Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Formes de Skolem)

1. Donner $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ tels que

$$\phi = \exists x.\ P(x) \vee \exists x.\ (P(x) \Rightarrow \forall y.\ R(x,y))$$

soit une $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$-formule.
2. Skolémiser ϕ et préciser l'ensemble de symboles de fonctions $\overline{\mathcal{F}}$ de $Sk(\phi)$.
3. Skolémiser $(P(x) \vee \neg\exists y.\ R(x,y)) \Rightarrow \exists y.\ (R(x,y) \vee Q(y))$.

Exercice 2 (Herbrand)

1. Combien y a-t-il de structures de Herbrand pour :
   (a) $\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}, \mathcal{P} = \{R(1)\}$;
   (b) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{=(2)\}$;
   (c) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{Q(0)\}$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{R(1)\}$. Donner un modèle de Herbrand pour $\forall x.\ R(x) \Leftrightarrow \neg R(s(x))$.
3. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. Skolémiser $\forall x \exists y.\ x = s(y)$. Donner un modèle de Herbrand de la formule résultante.

Exercice 3 (Corps non archimédiens)
On appelle *corps non archimédien* un corps ordonné $(K, +, \times, \leq)$ ayant un élément $\epsilon > 0$ tel que $n\epsilon < 1$ pour tout entier n. Le but est de montrer qu'il existe un corps non archimédien.

1. On suppose disposer d'un ensemble Γ de formules définissant la théorie des corps ordonnés. Soit l'ensemble de formules suivant :

$$\Gamma' = \Gamma \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n \times \epsilon \leq 1 \land \neg(n \times \epsilon = 1)\}$$

Montrer que toute partie finie de Γ' est satisfiable.

2. Conclure par théorème de compacité.

Exercice 4 (Paradoxe de Skolem)
On dit qu'un modèle est au plus dénombrable si son domaine l'est. On cherche à montrer et utiliser le résultat suivant :

Théorème 1 *(Théorème de Löwenheim-Skolem descendant) Soit une signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$ dénombrable, et Γ un ensemble de formules closes sur $\mathcal{S}$. Si Γ admet un modèle, alors Γ admet un modèle au plus dénombrable.*

1. Utiliser le théorème de Herbrand pour démontrer le théorème 1.
2. Application : montrer qu'il existe un modèle au plus dénombrable de votre théorie des ensembles au 1er ordre préférée (ZF, ZFC, ...).
3. Montrer qu'il existe pourtant un ensemble infini non-dénombrable : c'est le "paradoxe" de Skolem.