{array}{ll}
& \forall x. \geq(x, 0) \\
\wedge & \forall x. \geq(x, x) \\
\wedge & \forall x, y. \geq(x, y) \Rightarrow \geq(s(x), s(y))
\end{array}$$

Cette formule est aussi satisfaite par d'autres structures sur l'algèbre des entiers naturels, par exemple la structure où $\geq$ est toujours vrai.

Exercice 4.4.1. *On considère cette fois $\mathcal{F} = \{@(2), \mathsf{cons}(2), \mathsf{nil}(0)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$ et la formule suivante, censée définir $@$:*

$$\forall x, y, z. \quad @(\mathsf{nil}, x) = x \ \wedge \ @(\mathsf{cons}(x, y), z) = \mathsf{cons}(x, @(y, z))$$

Donner un exemple de structure $\mathcal{S}$ qui satisfait ces formules ainsi que les axiomes de l'égalité, mais dans laquelle $\mathcal{S} \not\models \forall x, y, z.\ @(x, @(y, z)) = @(@(x, y), z)$.

Exemple 4.4.3. On considère ici $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), \times(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{= (2)\}$. Comme nous en avons l'habitude, nous notons $u \neq v$ au lieu de $\neg(u = v)$, $u + v$ au lieu de $+(u, v)$, $u \times v$ au lieu de $\times(u, v)$. L'ensemble des sept formules de la figure 4.2, auquel on ajoute les axiomes de l'égalité, est connu sous le

nom d'*arithmétique élémentaire*. Il s'agit de la plus simple des tentatives pour axiomatiser les entiers naturels : la structure construite sur les entiers naturels, dans laquelle tous ces symboles ont leur interprétation usuelle, est un modèle de l'arithmétique élémentaire. En revanche, il existe des modèles de $\mathcal{A}_{EL}$ qui ne satisfont pas la commutativité de l'addition $\forall x, y.\ x + y = y + x$.

Chapitre 5

Théorie des modèles

Nous abordons deux résultats centraux : le théorème de Skolem et celui de Herbrand, qui ont notamment pour conséquence le résultat de compacité pour la logique du premier ordre, mais aussi des résultats sur la cardinalité des modèles, ainsi qu'une porte ouverte vers des systèmes de preuve complets.

5.1 Mise en forme prénexe

Définition 5.1.1 (Forme prénexe)**.** *Une formule est* en forme prénexe *si elle est de la forme*

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\ \varphi$$

où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$ *et* φ *est sans quantificateurs.*

On considère les règles de transformation suivantes.

$(Qx.\ \varphi) * \psi$	$\rightsquigarrow$	$Qx.\ (\varphi * \psi)$	si $x \notin \mathsf{fv}(\psi)$, et $* \in \{\wedge, \vee\}$
$\psi * (Qx.\ \varphi)$	$\rightsquigarrow$	$Qx.\ (\psi * \varphi)$	si $x \notin \mathsf{fv}(\psi)$, et $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$
$\neg\exists x.\ \varphi$	$\rightsquigarrow$	$\forall x.\ \neg\varphi$	
$\neg\forall x.\ \varphi$	$\rightsquigarrow$	$\exists x.\ \neg\varphi$	
$(\forall x.\ \varphi) \Rightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$\exists x.\ (\varphi \Rightarrow \psi)$	si $x \notin \mathsf{fv}(\psi)$
$(\exists x.\ \varphi) \Rightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$\forall x.\ (\varphi \Rightarrow \psi)$	si $x \notin \mathsf{fv}(\psi)$

Exemple 5.1.1. On peut appliquer ces transformations de deux façons différentes à la formule ci-dessous.

