Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Théorie des grilles)

On cherche ici à formaliser une théorie dont les modèles sont les grilles. On se place sur la signature $\mathcal{S} = (\{g[1], d[1], h[1], b[1]\}, \{= [2]\})$ (pour *gauche*, *droite*, *haut*, *bas*) et on pose la théorie T_0 engendrée par les axiomes suivants :

$$\begin{cases} Ax_= \\ \forall x. \quad g(d(x)) = x \\ \forall x. \quad d(g(x)) = x \\ \forall x. \quad b(h(x)) = x \\ \forall x. \quad h(b(x)) = x \\ \forall x. \quad g(h(x)) = h(g(x)) \\ \forall x. \quad g(b(x)) = b(g(x)) \\ \forall x. \quad d(h(x)) = h(d(x)) \\ \forall x. \quad d(b(x)) = b(d(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que les structures canoniques des ensembles suivants sont des modèles de T_0 :
   (a) $\mathbb{Z}^2$
   (b) $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, [\![1, n]\!] \times \mathbb{Z}$

   A quoi ressemblent les grilles associées ?
2. Déterminer une théorie T_1, extension de T_0, modélisant des grilles nécessairement planaires infinies. T_1 peut-elle être finie ?

On dit que M est un modèle *connexe* de T_1 lorsque pour tout $x, y \in D_M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f_1, \ldots, f_n \in \{g_M, d_M, h_M, b_M\}$ tels que $x = f_1(\ldots f_n(y) \ldots)$.

3. Déterminer un modèle non connexe de T_1.
4. Montrer à l'aide du théorème de compacité que toute extension de T_0 qui possède $\mathbb{Z}^2$ comme modèle possède un modèle non-connexe.

Exercice 2 (Déduction naturelle)
Montrer en déduction naturelle que la formule $\forall x.(0+x=x+0)$ appartient à l'arithmétique de Presburger.

Exercice 3 (Théorie des corps)
On se place sur la signature $\mathcal{S} = (\{0[0], 1[0], +[2], \times[2]\}, \{=[2]\})$.

1. Proposer un ensemble d'axiomes tels que les modèles de la théorie engendrée par ces axiomes soient exactement les corps.

On définit la théorie ACF des corps algébriquement clos [1] en ajoutant à la théorie des corps :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'énoncé $\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x.(x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n = 0)$.

2. On admet que ACF admet l'élimination des quantificateurs. ACF est-elle complète ? La théorie des corps est-elle complète ?
3. Montrer que si K est un corps algébriquement clos, alors tout système fini $\phi(x_1, \dots, x_n)$ d'équations et d'inéquations à coefficients dans K qui a une solution dans une extension de corps L/K a déjà une solution dans K lui-même.
4. Soit une formule close ϕ. Montrer que ϕ est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique [2] nulle si et seulement si ϕ est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.

1. Tout polynôme de degré non nul à coefficients dans ce corps admet (au moins) une racine dans ce corps.

2. La *caractéristique* d'un corps est le nombre minimum de fois où il faut additionner 1 pour obtenir 0 ; elle est nulle s'il n'existe pas de tel entier.