TD 6 : Flots le retour

Jeudi 10 octobre 2024

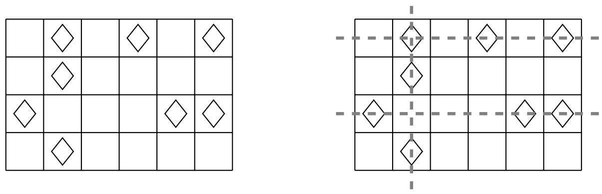
Page web du cours : `https://people.irisa.fr/David.Baelde/algo/index.html`
Coordonnées des chargés de TD : `malo.revel@ens-rennes.fr` `isseinie.calviac@irisa.fr`
Les TDs ont lieu les jeudis de 9h45 à 11h15, se fier à ADE pour la salle.

1 Théorème de König (source : SWERC 2012)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Rappelons d'abord quelques notions.

— Une *couverture par sommets* de G est un ensemble de sommets $C \subseteq V$ tel que chaque arête de E est incidente à au moins un sommet de C.
— Une *couverture par sommets minimale* est une couverture par sommets de cardinal minimal.
— Un *couplage* de G est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ qui n'ont pas de sommet en commun.
— Un *couplage maximal* est un couplage de cardinal maximal.
— Le graphe G est dit *biparti* si il existe une partition (X, Y) de V tel que toute arête de E a une extrémité dans X et l'autre dans Y.

On introduit le problème de surveillance suivant. Soit une grille rectangulaire de taille $n \times m$ dont certaines cases contiennent des diamants magiques. On cherche à disposer un nombre minimal de robots, contrôlant chacun une ligne ou une colonne de la grille, afin de surveiller tous les diamants. La figure de droite correspond à une solution pour l'instance du problème représentée sur la figure de gauche.



Question 1 – Proposer une réduction du problème de surveillance vers le problème de couverture minimale par sommets.

On construit le graphe dont les nœuds sont les colonnes et lignes, et dont les arêtes correspondent aux diamants (il existe une arête entre l et c si il y a un diamant à l'intersection de la ligne l et de la colonne c). Une solution est représentée par une couverture par sommets. On cherche donc une couverture par sommets minimale.

Dans la suite de l'exercice, nous montrerons que dans un graphe biparti, la cardinalité d'une couverture par sommets minimale est égale au cardinal d'un couplage maximal. Il s'agit du Théorème de König.

Question 2 – Montrer que le couplage maximal est inférieur ou égal à la cardinalité minimale d'une couverture par sommets.

Question 3 – Montrer que la cardinalité minimale d'une couverture par sommets est inférieure ou égale au couplage maximal. On s'aidera du réseau de flots suivant : on le construit à partir du graphe biparti, avec des capacités infinies sur les arcs entre les sommets de la partition X et de la partition Y. De plus, on ajoute une source s et un puits t. La capacité des arcs entre s et chaque sommet de X est égale à 1 et les capacités entre les sommets de Y et t également.

$\boxed{\geq}$ Cette inégalité est valable dans tout graphe G (pas forcément biparti). Soit C une couverture. Soit M un couplage. On a $|M| \leq |C|$. En effet, si M est un couplage, et C une couverture, on a

$$M = \cup_{u \in C} E_u$$

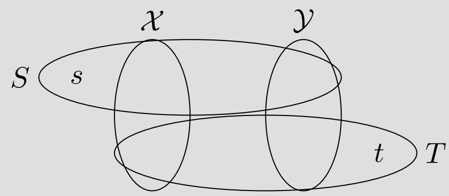
où E_u est vide ou alors égal à l'unique arête de M touché par u. Donc $|M| \leq |C|$.

En passant au max sur M et min sur C, on a que le couplage maximal est inférieur ou égal à la cardinalité minimale d'une couverture de sommets.

$\boxed{\leq}$ On utilise ici le fait que G est biparti. Pour calculer le couplage maximal, on construit le réseau de flot, mais ici on va mettre des arcs de capacité infinie entre les sommets de la partition X et les sommets de la partition Y. Les capacités entre la source et chaque sommet de X reste à 1 et les capacités entre les sommets de Y et la destination reste à 1 également.

Le couplage maximal est égal au flot maximal, qui est majoré par le nombre de sommets dans X, donc fini. Ainsi, tous les résultats démontrés précédemment dans ce chapitre restent valables, dont le théorème du flot maximal et coupe minimale. Le flot maximal est égal à la coupe minimale.

Soit (S, T) une coupe minimale, i.e. une coupe telle que $c(S, T) = |f^*|$ où f^* est un flot maximal. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des sommets de X et $\mathcal{Y}$ l'ensemble des sommets de Y. Montrons que $C = (\mathcal{X} \cap T) \cup (\mathcal{Y} \cap S)$ est un ensemble de sommets couvrants.