$$\big(\forall x.\ B(x)\big) \Rightarrow \big(\forall x.\ B(x)\big)$$

$$\equiv_\alpha$$

$$\big(\forall x.\ B(x)\big) \Rightarrow \big(\forall y.\ B(y)\big)$$

$$\exists x.\ \Big(B(x) \Rightarrow \big(\forall y.\ B(y)\big)\Big) \qquad\qquad \forall y.\ \Big(\big(\forall x.\ B(x)\big) \Rightarrow B(y)\Big)$$

$$\exists x. \forall y.\ \big(B(x) \Rightarrow B(y)\big) \qquad\qquad \forall y. \exists x.\ \big(B(x) \Rightarrow B(y)\big)$$

On étend la notion d'équivalence logique aux formules ayant des variables libres : deux formules φ, ψ sont logiquement équivalentes si pour toute structure $\mathcal{S}$, pour toute $\mathcal{S}$-affectation σ interprétant les variables libres de ces formules, $\mathcal{S}, \sigma \models \varphi$ ssi $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$.

Lemme 5.1.1 (Correction des règles)**.** *Si $\varphi \rightsquigarrow \psi$, alors φ et ψ sont logiquement équivalentes.*

Démonstration. Comme l'équivalence logique est une congruence [1], il suffit de prouver ce lemme lorsque la réécriture a lieu à la racine de la formule. On raisonne par analyse de cas. Considérons la règle

$$\underbrace{(\exists x.\ \varphi_1) \vee \varphi_2}_{=\phi} \ \rightsquigarrow\ \underbrace{\exists x.\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)}_{=\psi}.$$

On veut montrer que pour tout $\mathcal{S}, \sigma$, on a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ ssi $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$. Soit $\mathcal{S}, \sigma$ fixés.

— Supposons que $\mathcal{S}, \sigma \models \varphi$. Alors $\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\ \varphi_1$ ou $\mathcal{S}, \sigma \models \varphi_2$.

Si	$\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\ \varphi_1$	(1^{er} cas)
alors	il existe $a \in D_{\mathcal{S}}$ tel que $\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_1$	(def. de $\models$)
donc	il existe $a \in D_{\mathcal{S}}$ tel que $\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$	(def. de $\models$)
donc	$\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	(def. de $\models$)
Si	$\mathcal{S}, \sigma \models \varphi_2$	($2^{\text{ème}}$ cas)
alors	il existe $a \in D_{\mathcal{S}}$.$\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_2$	($D_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$)
donc	il existe $a \in D_{\mathcal{S}}$ tel que $\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$	(def. de $\models$)
donc	$\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	(def. de $\models$)

Dans les deux cas, $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$.

— Supposons maintenant que $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$. Alors il existe $a \in D_{\mathcal{S}}$ tel que $\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ (par def de $\models$).

Si	$\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_1$	(premier cas)
alors	$\mathcal{S}, \sigma \models \exists x.\ \varphi_1$	(par def. de $\models$)
donc	$\mathcal{S}, \sigma \models (\exists x.\ \varphi_1) \vee \varphi_2$	(par def. de $\models$)
Si	$\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \varphi_2$	(deuxième cas)
alors	$\mathcal{S}, \sigma \models \varphi_2$	($x \notin \mathsf{fv}(\varphi_2)$)
donc	$\mathcal{S}, \sigma \models (\exists x.\ \varphi_1) \vee \varphi_2$	(par def. de $\models$)

Dans les deux cas, $\mathcal{S}, \sigma \models \varphi$.

Les autres règles se traitent de façon similaire, voire parfois plus simplement car certaines règles ne reposent pas sur l'hypothèse que $D_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$. □

Théorème 5.1.1. *Pour toute formule φ, on peut calculer une formule φ' logiquement équivalente à φ et en forme prénexe.*

Démonstration. Un algorithme consiste à appliquer les transformations précédentes (et, si besoin, l'α-renommage) jusqu'à obtenir une forme prénexe. On a vu que ces transformations sont correctes. L'argument de terminaison est laissé en exercice. □

5.2 Forme normale négative

Définition 5.2.1 (Littéral)**.** *Un* littéral *est une formule de la forme $P(t_1, \ldots t_n)$ ou sa négation.*

Définition 5.2.2 (Forme normale négative)**.** *Une formule φ est en* forme normale négative *si*

1. *φ ne contient aucune implication, et*
2. *les seules sous-formules de φ de la forme $\neg\psi$ sont les littéraux.*

1. Si on remplace dans une formule Φ une sous-formule ϕ par une formule ψ logiquement équivalente, alors on obtient une formule logiquement équivalente à Φ.

