Mémo de mise à niveau en Logique

Sophie Pinchinat

Professeure ISTIC-IRISA
Université de Rennes 1

La logique, c'est quoi ?

La logique = l'étude de langages pour exprimer des énoncés et conduire un raisonnement

Pour cela, il nous faut :

- définir un langage, c'est la syntaxe, pour écrire les énoncés/formules;
- définir la sémantique des formules, c-à-d. ce qu'elles expriment/signifient;
- étudier les propriétés de ce langage de formules, comme l'existence d'un ensemble de règles de déduction pour raisonner.

La logique, c'est quoi ?

Il existe de nombreux langages pour la logique, les plus classiques sont :

- le calcul des propositions/calcul propositionnel;
- le calcul des prédicats/logique du premier ordre;

mais aussi la logique du second ordre, la logique modale, la logique temporelle, la logique épistemique...

Voir l'équipe de recherche LogicA de l'IRISA (http://www-logica.irisa.fr/team-members/)

Calcul des propositions
=
Calcul propositionnel

Calcul des propositions : Syntaxe

- un ensemble *Prop* de variables propositionnelles;
- l'ensemble des formules sur *Prop*, noté $\mathcal{F}_{Prop}$ est décrit par *induction* :
  - $Prop \subseteq \mathcal{F}_{Prop}$;
  - $\top \in \mathcal{F}_{Prop}$ et $\perp \in \mathcal{F}_{Prop}$;
  - Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule;
  - Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$ $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ sont des formules.

Notation pour la syntaxe du calcul des propositions

$$\mathcal{F}_{Prop} \ni A, B ::= p \mid \top \mid \perp \mid (\neg A) \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B)$$

où $p \in Prop$.

Calcul des propositions : Sémantique

Valuation : une fonction $\nu : Prop \rightarrow \{\texttt{vrai}, \texttt{faux}\}$.

Valeur de vérité d'une formule pour une valuation ν

- $p \in Prop$, la valeur est $\nu(p)$; $\nu(\top) = \texttt{vrai}$ et $\nu(\perp) = \texttt{faux}$;
- $\nu(\neg A)$ est l'"inverse" de la valeur $\nu(A)$;
- $\nu(A \wedge B)$ est la conjonction de $\nu(A)$ et $\nu(B)$:
  $\nu(A \wedge B) = \texttt{vrai}$ exactement lorsque $\nu(A) = \nu(B) = \texttt{vrai}$;
- $\nu(A \vee B)$ est la disjonction de $\nu(A)$ et $\nu(B)$:
  $\nu(A \vee B) = \texttt{faux}$ exactement lorsque $\nu(A) = \nu(B) = \texttt{faux}$;
- $\nu(A \rightarrow B) = \texttt{faux}$ dans le seul cas où $\nu(A) = \texttt{vrai}$ et $\nu(B) = \texttt{faux}$.

Calcul des propositions : Sémantique (suite)

Table de vérité des opérateurs

A	$(\neg A)$
vrai	faux
faux	vrai

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg A \vee B)$
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux	faux	vrai	vrai

Étude du Calcul des propositions

Satisfaisabilité

$A \in \mathcal{F}_{Prop}$ est satisfaisable s'il existe une valuation ν tq $\nu(A) = \texttt{vrai}$; alors ν est un modèle de A.

Exemples de formules satisfaisables et insatisfaisables

satisfaisables : $p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, \top$ insatisfaisables : $p \wedge \neg p, \perp$

Validité=Tautologie

$A \in \mathcal{F}_{Prop}$ est valide/une validité/une tautologie si pour n'importe quelle valuation ν, $\nu(A) = \texttt{vrai}$.

Exemples de validités et non-validités

valides : $p \vee \neg p, p \rightarrow p, \top$ non-valides : $p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, \perp$

Étude du Calcul des propositions (suite)

Equivalence de formules et lois algébriques

$A, B \in \mathcal{F}_{Prop}$ sont équivalentes, noté $A \equiv B$, si pour toute valuation ν, $\nu(A) = \nu(B)$.

Exemples de lois algébriques

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \qquad A \vee B \equiv B \vee A$$
$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$
$$C \vee (A \wedge B) \equiv (C \vee A) \wedge (C \vee B)$$
$$C \wedge (A \vee B) \equiv (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$$
$$(\neg(\neg A)) \equiv A$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B) \qquad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$
$$A \to B \equiv \neg A \vee B \qquad (\neg(A \to B)) \equiv (A \wedge (\neg B))$$

Calcul des prédicats = Logique du premier ordre

Calcul des prédicats : Signature

- un ensemble $\mathcal{V}$ de variables $(x, y, z, x_1, x_2, \ldots)$;
- un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions avec leur arité (typiquement notés $f(.), g(., .), h(., ., .)$);
- un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats avec leur arité (typiquement notés $P(.), Q(., .), R(., ., .)\ldots$);
- les connecteurs $\neg, \wedge, \vee, \to$ du calcul des propositions;
- des quantificateurs (typiquement $\forall x, \forall y, \exists x, \ldots$).

Calcul des prédicats : Syntaxe

On se donne $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$, et $\mathcal{P}$.

Ensemble des termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$

avec $\mathcal{V}$ les variables et $\mathcal{F}$ les symboles des fonctions.

- $x \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ pour toute variable $x \in \mathcal{V}$;
- $c \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ pour tout symbole $c \in \mathcal{F}$ d'arité 0 (constante);
- si f est d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$.

Ensemble des formules

$$\top \mid \bot \mid R(t_1, t_2, \ldots, t_m) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \to \psi \mid \forall x \varphi \mid \exists x \varphi$$

où $R \in \mathcal{P}$ est d'arité m, et $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, et $x \in \mathcal{V}$.

Calcul des prédicats : Sémantique (contenu de l'UE LOG en L3)

Il faut une interprétation donnée des symboles.

Sur la signature avec f un symbole de fonction d'arité 2, et P un symbole de prédicat d'arité 2

Exemple

La formule $\forall x P(f(x,x),x)$ est :

- vraie dans $\langle \mathbb{N}, +, \geqslant \rangle$ car $n+n \geqslant n$ pour tout n;
- fausse dans $\langle \mathbb{Z}, +, \geqslant \rangle$ car par exemple $(-1+-1) \ngeqslant -1$.

Exemple

$(\exists x \forall y P(x,y)) \rightarrow (\forall y \exists x P(x,y))$ est valide (c-à-d. toujours vraie).