Logique

David Baelde

Exercice 1 (formule du buveur)
Le paradoxe du buveur s'énonce ainsi :

> Dans tout bar (non vide) il existe un client, appelé le buveur,
> tel que si le buveur boit tout le monde boit.

Cet énoncé vous semble-t-il valide ? Formaliser en logique du premier ordre, en utilisant un prédicat unaire b indiquant si une personne boit — le bar est implicite, représenté par la structure, les clients étant les éléments du domaine de la structure.

Exercice 2 (variables liées et substitution)
On rappelle qu'une substitution θ est applicable à une formule ϕ quand :

$$\mathrm{bv}(\phi) \cap \big(\mathrm{Dom}(\theta) \cup \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(\theta)} \mathrm{fv}(\theta(x))\big) = \emptyset$$

1. Sur quelles formules ϕ ci-dessous peut-on appliquer la substitution $\theta = \{x \mapsto f(y)\}$? Si on ignore la condition d'applicabilité, les différentes formules $\phi\theta$ obtenues sont-elles équivalentes ?
   (a) $(\forall x.P(x)) \wedge (\exists y.\ R(x, y)))$
   (b) $(\forall y.P(y)) \wedge (\exists z.\ R(x, z)))$
   (c) $(\forall z.P(z)) \wedge (\exists z.\ R(x, z)))$
2. On va démontrer le lemme de substitution vu en cours pour la relation de satisfaction. On fixe une structure $\mathcal{S}$ arbitraire. Montrer que, pour toute formule ϕ, tout substitution θ applicable à ϕ, et toute assignation σ, on a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi\theta$ ssi $\mathcal{S}, \theta\sigma \models \phi$.
3. La relation d'α-renommage est définie par

   $$\mathcal{Q}x.\phi \rightarrow_\alpha \mathcal{Q}y.\phi\{x \mapsto y\}$$

   où $\mathcal{Q}$ est un quantificateur, ϕ une formule, x et y sont des variables telles que $y \notin \mathrm{fv}(\phi)$ et que la substitution $\{x \mapsto y\}$ s'applique à ϕ.

Les trois formules ci dessus sont α-équivalentes : on obtient l'une à partir de l'autre par une série d'α-renommages sur des sous-formules. Montrer que, pour toutes formules ϕ, ψ telles que $\phi \to_\alpha \psi$, et pour tous $\mathcal{S}, \sigma$ on a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ ssi $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$.

4. On considère la formule suivante :

$$\forall y. \big(P(x,y) \wedge \exists y. Q(y,x)\big)$$

Donner une série d'α-renommages à partir de cette formule pour obtenir une formule α-équivalente sur laquelle on puisse appliquer la substitution $\{x \mapsto f(y)\}$.

Exercice 3 (quantificateurs en déduction naturelle)
Un séquent du premier ordre est toujours de la forme $\Gamma \vdash \phi$, mais avec Γ, ϕ un ensemble de formules du premier ordre. La formule associée à un tel séquent est la suivante, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{fv}(\Gamma, \phi)$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n. \ \ (\wedge\Gamma) \Rightarrow \phi$$

Autrement dit, les variables libres du séquent sont implicitement quantifiées universellement. Le séquent est valide quand cette formule l'est.

Démontrer la correction des règles de déduction naturelle pour le quantificateur universel :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x.\phi} \ \forall_{\mathrm{I}} \ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]} \ \forall_{\mathrm{E}}$$

Exercice 4 (structures égalitaires)
On suppose que l'égalité fait partie des symboles de prédicats. On dit qu'une structure $\mathcal{S}$ est égalitaire si $=_\mathcal{S}$ est l'égalité sur le domaine de $\mathcal{S}$.

— Donner une formule close ϕ telle que les structures égalitaires satisfaisant ϕ sont exactement les structures à deux éléménts.

— Donner un ensemble de formules E tel que les structures égalitaires satisfaisant E sont exactement celles dont le domaine est infini.

Exercice 5 (théorie de l'égalité)
Soit $\mathcal{S}$ un modèle de la théorie de l'égalité. La relation $=_\mathcal{S}$ est donc une relation d'équivalence ; on note $[e]$ la classe d'équivalence de $e \in D_\mathcal{S}$ pour cette relation. On construit $\mathcal{S}'$ comme suit :

— $D_{\mathcal{S}'} = D_\mathcal{S} / =_\mathcal{S}$, l'ensemble des classes d'équivalences ;

— pour tout symbole de fonction, $f_{\mathcal{S}'}([e_1], \ldots, [e_n]) = f_{\mathcal{S}}(e_1, \ldots, e_n)$;
— pour tout symbole de prédicat, $([e_1], \ldots, [e_n]) \in P_{\mathcal{S}'}$ ssi $(e_1, \ldots, e_n) \in P_{\mathcal{S}}$.

Justifier en quoi cela définit bien une unique structure.

Pour tout $\sigma : \mathcal{X} \to D_{\mathcal{S}}$ on note $[\sigma]$ l'assignation $x \mapsto [\sigma(x)]$. Montrer qu'on a, pour tous σ et ϕ :

$$\mathcal{S}, \sigma \models \phi \text{ ssi } \mathcal{S}', [\sigma] \models \phi$$

En déduire qu'une formule est satisfaite dans tous les modèles de la théorie de l'égalité ssi elle est satisfaite dans toutes les structures égalitaires.

Exercice 6 (structures ordonnées)

On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules closes du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre sur $\mathcal{X}$ définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $\sigma(x) \geq_{\mathcal{S}} \sigma(y)$.

   Montrer que, pour toute formule ϕ et toutes assignations $\sigma : \mathcal{X} \to \mathbb{Q}$ et $\sigma' : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telles que $\geq_\sigma$ et $\geq_{\sigma'}$ coïncident, on a $\mathbb{Q}, \sigma \vDash \phi$ ssi $\mathbb{R}, \sigma' \vDash \phi$.