Exemple 5.2.1. La formule $\exists x.\big((\neg P(x)) \vee \exists y.Q(x,y)\big)$ est en forme normale négative, mais les formules $\exists x.\neg\big(P(x) \vee \exists y.Q(x,y)\big)$ et $\exists x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x,y)$ ne le sont pas.

Proposition 5.2.1. *Pour toute formule φ, on peut calculer une formule φ' en forme normale négative logiquement équivalente à φ.*

Démonstration. On considère les règles de réécriture suivantes.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi \Rightarrow \psi & \rightsquigarrow & \neg\varphi \vee \psi \\
\neg(\forall x.\ \varphi) & \rightsquigarrow & \exists x.\neg\varphi \\
\neg(\exists x.\ \varphi) & \rightsquigarrow & \forall x.\neg\varphi \\
\neg(\varphi \vee \psi) & \rightsquigarrow & (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \\
\neg(\varphi \wedge \psi) & \rightsquigarrow & (\neg\varphi) \vee (\neg\psi) \\
\neg\neg\varphi & \rightsquigarrow & \varphi
\end{array}$$

On laisse en exercice la preuve que toute suite de réécritures $\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 \rightsquigarrow \ldots$ est finie. On observe aisément que, si $\varphi \not\rightsquigarrow$, alors φ est en forme normale négative. Enfin, si $\varphi \rightsquigarrow \psi$, alors φ et ψ sont logiquement équivalentes.

Ainsi, si φ est une formule arbitraire et si φ' est obtenue à partir de φ par une suite maximale de réécritures, alors φ' est en forme normale négative et logiquement équivalente à φ. □

5.3 Skolémisation

Nous abordons maintenant une transformation nettement plus surprenante, qui va permettre d'éliminer les quantificateurs existentiels : c'est la skolémisation.

Naturellement, nous allons utiliser ici la possibilité de travailler sur des formules en forme normale négative — sans cela, la distinction entre quantificateurs existentiels et universels n'aurait de sens que si on comptait le nombre de négations (et d'implications) au dessus des quantificateurs.

Attention ! la skolémisation d'une formule ne sera pas logiquement équivalente à la formule de départ, mais seulement équisatisfaisable, i.e. l'une est satisfaisable ssi l'autre est satisfaisable.

5.3.1 La transformation

On se donne un ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F}$ et un ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P}$. Pour chaque $(\mathcal{F},\mathcal{P})$-formule φ et pour chaque variable x, on se donne un nouveau symbole de fonction $f_{\varphi,x}$ d'arité $|\mathsf{fv}(\exists x.\varphi)|$. On note $\overline{\mathcal{F}}$ l'ensemble de symboles de fonction $\mathcal{F}$ augmenté de ces nouveaux symboles de fonction, autrement dit

$$\overline{\mathcal{F}} \ = \ \mathcal{F} \uplus \{f_{\varphi,x} \mid \varphi \text{ est une } (\mathcal{F},\mathcal{P})\text{-formule}, x \in X\}.$$

Enfin, pour tout φ, x, on se fixe une énumération $\vec{y}_{\varphi,x} = (y_1,\ldots,y_n)$ de $\mathsf{fv}(\exists x.\varphi)$.