Il faut montrer que C touche toutes les arêtes. Cela revient à montrer qu'il n'existe pas d'arêtes de $\mathcal{X} \cap S$ vers $\mathcal{Y} \cap T$. Cela n'est pas le cas, car une telle arête, de capacité infinie, serait comptabilisé dans $c(S, T)$ et donc $c(S, T) = +\infty$. Contradiction, car $c(S, T)$ est fini (car égal au flot maximal par le théorème du flot maximal / coupe minimal).

On a $c(S,T) = |f^*|$ où f^* est un flot maximal, vaut le couplage maximal (car égal au flot maximal). D'autre part, $c(S,T)$ est, par définition, la somme du nombre d'arcs qui vont de s dans $\mathcal{X} \cap T$ et ceux qui vont de $\mathcal{Y} \cap S$ à t. Cette somme vaut le cardinal de C. On a donc $c(S,T) = |C|$.

Donc $|C| = |M|$ où M est un couplage maximal.

QUESTION 4 – Comment résoudre le problème de surveillance à l'aide de l'algorithme de Ford-Fulkerson ?

On réduit à vertex-cover avec la transformation de la question 1, on réduit à couplage max sans rien faire, on réduit à flot max avec la transformation vue en cours (le graphe est biparti).

On applique FF, ce qui nous donne un flot max.

Avec la transformation de post-traitement du cours on obtient un couplage max, dont le cardinal est égal au cardinal d'une couverture min par sommets, qui est égale au nombre de robots minimal.

2 Elimination dans un tournoi de baseball

Équipes	Nombre de matchs déjà gagnés = nombre de points déjà gagnés	Nombres de matchs restants			
		1	2	3	4
1	90	-	1	6	4
2	88	1	-	1	4
3	87	6	1	-	4
4	79	4	4	4	-

Une équipe gagne un point à chaque fois qu'elle gagne un match (il n'y a pas de matchs nuls). Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini d'équipes. On note p_i le nombre de points déjà gagnés de l'équipe i. Pour toutes équipes i et $j \neq i$, on note $r_{\{i,j\}}$ le nombre de matchs qu'il reste à jouer entre i et j. (Remarque : $r_{\{i,j\}}$ et $r_{\{j,i\}}$ désignent le même objet)

Dans l'exemple, $\mathcal{E} = \{1,2,3,4\}$, $p_2 = 88$ et $r_{\{1,3\}} = 6$.

Pour tout sous-ensemble d'équipes $T \subseteq \mathcal{E}$, on note $M_T = \{\{j,k\} \mid j,k \in T \text{ and } j \neq k\}$, qui est l'ensemble des configurations de matchs possibles entre les équipes dans T. Une équipe i est éliminée si on arrive à montrer a priori qu'une autre équipe j (parmi un sous-ensemble d'équipes T) aura strictement plus de points que i à la fin du tournoi. On note $maxp_i$ le nombre maximal de points que i peut espérer avoir en fin de tournoi : $maxp_i = p_i + \sum_{k \in \mathcal{E}, k \neq i} r_{\{i,k\}}$.

QUESTION 5 – Montrer que l'équipe 4 est éliminée d'office.

Expliquons pourquoi ils sont éliminés d'office. D'une part, dans le meilleur des cas, les 4 gagnent les 4+4+4 = 12 matchs qu'ils leur restent à jouer. Ainsi, ils ramassent un gain maximal de $79 + 12 = 91$.

D'autre part, on montre que soit l'équipe des 1 soit l'équipe des 3 gagne strictement plus de 91. Pour le voir, on considère le nombre de points gagnés à eux deux, i.e. comme si c'était une méta-équipe. En effet, à eux deux, ils ont déjà 90 + 87 = 177 points. À la fin, les 1 et les 3 n'auront plus que jouer l'un contre l'autre. Il y a encore 6 matchs les opposant, donc ils gagneront à eux deux 6 points supplémentaires. En résumé, à la fin, à eux deux, ils auront $177 + 6 = 183$ points. L'une des deux équipes (1 ou 3) aura plus de $\frac{183}{2} > 91$ points.

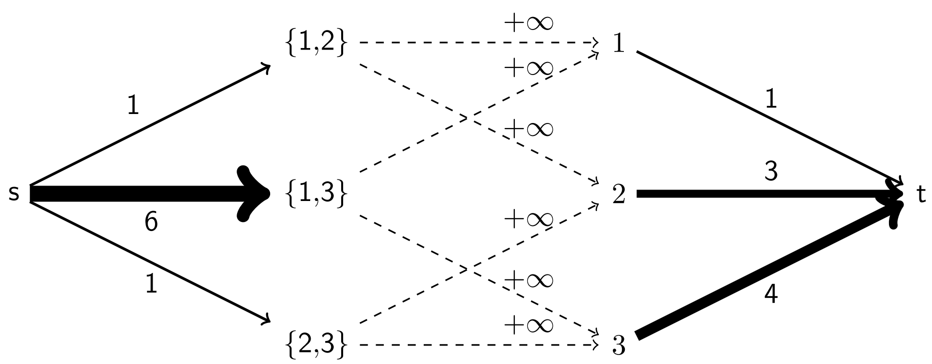
Définition 1. *Une équipe $i \in \mathcal{E}$ est éliminée s'il existe un sous-ensemble $T \subseteq \mathcal{E}$ tel que*

$$\frac{\sum_{j \in T} p_j + \sum_{m \in M_T} r_m}{|T|} > maxp_i.$$

Le problème de savoir si une équipe i est éliminée semble difficile car on a l'impression qu'il faut deviner T. Pourtant on peut se ramener au calcul d'un flot.

