Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Théorie insatisfiable)
Soit une signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

1. Montrer que l'ensemble des $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules du 1er ordre est une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-théorie.
2. Montrer que c'est la seule $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-théorie insatisafiable.

Exercice 2 (Réciproque)
Le but est de montrer qu'une théorie récursivement énumérable est axiomatisable.

1. Soit une théorie $\mathcal{T}$ récursivement énumérable. Soit un énumérateur de formules pour $\mathcal{T}$ produisant $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour une formule ϕ, on pose ϕ^m la formule :
$$\underbrace{\phi \wedge \cdots \wedge \phi}_{m \text{ fois}}$$
Montrer que $Th(\{\varphi_i^i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{T}$.
2. Montrer que l'ensemble $\{\varphi_i^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ est récursif.

Exercice 3 (Structures ordonnées)
On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules closes du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre sur $\mathcal{X}$ définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $\sigma(x) \geq_{\mathcal{S}} \sigma(y)$.
Montrer que, pour toute formule ϕ et toutes assignations $\sigma : \mathcal{X} \to \mathbb{Q}$ et $\sigma' : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telles que $\geq_\sigma$ et $\geq_{\sigma'}$ coïncident, on a $\mathbb{Q}, \sigma \vDash \phi$ ssi $\mathbb{R}, \sigma' \vDash \phi$.

Exercice 4 (Théorie des corps)
On se place sur la signature $\mathcal{S} = (\{0[0], 1[0], +[2], \times[2]\}, \{= [2]\})$.

1. Proposer un ensemble d'axiomes tels que les modèles de la théorie engendrée par ces axiomes soient exactement les corps.

On définit la théorie ACF des corps algébriquement clos [1] en ajoutant à la théorie des corps :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'énoncé $\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x.(x^n + y_1 x^{n-1} + \dots + y_n = 0)$.

2. On admet que ACF admet l'élimination des quantificateurs. ACF est-elle complète ? La théorie des corps est-elle complète ?
3. Montrer que si K est un corps algébriquement clos, alors tout système fini $\phi(x_1, \dots, x_n)$ d'équations et d'inéquations à coefficients dans K qui a une solution dans une extension de corps L/K a déjà une solution dans K lui-même.
4. Soit une formule close ϕ. Montrer que ϕ est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique [2] nulle si et seulement si ϕ est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.

1. Tout polynôme de degré non nul à coefficients dans ce corps admet (au moins) une racine dans ce corps.
2. La *caractéristique* d'un corps est le nombre minimum de fois où il faut additionner 1 pour obtenir 0 ; elle est nulle s'il n'existe pas de tel entier.