Définition 5.3.1 (skolémisation)**.** *Soit φ une $(\mathcal{F},\mathcal{P})$-formule. La skolémisée de φ, notée $\mathsf{Sk}(\varphi)$, est la $(\overline{\mathcal{F}},\mathcal{P})$-formule définie par récurrence sur la taille de φ comme suit.*

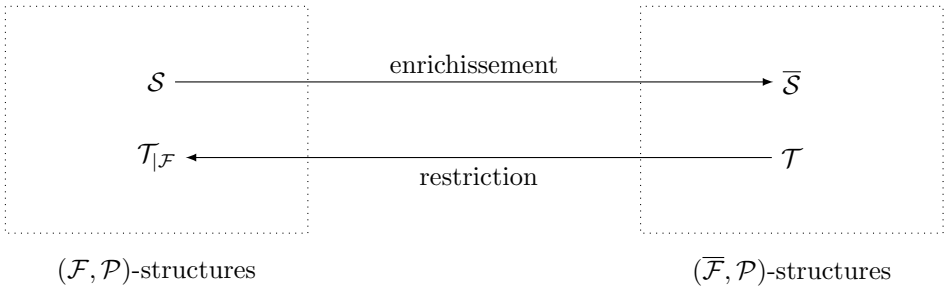
$$\begin{array}{lll}
\mathsf{Sk}(P(t_1,\ldots,t_n)) & = P(t_1,\ldots,t_n) & \\
\mathsf{Sk}(\neg\varphi) & = \neg\mathsf{Sk}(\varphi) & \\
\mathsf{Sk}(\varphi * \psi) & = \mathsf{Sk}(\varphi) * \mathsf{Sk}(\psi) & (* \in \{\vee,\wedge,\Rightarrow\}) \\
\mathsf{Sk}(\forall x.\varphi) & = \forall x.\mathsf{Sk}(\varphi) & \\
\mathsf{Sk}(\exists x.\varphi) & = \mathsf{Sk}(\varphi)\{x \mapsto f_{\varphi,x}(\vec{y}_{\varphi,x})\} &
\end{array}$$

En anticipant un peu sur la suite on remarquera que, même si $\mathsf{Sk}(\phi)$ est définie pour tout ϕ, il faudra supposer ϕ en forme normale négative pour obtenir le théorème de Skolem, qui dit que ϕ et $\mathsf{Sk}(\phi)$ sont équisatisfaisables.

Exemple 5.3.1. Soit φ la formule $\exists x \forall y \exists z.\ z*(x*y) \neq z$. On note c le symbole de Skolem d'arité 0 associé à x et $\forall y \exists z. z*(x*y) \neq z$, et f le symbole de Skolem d'arité 1 associé à z et $z*(x*y) \neq z$. Alors $\mathsf{Sk}(\varphi) = \forall y.\ f(c,y)*(c*y) \neq f(c,y)$.

5.3.2 Interprétation des symboles de Skolem

Il nous faut définir et étudier les deux foncteurs de structures suivants.



Soit $\mathcal{S}$ une $(\mathcal{F},\mathcal{P})$-structure. On veut construire à partir de $\mathcal{S}$ une $(\overline{\mathcal{F}},\mathcal{P})$-structure $\overline{\mathcal{S}}$. Pour être tout à fait constructif, on a besoin de se donner une fonction $\mathsf{choix} : 2^{D_\mathcal{S}} \to D_\mathcal{S}$ telle que pour toute partie $T \neq \emptyset$ de $D_\mathcal{S}$, $\mathsf{choix}(T) \in T$. On peut supposer donnée une telle fonction en invoquant l'axiome du choix. De plus, comme $D_\mathcal{S} \neq \emptyset$, on peut se donner un élément $a_0 \in D_\mathcal{S}$ tel que $\mathsf{choix}(\emptyset) = a_0$.

Soit x, φ fixés, et soient $y_1, \ldots, y_n$ les variables libres de $\exists x.\varphi$. Pour tout $b_1, \ldots b_n \in D_\mathcal{S}$, on pose

$$T_{x,\varphi}(b_1,\ldots,b_n) := \left\{ a \in D_\mathcal{S} \mid \mathcal{S}, \{\vec{y} \mapsto \vec{b}, x \mapsto a\} \models \varphi \right\}$$

l'ensemble des témoins pour $\exists x.\varphi$ dans $\mathcal{S}$ avec l'affectation $\{\vec{y} \mapsto \vec{b}\}$.

