TD5 17 février 2023

Logique

Maxime Bridoux

Dans tout l'énoncé on note $\Gamma \vdash \varphi$ le séquent de déduction naturelle (Γ, ϕ) où Γ est un multi-ensemble de formules et ϕ une formule.

Exercice 1
Montrer les séquents suivants en déduction naturelle minimale :

1. $\phi, \phi \Rightarrow \psi \vdash \psi$
2. $\vdash \phi \Rightarrow \neg\neg\phi$
3. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$

Exercice 2 (Agreg info 2022, épreuve 1, problème 3)
Nous avons les faits suivants :

> 1. Si Informatix réussit sa preuve, il sera content.
> 2. S'il pleut, Informatix restera chez lui.
> 3. Si Informatix ne reste pas chez lui, alors il sera content.
> 4. Chez lui, Informatix s'entraîne.
> 5. Informatix réussira sa preuve s'il s'entraîne.

1. Formaliser ces faits à l'aide de formules logiques propositionelles.
2. Montrer, en déduction naturelle classique, qu'Informatix sera content.
3. Montrer en déduction naturelle classique les deux séquents suivants. Lequel des deux n'est pas prouvable en logique intuitionniste ?
   (a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
   (b) $\vdash (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
4. A partir de la règle $\vdash A \vee \neg A$, est-il possible de montrer $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$? Si oui, faire la démonstration, sinon expliquer pourquoi.

Exercice 3

Montrer que les règles suivantes sont correctes en logique classique :

$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee'_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma, \neg\phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} \wedge'_{\mathrm{I}}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\boxed{NM_0} \arrow[r, "+\ ..."] \arrow[rr, bend left, "+\ \mathrm{RAA}"] \arrow[rr, bend right, "+\ ..."'] & \boxed{NJ_0} \arrow[r, "+\ ..."] & \boxed{NK_0}
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1 – Règles de déduction naturelle.

Exercice 4

On cherche à se représenter en Figure 1 les liens entre les différents systèmes de déduction naturelle. Une flèche étiquetée par une règle relie un système à un autre si l'ajout de cette règle au premier système permet de dériver les mêmes séquents que l'autre système. Finir de remplir le schéma en Figure 1 avec les noms des règles suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \phi}\ Contra \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi \quad \Gamma, \neg\phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \mathrm{TE}'$$

Exercice 5 (Logique intuitionniste et tiers-exclu)
Contrairement à la logique intuitionniste, il est possible en logique classique de faire des preuves non constructives, notamment à l'aide du tiers-exclu :

1. Montrer, en arithmétique classique, qu'il existe a et b irrationnels tels que a^b est rationnel. *Indication : considérer $a = b = \sqrt{2}$ et le tiers-exclu*

Le but de l'exercice est de montrer que le tiers-exclu n'est pas valide en logique intuitionniste, sans utiliser la sémantique usuelle des modèles dits *de Kripke*. On considère plutôt l'interprétation I suivante des formules dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donné une iterprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

— $I(\bot) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
— $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$;
— $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;
— $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
— $I(\phi \Rightarrow \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit *valide* si pour tout I on a $\cap_{Q \in \Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

2. Montrer que le tiers-exclu n'est pas valide.
3. Montrer que tout jugement prouvable en logique intuitionniste est valide.