Mise à niveau en Logique
Cours

Sophie Pinchinat
Professeure IRISA
Université de Rennes 1

Septembre 2021

Petite mise en jambes: les métiers

Mr Peintre, Mr Maçon et Mr Charpentier sont 3 amis portant le même nom que leurs 3 métiers, mais pas nécessairement dans cet ordre.

1. Mr Charpentier n'est pas peintre.
2. Mr Maçon n'est pas charpentier.
3. Mr Charpentier est charpentier.
4. Mr Maçon n'est pas peintre.

Qui fait quoi ? (Remplir le tableau avec ✓ pour "oui" et ou × pour éliminer cette possibilité)

	Peintre	Maçon	Charpentier
Mr. Peintre			
Mr. Maçon			
Mr. Charpentier			

La solution (Les métiers)

Mr Peintre, Mr Maçon et Mr Charpentier sont 3 amis portant le même nom que leurs 3 métiers, mais pas nécessairement dans cet ordre.

1. Mr Charpentier n'est pas peintre.
2. Mr Maçon n'est pas charpentier.
3. Mr Charpentier est charpentier.
4. Mr Maçon n'est pas peintre.

Qui fait quoi ?

	Peintre	Maçon	Charpentier
Mr. Peintre	✓	×	×
Mr. Maçon	×	✓	×
Mr. Charpentier	×	×	✓

On continue les exercices: Géographie

Anatole va devoir déménager pour son travail l'année prochaine. Il a demandé Londres en 1er choix et Berlin en second choix. Barnabé est justement allé à Berlin lors de ses dernières vacances. Il a trouvé la ville jolie mais le climat un peu froid. Son ami, Denis, lui dit : "Chez moi on n'a pas ce problème là. Ma ville n'est peut-être pas une capitale mais on a le soleil et la mer !"
Où habitent Anatole, Barnabé, Charles et Denis ? Remplir le tableau ci-dessous.

	Londres	Berlin	Barcelone	Paris
Anatole				
Barnabé				
Charles				
Denis				

La solution (Géographie)

Anatole va devoir déménager pour son travail l'année prochaine. Il a demandé Londres en 1er choix et Berlin en second choix. Barnabé est justement allé à Berlin lors de ses dernières vacances. Il a trouvé la ville jolie mais le climat un peu froid. Son ami, Denis, lui dit : "Chez moi on n'a pas ce problème là. Ma ville n'est peut-être pas une capitale mais on a le soleil et la mer !"
Où habitent Anatole, Barnabé, Charles et Denis ?

	Londres	Berlin	Barcelone	Paris
Anatole	×	×	×	✓
Barnabé	✓	×	×	×
Charles	×	✓	×	×
Denis	×	×	✓	×

On continue les exercices:

Chang commence : Si j'habitais en appartement, j'aimerais bien être au dernier étage pour avoir une belle vue.
- Moi, dit Baptiste, je ne pourrais pas vivre sur une péniche, j'aurais le mal de mer à force.
- Tu rigoles ? dit Mohamed, moi je rêve d'habiter sur une péniche même si mon jardin me manquerait.
- Moi aussi, dit John, mais je me sentirais sans doute à l'étroit comparé à mon château..."

Retrouver les habitations de chacun.

	appartement	péniche	château	maison
Chang				
Baptiste				
Mohammed				
John				

La solution (Chang et ses potos)

Chang commence : "Si j'habitais en appartement, j'aimerais bien être au dernier étage pour avoir une belle vue. - Moi, dit Baptiste, je ne pourrais pas vivre sur une péniche, j'aurais le mal de mer à force. - Tu rigoles ? dit Mohamed, moi je rêve d'habiter sur une péniche même si mon jardin me manquerait. - Moi aussi, dit John, mais je me sentirais sans doute à l'étroit comparé à mon château..."
Retrouver les habitations de chacun.

	appartement	péniche	château	maison
Chang	×	✓	×	×
Baptiste	✓	×	×	×
Mohammed	×	×	×	✓
John	×	×	✓	×

On continue les exercices: Les enseignants

Il y a cinq matières à enseigner : anglais, français, maths, histoire et géographie.

1. Monsieur Lenoir ne sait pas ce qu'est un angle.
2. Monsieur Leblanc est le seul à savoir où sont les montagnes Rocheuses.
3. Chacun enseigne trois matières.
4. Aucune matière n'est enseignée par 3 personnes.
5. Certaines matières sont enseignées par 2 personnes.
6. Monsieur Leroux est bilingue et aime bien les maths.
7. Les profs d'Anglais enseignent aussi le Français.

Qui enseigne quelles matières?

	Anglais	Français	Maths	Histoire	Géographie
Lenoir					
Leblanc					
Leroux					

La solution (Les enseignants)

Il y a cinq matières à enseigner : anglais, français, maths, histoire et géographie.