Définition 2. *Soit $i \in \mathcal{E}$. On définit un réseau de flots $G_i = (S, A, c, \mathsf{s}, \mathsf{t})$ où*
- *$S = \{\mathsf{s}, \mathsf{t}\} \sqcup (\mathcal{E} \setminus \{i\}) \sqcup M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}$ où $\sqcup$ est le symbole pour 'union disjointe';*
- *$A = \{(\mathsf{s}, m) \mid m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}\} \sqcup \{(m, j) \mid m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}$ et $j \in m\} \sqcup \{(j, \mathsf{t}) \mid j \in \mathcal{E}\setminus\{i\}\}$;*
- *$c : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ définie par :*
  1. *$c(\mathsf{s}, m) = r_m$ pour tout $m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}$;*
  2. *$c(m, j) = +\infty$ pour tout $m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}$ et $j \in m$;*
  3. *$c(j, \mathsf{t}) = maxp_i - p_j$ pour tout $j \in \mathcal{E} \setminus \{i\}$.*

Par exemple, le réseau de flots G_4 est :



QUESTION 6 – Que représente un flot dans ce réseau ?

Un flot représente une attribution des points d'une partie des matchs qu'il reste à faire (sauf ceux qui prennent en compte l'équipe i). De plus, il est interdit à toutes les équipes d'avoir strictement plus que le $maxp_i$.

QUESTION 7 – Quelle est la valeur d'un flot maximal sur cet exemple ?

7

Nous allons démontrer que i est éliminée ssi $|f| < \sum_{m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}} r_m$, où $|f|$ est la valeur d'un flot maximal f de G_i.

QUESTION 8 – Montrer qu'il existe une coupe minimale qui est de la forme $C(T) = (\{s\} \cup M_T \cup T,$ le reste) pour un certain $T \subseteq \mathcal{E} \setminus \{i\}$.

QUESTION 9 – Donner la capacité d'une telle coupe.

QUESTION 10 – Conclure.

On rappelle théorème max-flow-min-cut : une coupe minimale a comme capacité la valeur du flot maximal. Ainsi, nous allons démontrer i est éliminée ssi la capacité d'une coupe min dans G_i est $< \sum_{m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}}$.

Lemme 1. *Il y a une coupe minimale qui est de la forme $C(T) = (\{s\} \cup M_T \cup T,$ le reste) pour un certain $T \subseteq \mathcal{E} \setminus \{i\}$.*

Démonstration. Considérons une coupe minimale (A, B). Montrons comment faire pour que A soit de la forme $\{s\} \cup M_T \cup T$. Pour cela, on pose T l'ensemble des équipes dans A. On sait que s est dans A (par définition d'une coupe).

Par l'absurde, supposons $jk \in A$ avec $j \notin T$. Alors l'arc $jk - j$ est de capacité infinie et va de A dans B. Bref la coupe est de capacité infinie et donc n'est pas minimal.

Maintenant, il est possible d'avoir $jk \in B$ mais $j, k \in T$. Mais alors déplacer jk dans A fait baisser la valeur de la coupe. Ainsi, on obtient une coupe minimale est de la forme $(\{s\} \cup M_T \cup T,$ le reste). □

Lemme 2. *La capacité $|C(T)|$ de $C(T)$ est*

$$\sum_{m \in M_{\mathcal{E}\setminus\{i\}}} r_m + |T| maxp_i - (\sum_{j \in T} p_j + \sum_{m \in M_T} r_m).$$

Démonstration. Le calcul donne que la capacité de $C(T)$ vaut

$$\sum_{j \in T} (maxp_i - p_j) + \sum_{m \notin M_T} r_m.$$

En triturant, on a l'expression du lemme. □

Conclusion.

i est éliminée
ssi (par définition)

il existe $T \subseteq \mathcal{E} \setminus \{i\}$ tel que $\frac{\sum_{j \in T} p_j + \sum_{m \in M_T} r_m}{|T|} > maxp_i$.
ssi (par le lemme 2)
il existe $T \subseteq \mathcal{E} \setminus \{i\}$ tel que $|C(T)| < \sum_{m \in M_{\mathcal{E} \setminus \{i\}}} r_m$
ssi (par le lemme 1)
une coupe minimale est de capacité $< \sum_{m \in M_{\mathcal{E} \setminus \{i\}}} r_m$.