Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Formules, arbres)
Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules du calcul propositionnel ? Représentez ces formules sous forme d'arbre ou proposez une correction sinon.

1. $(x \vee y) \wedge ((x \vee z) \Rightarrow y)$
2. $(\neg \Rightarrow x) \wedge y$
3. $x \Rightarrow y \Rightarrow y \Rightarrow x$
4. $\forall x.p(x) \Rightarrow \exists y.p(y)$
5. $\bot \wedge (\bot \wedge \top)$
6. $(x \vee \neg y \wedge z) \vee \neg(y \Rightarrow z)$

Exercice 2 (Définition inductive)
On définit pour toute formule ϕ l'ensemble $SF(\phi)$ comme l'ensemble des sous-formules apparaissant dans ϕ.

1. Déterminer $SF(\neg p \Rightarrow q \wedge r)$.
2. Proposer une définition inductive de $SF(\phi)$.
3. Par analogie avec les arbres, proposer une définition inductive de la taille et de la hauteur d'une formule ϕ.
4. Quel est le lien entre $SF(\phi)$ et la taille de ϕ ?

Exercice 3 (Implication logique)
On s'intéresse ici à la notion d'implication.

1. Donner la table de vérité de la formule $x \Rightarrow y$.
2. On suppose que la phrase "si le soleil s'est levé tard, alors il a plu" est vraie. Quel énoncé est nécessairement faux ?
   — le soleil s'est levé tard et il a plu
   — le soleil ne s'est pas levé tard et il a plu
   — le soleil ne s'est pas levé tard et il n'a pas plu
   — le soleil s'est levé tard et il n'a pas plu

3. On dit qu'une formule φ est *conséquence logique* d'une formule ϕ, noté $\phi \models \varphi$ si tous les modèles de ϕ sont des modèles de φ :

$$\mathcal{I} \models \phi \text{ implique } \mathcal{I} \models \varphi, \text{ pour tout modèle } \mathcal{I}$$

   Montrer que $(p \Rightarrow q) \land (\neg p \Rightarrow q) \models q$.

Exercice 4 (Validité)
Soit x et y des variables propositionnelles.

1. Parmi les formules suivantes, laquelle est valide [1], laquelle est insatisfiable ?
   (a) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow y$
   (b) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
   (c) $(x \land y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow \neg y)$
2. Montrer que si $\varphi \lor \phi$ est satisfiable alors φ ou ϕ le sont aussi. Est-ce vrai pour la validité ?
3. Monter que $\varphi \models \phi$ si et seulement si $\varphi \Rightarrow \phi$ est valide (ce que l'on note $\models \varphi \Rightarrow \phi$).

Exercice 5 (Sudoku)
Le Sudoku est un jeu qui se joue sur une grille 9×9. Chaque case contient un chiffre entre 1 et 9 inclus.

1. Proposer un ensemble de variables propositionnelles afin de modéliser une grille remplie.
2. Une grille est *valide* si les règles suivantes sont respectées : chaque chiffre apparaît de manière unique dans une même ligne, colonne ou bloc [2]. Proposer un ensemble de formules sur ces variables afin de modéliser les règles du jeu.
3. Mettre ces formules sous forme normale conjonctive.

1. On dit aussi que c'est une *tautologie*.
2. Une grille de taille 9×9 contient 9 *blocs* distincts de taille 3×3.