

ALGO1

Couplages Stables

David Baelde

ENS Rennes, L3 2024–2025

Exemple 1 : échanges successifs

$$\begin{array}{ll} a_1 : b_2 > b_1 > b_3 & b_1 : a_1 > a_3 > a_2 \\ a_2 : b_3 > b_1 > b_2 & b_2 : a_3 > a_1 > a_2 \\ a_3 : b_1 > b_2 > b_3 & b_3 : a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

$$C_1 = \underline{a_1}b_1, a_2\underline{b_2}, a_3b_3$$

Exemple 1 : échanges successifs

$$\begin{array}{ll} a_1 : b_2 > b_1 > b_3 & b_1 : a_1 > a_3 > a_2 \\ a_2 : b_3 > b_1 > b_2 & b_2 : a_3 > a_1 > a_2 \\ a_3 : b_1 > b_2 > b_3 & b_3 : a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

$$C_1 = \underline{a_1}b_1, a_2\underline{b_2}, a_3b_3$$

$$C_2 = a_1\underline{b_2}, a_2b_1, \underline{a_3}b_3$$

Exemple 1 : échanges successifs

$$\begin{array}{ll} a_1 : b_2 > b_1 > b_3 & b_1 : a_1 > a_3 > a_2 \\ a_2 : b_3 > b_1 > b_2 & b_2 : a_3 > a_1 > a_2 \\ a_3 : b_1 > b_2 > b_3 & b_3 : a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

$$C_1 = \underline{a_1}b_1, a_2\underline{b_2}, a_3b_3$$

$$C_2 = a_1\underline{b_2}, a_2b_1, \underline{a_3}b_3$$

$$C_3 = a_1b_3, a_2\underline{b_1}, \underline{a_3}b_2$$

Exemple 1 : échanges successifs

$$\begin{array}{ll} a_1 : b_2 > b_1 > b_3 & b_1 : a_1 > a_3 > a_2 \\ a_2 : b_3 > b_1 > b_2 & b_2 : a_3 > a_1 > a_2 \\ a_3 : b_1 > b_2 > b_3 & b_3 : a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

$$C_1 = \underline{a_1}b_1, a_2\underline{b_2}, a_3b_3$$

$$C_2 = a_1\underline{b_2}, a_2b_1, \underline{a_3}b_3$$

$$C_3 = a_1b_3, a_2\underline{b_1}, \underline{a_3}b_2$$

$$C_4 = \underline{a_1}b_3, a_2b_2, a_3\underline{b_1}$$

Exemple 1 : échanges successifs

$$\begin{array}{ll} a_1 : b_2 > b_1 > b_3 & b_1 : a_1 > a_3 > a_2 \\ a_2 : b_3 > b_1 > b_2 & b_2 : a_3 > a_1 > a_2 \\ a_3 : b_1 > b_2 > b_3 & b_3 : a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

$$C_1 = \underline{a_1}b_1, a_2\underline{b_2}, a_3b_3$$

$$C_2 = a_1\underline{b_2}, a_2b_1, \underline{a_3}b_3$$

$$C_3 = a_1b_3, a_2\underline{b_1}, \underline{a_3}b_2$$

$$C_4 = \underline{a_1}b_3, a_2b_2, a_3\underline{b_1}$$

$$C_1 = \underline{a_1}b_1, a_2\underline{b_2}, a_3b_3$$

⋮

Exemple 2 : rounds de propositions

$$\begin{array}{ll} a_1 : & b_1 > b_3 > b_2 & b_1 : & a_3 > a_2 > a_1 \\ a_2 : & b_1 > b_2 > b_3 & b_2 : & a_1 > a_3 > a_2 \\ a_3 : & b_3 > b_2 > b_1 & b_3 : & a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

À chaque tour :

- chaque a non couplé propose au b non couplé qu'il préfère ;
- chaque b accepte la proposition qu'il préfère.

$$R_1 = \quad a_2 b_1, a_3 b_3$$

Exemple 2 : rounds de propositions

$$\begin{array}{ll} a_1 : & b_1 > b_3 > b_2 & b_1 : & a_3 > a_2 > a_1 \\ a_2 : & b_1 > b_2 > b_3 & b_2 : & a_1 > a_3 > a_2 \\ a_3 : & b_3 > b_2 > b_1 & b_3 : & a_1 > a_2 > a_3 \end{array}$$

À chaque tour :

- chaque a non couplé propose au b non couplé qu'il préfère ;
- chaque b accepte la proposition qu'il préfère.

$$R_1 = \quad a_2 b_1, a_3 b_3$$

$$R_2 = \underline{a_1} b_2, a_2 b_1, a_3 \underline{b_3}$$

Algo de Gale-Shapley pour $A = B = [0; n - 1]$

```
1:  $C := \emptyset$ ;  $Index := [0; \dots; 0]$ 
2: while  $C \neq A$  do
3:   choisir  $a \in A \setminus C$ 
4:    $b := P(a)$ 
5:   if  $\exists a' \in C. b = P(a')$  then
6:     if  $b$  préfère  $a$  à  $a'$  then
7:        $C := C \cup \{a\} \setminus \{a'\}$ 
8:        $Index[a'] \leftarrow 1 + Index[a']$ 
9:     else
10:       $Index[a] \leftarrow 1 + Index[a]$ 
11:    end if
12:  else
13:     $C := C \cup \{a\}$ 
14:  end if
15: end while
```

On note $P(a) \in B$ le $(Index[a])^{\text{ème}}$ choix de a .

