Université de Rennes — ENS Rennes, L3 SIF

Logique

Devoir sur table, 2 mars 2023

Durée : 1h30.
Documents autorisés, machines interdites.

1 Définitions inductives

On considère un ensemble fini de noeuds G muni d'une relation binaire d'adjacence $n \to n'$, et un élément arbitraire $n_1 \in G$. On propose ci-dessous plusieurs définitions de sous-ensembles de G.

On définit inductivement $A \subseteq G$ par :
- $n_1 \in A$;
- pour tous noeuds m, m' on a $m' \in A$ si $m \to m'$ et $m \in A$.

On définit inductivement $A' \subseteq G$ par :
- $n_1 \in A'$;
- pour tous noeuds m, m' tel que $m' \in A'$, on a $m \to m'$.

On définit inductivement $U \subseteq G$ par :
- pour tout noeud m', on a $m' \in U$ si,
  pour tout noeud m tel que $m \to m'$, on a $m \in U$.

On définit inductivement $E \subseteq G$ par :
- pour tout noeud m', on a $m' \in E$ si
  il existe un noeud m tel que $m \to m'$ et $m \in E$.

Question 1 Laquelle de ces définitions n'est pas une définition inductive bien formée ? On pourra exhiber la fonction sous-jacente pour montrer qu'elle n'est pas monotone.

Question 2 Lequel des sous-ensembles restants est vide quel que soit G ? Le démontrer par induction sur la définition du sous-ensemble, ou bien en revenant au théorème de point fixe pour la fonction monotone sous-jacente.

Question 3 Un des sous-ensembles restants peut être vide, ou non, en fonction de G. Lequel ? justifier en donnant des exemples de graphes rendant l'ensemble vide ou non.

Question 4 Caractériser le sous-ensemble restant : l'appartenance d'un noeud à cet ensemble s'exprime directement en des termes usuels de théorie des graphes. Démontrer la caractérisation en donnant deux preuves par induction (une pour chaque direction de l'équivalence).

2 Quizz

Le problème SAT consiste à déterminer si une formule propositionnelle donnée est satisfaisable ou non. On a étudié en cours plusieurs variantes de ce problème :
- DNF-SAT dont l'entrée est une formule en forme normale disjonctive ;
- CNF-SAT dont l'entrée est une formule en forme normale conjonctive ;

Le problème VALID consiste à déterminer si une formule propositionnelle donnée est valide ou non. On définit comme ci-dessus les variantes DNF-VALID et CNF-VALID.

Parmi les énoncés suivants, lesquels sont corrects ? Justifier dans tous les cas en donnant un argument ou un contre-argument ; quelques lignes devraient suffire à chaque fois.

1. Le problème VALID est NP-complet.
2. Le problème DNF-VALID est NP-complet.
3. Le problème CNF-VALID est NP-complet.

3 Résolution

On fixe dans cet exercice $\mathcal{P} = \{P, Q\}$. On considère les quatre formules suivantes :

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge \neg Q) \qquad (P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \qquad (\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \wedge Q) \qquad (\neg P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

Question 1 Donner une interprétation satisfaisant les trois premières formules.

Question 2 Donner un arbre sémantique élagué pour l'ensemble des quatre formules.

Question 3 Donner, pour chacune des formules, un ensemble de clauses logiquement équivalent.

Question 4 Donner un arbre sémantique élagué pour l'ensemble des clauses obtenues pour les quatre formules.

Question 5 Donner une dérivation de la clause vide en résolution à partir de l'ensemble de clauses précédent.

$$\frac{C \vee L \quad \overline{L} \vee C'}{C \vee C'}\ R \qquad \frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}\ F$$

FIGURE 1 – Règles de preuve par résolution

4 Expressibilité

On considère dans cet exercice des formules propositionnelles sur l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Question 1 Existe-t-il un ensemble infini de formules dont l'unique modèle est l'interprétation I telle que $I(P_i) = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$? Même question quand l'ensemble de formules doit être fini.

Question 2 Donner un ensemble de formules dont les modèles sont les interprétations qui rendent au plus une variable vraie, i.e. les I telles que $|\{i \in \mathbb{N} \mid I(P_i) = 1\}| \leq 1$.

Question 3 Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules dont les modèles sont les interprétations I telles que $|\{i \in \mathbb{N} \mid I(P_i) = 1\}| = 1$? *Indication : compacité.*

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}\; ax$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_1 \quad \Gamma \vdash \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\; \wedge_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}{\Gamma \vdash \phi_i}\; \wedge_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi_i}{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\; \vee_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2 \quad \Gamma, \phi_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\; \vee_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}\; \Rightarrow_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\; \Rightarrow_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\; \top_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\; \bot_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}\; \neg_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \bot}\; \neg_{\mathrm{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\; \mathrm{RAA}$$

FIGURE 2 – Règles de NK. Le sous-système NJ est obtenu en excluant la règle RAA.

5 Déduction naturelle

On a vu en cours une dérivation du tiers-exclu dans le système NK :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)}\; ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash \neg(P \vee \neg P)}\; ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash P}\; ax}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash P \vee \neg P}}{\neg(P \vee \neg P), P \vdash \bot}\; \neg_{\mathrm{E}}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg P}\; \neg_{\mathrm{I}}}{\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P}\; \vee_{\mathrm{I}}}{\dfrac{\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot}{\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)}\; \neg_{\mathrm{I}}}\; \neg_{\mathrm{E}}}{\vdash P \vee \neg P}\; RAA$$

Question 1 Soit C une clause. Montrer qu'il existe une dérivation de $\vdash C$ dans NK si et seulement si C est valide.

Question 2 Soit C une clause. Quand est-ce que $\vdash C$ peut être dérivé en NJ ?
Indication : on a vu en cours qu'un séquent admet une dérivation dans NJ si et seulement il admet une dérivation sans détour *dans NJ.*

Question 3 Montrer que toute clause C est logiquement équivalente à une formule C' exprimable uniquement au moyen de littéraux et du seul connecteur logique $\Rightarrow$ (pas de conjonction, disjonction, ni négation) tel que $\vdash C'$ est dérivable en NJ quand C est valide.

Question 4 Soient C et C' deux clauses telles que $C \models C'$ mais $\not\models C'$, i.e. C' est conséquence logique de C mais C' n'est pas valide. Montrer qu'on peut dériver $C \vdash C'$ dans le système NJ.