On peut maintenant définir $\overline{\mathcal{S}}$:

— le domaine de $\overline{\mathcal{S}}$ est celui de $\mathcal{S}$, i.e. $D_{\overline{\mathcal{S}}} = D_\mathcal{S}$;
— $P_{\overline{\mathcal{S}}} = P_\mathcal{S}$ pour tout symbole de prédicat $P \in \mathcal{P}$
— $f_{\overline{\mathcal{S}}} = f_\mathcal{S}$ pour tout symbole de fonction "original" $f \in \mathcal{F}$
— enfin, pour $f \in \overline{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F}$ un symbole de Skolem associé à x et φ, on pose $f_{\overline{\mathcal{S}}}(\vec{b}) = \mathsf{choix}(T_{x,\varphi}(\vec{b}))$.

Lemme 5.3.1. *Soit $\mathcal{S}$ une $(\mathcal{F},\mathcal{P})$-structure. Pour toute $(\mathcal{F},\mathcal{P})$-formule φ et pour toute affectation σ telle que* $\mathrm{Dom}(\sigma) \supseteq \mathsf{fv}(\varphi)$,

$$\mathcal{S}, \sigma \models \varphi \qquad \textit{ssi} \qquad \overline{\mathcal{S}}, \sigma \models \mathsf{Sk}(\varphi).$$

Démonstration. On raisonne par induction sur φ. Si φ est une formule atomique, c'est trivial. Si φ commence par un connecteur $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$, c'est aussi trivial (pour la négation, noter que l'on montre une équivalence). Reste le cas des quantificateurs : le cas du $\forall$ est aussi trivial, mais ne fera pas de mal d'être détaillé pour s'en persuader, et le cas du $\exists$ utilise tout ce que l'on vient de définir.

— Supposons φ de la forme $\forall x.\psi$. Alors

	$\mathcal{S}, \sigma \models \varphi$	
ssi	pour tout a dans $D_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \psi$	par def. de $\models$
ssi	pour tout a dans $D_{\mathcal{S}}$, $\overline{\mathcal{S}}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \mathsf{Sk}(\psi)$	par induction
ssi	$\overline{\mathcal{S}}, \sigma \models \forall x.\mathsf{Sk}(\psi)$	par def. de $\models$
ssi	$\overline{\mathcal{S}}, \sigma \models \mathsf{Sk}(\varphi)$	par def. de $\mathsf{Sk}(.)$

— Supposons φ de la forme $\exists x.\psi$, et notons $b_i = \sigma(y_i)$. On a

	$\mathcal{S}, \sigma \models \varphi$	
ssi	$T_{x,\psi}(\vec{b}) \neq \emptyset$	par def. de $T_{x,\psi}$
ssi	$f_{\overline{\mathcal{S}}}(\vec{b}) \in T_{x,\psi}(\vec{b})$	par def. de $f_{\overline{\mathcal{S}}}$
ssi	$\mathcal{S}, \sigma \uplus \{x \mapsto f_{\overline{\mathcal{S}}}(\vec{b})\} \models \psi$	par def. de $T_{x,\psi}$
ssi	$\overline{\mathcal{S}}, \sigma \uplus \{x \mapsto f_{\overline{\mathcal{S}}}(\vec{b})\} \models \mathsf{Sk}(\psi)$	par induction
ssi	$\overline{\mathcal{S}}, \sigma \models \big(\mathsf{Sk}(\psi)\big)\{x \mapsto f(\vec{y})\}$	par le lemme de substitution
ssi	$\overline{\mathcal{S}}, \sigma \models \mathsf{Sk}(\varphi)$	par def de $\mathsf{Sk}(.)$

□

5.3.3 Restriction

Contrairement au foncteur d'enrichissement, le foncteur de restriction ne préserve la satisfaction que pour certaines formules. C'est le cas notamment pour les formules en forme normale négative.