Algo de Gale-Shapley pour $A = B = [0; n - 1]$

```
1:  $C := \emptyset$ ;  $Index := [0; \dots; 0]$ 
2: while  $C \neq A$  do
3:   choisir  $a \in A \setminus C$ 
4:    $b := P(a)$ 
5:   if  $\exists a' \in C. b = P(a')$  then
6:     if  $b$  préfère  $a$  à  $a'$  then
7:        $C := C \cup \{a\} \setminus \{a'\}$ 
8:        $Index[a'] \leftarrow 1 + Index[a']$ 
9:     else
10:       $Index[a] \leftarrow 1 + Index[a]$ 
11:    end if
12:  else
13:     $C := C \cup \{a\}$ 
14:  end if
15: end while
```

On note $P(a) \in B$ le $(Index[a])^{\text{ème}}$ choix de a .

$$P_1 : C \subseteq A$$

$$P_2 : \forall a \in A. Index[a] \in [0; n - 1]$$

Algo de Gale-Shapley pour $A = B = [0; n - 1]$

```
1:  $C := \emptyset$ ;  $Index := [0; \dots; 0]$ 
2: while  $C \neq A$  do
3:   choisir  $a \in A \setminus C$ 
4:    $b := P(a)$ 
5:   if  $\exists a' \in C. b = P(a')$  then
6:     if  $b$  préfère  $a$  à  $a'$  then
7:        $C := C \cup \{a\} \setminus \{a'\}$ 
8:        $Index[a'] \leftarrow 1 + Index[a']$ 
9:     else
10:       $Index[a] \leftarrow 1 + Index[a]$ 
11:    end if
12:  else
13:     $C := C \cup \{a\}$ 
14:  end if
15: end while
```

On note $P(a) \in B$ le $(Index[a])^{\text{ème}}$ choix de a .

$$P_1 : C \subseteq A$$

$$P_2 : \forall a \in A. Index[a] \in [0; n - 1]$$

$$P_3 : \forall a \neq a' \in C. P(a) \neq P(a')$$

Algo de Gale-Shapley pour $A = B = [0; n - 1]$

```
1:  $C := \emptyset$ ;  $Index := [0; \dots; 0]$ 
2: while  $C \neq A$  do
3:   choisir  $a \in A \setminus C$ 
4:    $b := P(a)$ 
5:   if  $\exists a' \in C. b = P(a')$  then
6:     if  $b$  préfère  $a$  à  $a'$  then
7:        $C := C \cup \{a\} \setminus \{a'\}$ 
8:        $Index[a'] \leftarrow 1 + Index[a']$ 
9:     else
10:       $Index[a] \leftarrow 1 + Index[a]$ 
11:    end if
12:  else
13:     $C := C \cup \{a\}$ 
14:  end if
15: end while
```

On note $P(a) \in B$ le $(Index[a])^{\text{ème}}$ choix de a .

$P_1 : C \subseteq A$

$P_2 : \forall a \in A. Index[a] \in [0; n - 1]$

$P_3 : \forall a \neq a' \in C. P(a) \neq P(a')$

$P_4 : \forall a \in A, b \in B$ tels que a préfère b à $P(a)$,
 $\exists a' \in C$ tel que $b = P(a')$ et b préfère a' à a

Exemples avec de nombreuses solutions

Exemple 3

$$a_1 : b_1 > b_2 > b_3$$

$$a_2 : b_2 > b_3 > b_1$$

$$a_3 : b_3 > b_1 > b_2$$

$$b_1 : a_2 > a_3 > a_1$$

$$b_2 : a_3 > a_1 > a_2$$

$$b_3 : a_1 > a_2 > a_3$$

$$C_1 = a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3$$

$$C_2 = a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$$

$$C_3 = a_1 b_3, a_2 b_1, a_3 b_2$$

Exemples avec de nombreuses solutions

Exemple 3

$$a_1 : b_1 > b_2 > b_3$$

$$a_2 : b_2 > b_3 > b_1$$

$$a_3 : b_3 > b_1 > b_2$$

$$b_1 : a_2 > a_3 > a_1$$

$$b_2 : a_3 > a_1 > a_2$$

$$b_3 : a_1 > a_2 > a_3$$

$$C_1 = a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3$$

$$C_2 = a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$$

$$C_3 = a_1 b_3, a_2 b_1, a_3 b_2$$

Exemple 4

$$a_1 : b_1 > b_2 > \dots$$

$$a_2 : b_2 > b_1 > \dots$$

$$a_3 : b_3 > b_4 > \dots$$

$$a_4 : b_4 > b_3 > \dots$$

$$\vdots$$

$$b_1 : \dots > a_1$$

$$b_2 : \dots > a_2$$

$$b_3 : \dots > a_3$$

$$b_4 : \dots > a_4$$

$$\vdots$$

$$C_1 = a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4, \dots$$

$$C_2 = a_1 \mathbf{b}_2, a_2 \mathbf{b}_1, a_3 b_3, a_4 b_4, \dots$$

$$C_3 = a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 \mathbf{b}_4, a_4 \mathbf{b}_3, \dots$$

$$C_4 = a_1 \mathbf{b}_2, a_1 \mathbf{b}_2, a_3 \mathbf{b}_4, a_4 \mathbf{b}_3, \dots$$

$$\vdots$$