1. Monsieur Lenoir ne sait pas ce qu'est un angle.
2. Monsieur Leblanc est le seul à savoir où sont les montagnes Rocheuses.
3. Chacun enseigne trois matières.
4. Aucune matière n'est enseignée par 3 personnes.
5. Certaines matières sont enseignées par 2 personnes.
6. Monsieur Leroux est bilingue et aime bien les maths[1].
7. Les profs d'Anglais enseignent aussi le Français.

	Anglais	Français	Maths	Histoire	Géographie
Lenoir	✓	✓	×	✓	×
Leblanc	×	×	✓	✓	✓
Leroux	✓	✓	✓	×	×

[1] comprendre ici qu'il enseigne Anglais et Maths.

La logique, c'est quoi ?

La logique est un langage pour raisonner (on s'intéresse à la forme de l'argumentation sans mettre en doute les hypothèses – on peut très bien raisonner avec des hypothèses erronées, c'est le principe du raisonnement par l'absurde). Pour cela, il nous faut :

- Un langage précis/non-ambigu pour écrire des énoncés/formules (syntaxe)
- Une sémantique pour savoir ce que les énoncés expriment/signifient (sémantique)
- Des propriétés de ce langage et parfois un ensemble de règles de déduction
- Il y a **plein** de logiques. Les plus classiques :
  - le calcul des propositions
  - le calcul des prédicats
  - la logique modale

Contenu

Exercices

Première séance d'exercices sur le calcul des propositions

Calcul des propositions : Syntaxe

On se fixe un ensemble *Prop* de variables propositionnelles, et on note $\mathcal{F}_{Prop}$ le langage des formules que l'on peut écrire à partir de *Prop*. Il est décrit par induction:

- Si $p \in Prop$, alors p est une formule ($p \in \mathcal{F}_{Prop}$) ;
- Si A est une formule, alors $(\neg A)$ est une formule ;
- Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$ $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ sont des formules.

On peut aussi rajouter deux formules atomiques : $\top$ et $\bot$.

$$\mathcal{F}_{Prop} \ni A, B ::= \top \mid \bot \mid p \mid (\neg A) \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B)$$

où $p \in Prop$.

Exemples

On s'inpire des exercices déjà vus.

- *Prop* = {Me**EST**me, Me**EST**ma, Me**EST**pe, . . .}
  - $\neg$Me**EST**Pe est une formule.
  - (Ma**EST**me $\rightarrow \neg$Ma**EST**ma) $\wedge$ (Ma**EST**me $\rightarrow \neg$Ma**EST**pe) est une formule.

Exercice

Toujours avec les exercices déjà vus, donnez d'autres exemples de formules.

Calcul des propositions : Sémantique (introduction)

- On se donne une valeur de vérite/valuation `vrai` ou `faux` pour les variables propositionnelles
- On étend la valeur de vérité aux formules du langages
- On est alors capable de :
  - définir qu'une formule A peut être rendue `vrai`, en choisissant une valuation adéquate – elle est alors satisfaisable, sinon elle est non satisfaisable/contradictoire.
  - définir qu'une formule est "toujours" `vrai` (quelle que soit la valuation choisie) – elle est alors valide.
  - dire si deux formules sont sont vraies en même temps/équivalentes.

Calcul des propositions : Sémantique

On donne juste la valeur/valeur de vérité des propositions qui sont utilisées, puis on peut en déduire celle des énoncés.

Valuation (pour décrire une situation)

Une *valuation* est une fonction $v : Prop \to \{\texttt{vrai}, \texttt{faux}\}$

On étend les valuations aux formules par induction, c-à-d. en fonction de la forme de la formule. Si la formule est :

- $p \in Prop$, alors on prend évidemment $v(p)$;
- $(\neg A)$, on regarde $v(A)$ et on “inverse” la valeur ;
- $(A \wedge B)$, alors on prend la conjonction de $v(A)$ et $v(B)$; $v(A \wedge B) = \texttt{vrai}$ exactement lorsque $v(A) = v(B) = \texttt{vrai}$;
- $(A \vee B)$, alors on prend la disjonction de $v(A)$ et $v(B)$; $v(A \vee B) = \texttt{faux}$ exactement lorsque $v(A) = v(B) = \texttt{faux}$;
- $(A \to B)$, alors $v(A \to B) = \texttt{faux}$ exactement lorsque $v(A) = \texttt{vrai}$ et $v(B) = \texttt{faux}$.

Calcul des propositions : Sémantique (suite)

Table de vérité des opérateurs

A	$(\neg A)$
vrai	faux
faux	vrai

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg A \vee B)$
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	faux	faux	vrai	vrai

Notions dérivées de la sémantique du calcul des propositions

Satisfaisabilité

Une formule $A \in \mathcal{F}_{Prop}$ est satisfaisable s'il existe une valuation v telles que $v(A) = \mathtt{vrai}$.
On dit que la valuation v est un modèle de A.