Lemme 5.3.2. *Soit $\mathcal{S}'$ une $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{P})$-structure. Pour toute $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$-formule φ en forme normale négative, et pour toute affectation σ telle que $\mathsf{fv}(\varphi) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$,*

$$\textit{si} \quad \mathcal{S}', \sigma \models \mathsf{Sk}(\varphi) \quad \textit{alors} \quad \mathcal{S}'_{|\mathcal{F}}, \sigma \models \varphi.$$

Démonstration. On raisonne par induction sur φ. Au contraire du lemme précédent dans lequel on prouvait une équivalence, nous ne prouvons ici qu'une implication. Le cas de base est maintenant celui des littéraux, puisque nous avons supposé la formule en forme normale négative.

La récurrence est facile pour les connecteurs $\wedge, \vee$ et les quantifications universelles. Noter qu'elle ne marcherait pas pour des négations ou des implications, pour lesquelles nous aurions besoin d'une hypothèse d'induction plus forte (une équivalence et pas seulement une implication).

A nouveau le seul cas intéressant est celui du $\exists$, mais on détaillera aussi celui du $\forall$ pour s'en convaincre. Soit φ fixée, et supposons $\mathcal{S}', \sigma \models \varphi$.

— Si $\varphi = \forall x.\psi$, alors

	$\mathcal{S}', \sigma \models \forall x.\mathsf{Sk}(\psi)$	par def. de $\mathsf{Sk}(.)$
donc	pour tout $a \in D_{\mathcal{S}'}$, $\mathcal{S}', \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \mathsf{Sk}(\psi)$	par def. de $\models$
donc	pour tout $a \in D_{\mathcal{S}'}$, $\mathcal{S}'_{|\mathcal{F}}, \sigma \uplus \{x \mapsto a\} \models \psi$	par induction
donc	$\mathcal{S}'_{|\mathcal{F}}, \sigma \models \forall x.\psi$	par def de $\models$

— Si $\varphi = \exists x.\psi$, et si $f = f_{\psi,x,\vec{y}}$, alors

	$\mathcal{S}', \sigma \models \mathsf{Sk}(\psi)\{x \mapsto f(\vec{y}_{\varphi,x})\}$	par def. de $\mathsf{Sk}(.)$
donc	$\mathcal{S}', \sigma \uplus \{x \mapsto f_{\mathcal{S}'}(\vec{y}_{\varphi,x}\sigma)\} \models \mathsf{Sk}(\psi)$	par le lemme de substitution
donc	$\mathcal{S}'_{|\mathcal{F}}, \sigma \uplus \{x \mapsto f_{\mathcal{S}'}(\vec{y}_{\varphi,x}\sigma)\} \models \psi$	par induction
donc	$\mathcal{S}'_{|\mathcal{F}}, \sigma \models \exists x.\psi$	par def de $\models$

□

On peut aussi montrer ce résultat en remplaçant l'hypothèse "en forme normale négative" par l'hypothèse "en forme prénexe", ce qui est souvent fait dans la littérature. Le point clé dans le lemme précédent est que les quantificateurs existentiels ne doivent pas apparaitre sous des négations, ce qui est vrai à la fois pour la forme normale négative et pour la forme prénexe.

Étant donné un ensemble de formules E, on note $\mathsf{Sk}(E) = \{\mathsf{Sk}(\phi) \mid \phi \in E\}$. On dit qu'un ensemble de formules (ayant potentiellement des variables libres) est satisfaisable quand il existe $\mathcal{S}, \sigma$ tel que $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ pour tout $\phi \in E$.

