Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Problème SAT)
Rappeler la complexité du problème SAT suivant :

Entrée : Une formule propositionnelle ϕ ;

Sortie : Oui si ϕ est satisfiable, non sinon.

Qu'en est-il si ϕ est une formule du premier ordre ?

Exercice 2 (Déduction naturelle)
Montrer en déduction naturelle :

1. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x))$
2. $\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C$ ssi $\Gamma \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$

Exercice 3 (Théories)
Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et expliquer pourquoi les autres ne le sont pas forcément :

1. Une théorie complète et récursivement énumérable est récursive.
2. Une théorie récursive est complète.
3. Soit un ensemble de structures tel que pour tout $i, j, S_i \models \phi$ ssi $S_j \models \psi$. Alors $\{\phi \mid \exists i, S_i \models \phi\}$ est complète.
4. Si T est satisfiable et $T \not\models \phi$ alors $T \cup \{\neg\phi\}$ est satisfiable.

Exercice 4 (Compacité)
Montrer que si une théorie T est finiment axiomatisable, alors de toute axiomatisation de T on peut en extraire une axiomatisation finie.

Exercice 5 (Herbrand)
Soit la formule $\phi = [\forall x.(P(a) \wedge (P(x) \Rightarrow P(f(x))))] \Rightarrow [\exists x.P(f(f(x)))]$ où a est un symbole de constante.

1. Préciser la signature de ϕ.
2. Skolémiser $\neg\phi$.
3. Calculer sa base de Herbrand.