Théorème 5.3.1. *Pour tout ensemble de formules E en forme normale négative, E et $\mathsf{Sk}(E)$ sont équisatisfaisables.*

5.4 Théorème de Herbrand

Nous avons déjà réduit le cas général à la satisfaisabilité d'un ensemble de formules purement universel. Nous allons plus loin ici en montrant qu'un ensemble de formules purement universel est satisfaisable si et seulement si il a un modèle dans une classe bien particulière : les structures de Herbrand. Ceci permettra ensuite de se ramener au calcul propositionnel (au prix de passer d'un ensemble fini de formules à un ensemble infini de formules) et de donner une procédure pour l'insatisfaisabilité (ou la validité).

Définition 5.4.1 (Structure et base de Herbrand)**.** *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de symboles de fonction qui contient une constante, et $\mathcal{P}$ un ensemble de symboles de prédicats.*

1. *Une* $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand *$\mathcal{H}$ est une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de domaine l'ensemble des termes clos, noté $T(\mathcal{F})$, et dans laquelle les symboles de fonctions ont leur interprétation canonique sur le domaine des termes, i.e., $f_{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ d'arité n et pour tous $t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F})$.*
2. *La* $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-base de Herbrand *est l'ensemble des atomes clos sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$: $\mathcal{B} = \{P(t_1, \ldots, t_n\} \mid t_i \in T(\mathcal{F}), P \in \mathcal{P}\}$.*

Étant donnés $\mathcal{F}, \mathcal{P}$, toutes les structures de Herbrand ont le même domaine et interprètent les symboles de fonction de la même façon. La seule liberté qui reste dans le choix d'une structure de Herbrand est le choix des interprétations des symboles de prédicat.

On peut donc identifier chaque $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand avec une partie de la $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-base de Herbrand : On identifie une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand $\mathcal{H}$ avec la partie de la $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-base de Herbrand qui consiste en tous les atomes clos qui sont vrais en $\mathcal{H}$. Ainsi, la structure de Herbrand où tous les prédicats sont toujours faux correspond à l'ensemble vide, et la structure de Herbrand où tous les prédicats sont toujours vrais correspond à la base de Herbrand elle-même.

Dans la suite nous supposons que $\mathcal{F}$ contient toujours une constante, pour assurer que $T(\mathcal{F})$ est non vide. Remarquons que, si S est un ensemble de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules et $\mathcal{F}$ ne contient pas de constante, alors S possède un $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-modèle si et seulement si S possède un $\mathcal{F} \cup \{a\}, \mathcal{P}$-modèle où a est un symbole de constante.

Une formule est *universelle* si elle est en forme prénexe et toutes ses variables sont quantifiées universellement.

Théorème 5.4.1 (Herbrand)**.** *Un ensemble E de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules universelles a un modèle ssi il a un modèle qui est une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand.*

Démonstration. Un seul sens de l'implication demande une preuve : supposons que $\mathcal{S} \models E$. On considère alors, pour chaque $P \in \mathcal{P}$ l'interprétation $P_\mathcal{H}$ dans l'univers de Herbrand :

$$P_\mathcal{H} = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid ([\![t_1]\!]_\mathcal{S}, \ldots, [\![t_n]\!]_\mathcal{S}) \in P_\mathcal{S}\}$$

Montrons que la structure de Herbrand $\mathcal{H}$ satisfait E : pour $\forall x_1, \ldots \forall x_m.\phi \in E$ avec ϕ est sans quantificateur et $t_1, \ldots, t_m \in T(\mathcal{F})$, on montre, par récurrence sur ϕ, qu'on a

$$\mathcal{H}, \theta \models \phi \quad \text{ssi} \quad \mathcal{S}, \sigma \models \phi$$

où $\theta = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ et $\sigma = \{x_1 \mapsto [\![t_1]\!]_\mathcal{S}, \ldots, x_n \mapsto [\![t_n]\!]_\mathcal{S}\}$. (Noter ici qu'on utilise la substitution close θ comme une assignation quand on considère la structure $\mathcal{H}$, ce qui est justifié puisque cette structure a pour domaine l'ensemble des termes clos.)

La formule ϕ étant sans quantificateur, et les cas des connecteurs et constantes propositionnels étant immédiats, il n'y a qu'à considérer le cas où ϕ est une formule atomique :

	$\mathcal{H}, \theta \models P(u_1, \ldots, u_m)$	
ssi	$(u_1\theta, \ldots, u_m\theta) \in P_\mathcal{H}$	par définition de $\models$
ssi	$([\![u_1\theta]\!]_\mathcal{S}, \ldots, [\![u_m\theta]\!]_\mathcal{S}) \in P_\mathcal{S}$	par définition de $P_\mathcal{H}$
ssi	$([\![u_1]\!]_{\sigma,\mathcal{S}}, \ldots [\![u_m]\!]_{\sigma,\mathcal{S}}) \in P_\mathcal{S}$	par le lemme de substitution
ssi	$\mathcal{S}, \sigma \models P(u_1, \ldots, u_m)$	par définition de $\models$

□

Une conséquence du théorème de Herbrand est qu'on peut maintenant transférer certains théorèmes de la logique propositionnelle vers la logique du premier ordre. L'idée est, étant donnée une formule universelle, de construire ses *instances de Herbrand* :

$$H(\forall x_1, \ldots, x_n\, P) := \{P[x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F})\}$$

et, pour un ensemble S, $H(S) := \{H(s) \mid s \in S\}$.

Théorème 5.4.2. *Soit S un ensemble de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules universelles, et soit $\mathcal{P}'$ la base de Herbrand sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$. S a un $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-modèle si et seulement si l'ensemble de formules propositionnelles $H(S)$ a un modèle propositionnel, où $\mathcal{P}'$ est considéré comme l'ensemble des variables propositionnelles.*

Démonstration. Par Théorème 5.4.1. Remarquez que, pour toute structure de Herbrand $\mathcal{H}$ et toute formule universelle close ϕ, $\mathcal{H} \models \phi$ ssi $\mathcal{H} \models H(\phi)$. □

5.5 Compacité

Théorème 5.5.1. *Un ensemble de formules est satisfaisable ssi tous ses sous-ensembles finis sont satisfaisables.*

Démonstration. Il suffit de montrer, pour tout ensemble de formule E insatisfaisable, il existe une partie finie $F \subseteq E$ qui est déja insatisfaisable.

On peut supposer sans perte de généralité que E est composé de formules purement universelles : sinon, on transforme chaque formule en une formule purement universelle par mise en forme prénexe et skolémisation ; on obtient un ensemble de formules E' équisatisfaisable à E (donc insatisfaisable) et tel que si E' admet un sous-ensemble fini F' insatisfaisable alors E aussi (c'est l'ensemble des formules de E dont les transformées sont dans F').

Considérons maintenant l'ensemble des instances closes de E :

$$H(E) = \{\phi\theta \mid \forall x_1, \ldots, x_n.\phi \in E,\ \phi \text{ sans quantificateur},\ \theta : \mathsf{fv}(\phi) \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)\}$$

Puisque E n'a pas de modèle, il n'a pas de modèle de Herbrand. Mais la satisfaction d'une formule $\psi \in E$ dans un modèle de Herbrand est équivalente à la satisfaction de ses instances closes. Ainsi, $H(E)$ n'a pas de modèle de Herbrand. On peut ensuite voir les formules de $H(E)$ comme un ensemble E^0 de formules propositionnelles sur l'ensemble de variables propositionnelles composé des formules atomiques closes de notre langage. Si E^0, était satisfait dans une interprétation de la logique propositionnelle, alors $H(E)$ aurait un modèle de Herbrand. Ce n'est donc pas le cas : E^0 est insatisfaisable, donc par le théorème de compacité de la logique propositionnelle E^0 a une partie finie F^0 insatisfaisable. On prend F le plus petit sous-ensemble de E tel que $F^0 \subseteq H(F)$: on tient un sous-ensemble insatisfaisable et nécessairement fini. □