Validité/Tautologie

Une formule $A \in \mathcal{F}_{Prop}$ est valide/une tautologie si pour n'importe quelle valuation v, $v(A) = \mathtt{vrai}$.

Equivalence de formules et lois algébriques

Deux formules $A, B \in \mathcal{F}_{Prop}$ sont équivalentes, noté $A \equiv B$, si pour n'importe quelle valuation v, $v(A) = v(B)$.

Exercice

Donner plusieurs modèles de $p \rightarrow (q \vee r)$

Exercice

Justifier les équivalences suivantes ($A, B, C \in \mathcal{F}_{Prop}$) :

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ et $A \vee B \equiv B \vee A$
2. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
3. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
4. $C \vee (A \wedge B) \equiv (C \vee A) \wedge (C \vee B)$
5. $C \wedge (A \vee B) \equiv (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$
6. $(\neg(\neg A)) \equiv A$
7. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
8. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
9. $(\neg(A \rightarrow B)) \equiv (A \wedge (\neg B))$

Retour sur les exercices du début : les métiers

Mr Peintre, Mr Maçon et Mr Charpentier sont 3 amis portant le même nom que leurs 3 métiers, mais pas nécessairement dans cet ordre.

1. Mr Charpentier n'est pas peintre.
2. Mr Maçon n'est pas charpentier.
3. Mr Charpentier est charpentier.
4. Mr Maçon n'est pas peintre.

Qui fait quoi ?
Formaliser l'Exercice sur les métiers en utilisant des *variables propositionelles*.

Modélisation : les métiers

On pourra utiliser la variable propositionnelle MONSIEUR*Peintre*EST*Macon* (qu'on écrira plus succinctement Pe**EST**ma) à valeur dans {`vrai`, `faux`} qui vaut `vrai` si effectivement Monsieur Peintre est maçon, et `faux` sinon.

D'après la phrase "Mr Charpentier est charpentier", on sait par exemple que la proposition Ch**EST**ch vaut `vrai`, ce qu'on écrit simplement Ch**EST**ch, et que la proposition Ma**EST**pe vaut `faux`, ce qu'on écrit alors ¬Ma**EST**pe.

Écrire avec des formules pour les données du problème, en tenant compte des hypothèses implicites que chaque Monsieur a un unique métier.

La solution (les métiers) 1/4

On sait que chaque Monsieur a un métier, et implicitement qu'il est unique.

$$
\begin{aligned}
&(\text{Pe}\mathbf{EST}\text{pe} \vee \text{Pe}\mathbf{EST}\text{ma} \vee \text{Pe}\mathbf{EST}\text{ch})\\
\wedge&(\text{Ma}\mathbf{EST}\text{pe} \vee \text{Ma}\mathbf{EST}\text{ma} \vee \text{Ma}\mathbf{EST}\text{ch})\\
\wedge&(\text{Ch}\mathbf{EST}\text{pe} \vee \text{Ch}\mathbf{EST}\text{ma} \vee \text{Ch}\mathbf{EST}\text{ch})\\
\wedge&(\text{Pe}\mathbf{EST}\text{pe} \rightarrow (\neg\text{Pe}\mathbf{EST}\text{ma} \wedge \neg\text{Pe}\mathbf{EST}\text{ch}))\\
\wedge&(\text{Pe}\mathbf{EST}\text{ma} \rightarrow (\neg\text{Pe}\mathbf{EST}\text{pe} \wedge \neg\text{Pe}\mathbf{EST}\text{ch}))\\
\wedge&(\text{Pe}\mathbf{EST}\text{ch} \rightarrow (\neg\text{Pe}\mathbf{EST}\text{pe} \wedge \neg\text{Pe}\mathbf{EST}\text{ma}))\\
\wedge&(\text{Ma}\mathbf{EST}\text{ch} \rightarrow (\neg\text{Ma}\mathbf{EST}\text{pe} \wedge \neg\text{Ma}\mathbf{EST}\text{ma}))\\
\wedge&\ldots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

La solution (les métiers) 2/4

On sait aussi que tous les métiers sont représentés.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Pe}\mathbf{EST}\mathrm{pe} \vee \mathrm{Ma}\mathbf{EST}\mathrm{pe} \vee \mathrm{Ch}\mathbf{EST}\mathrm{pe}) \\ &\wedge(\mathrm{Pe}\mathbf{EST}\mathrm{ma} \vee \mathrm{Ma}\mathbf{EST}\mathrm{ma} \vee \mathrm{Ch}\mathbf{EST}\mathrm{ma}) \\ &\wedge(\mathrm{Pe}\mathbf{EST}\mathrm{ch} \vee \mathrm{Ma}\mathbf{EST}\mathrm{ch} \vee \mathrm{Ch}\mathbf{EST}\mathrm{ch}) \end{aligned} \tag{2}$$

La solution (les métiers) 3/4

On sait que

1. Mr Charpentier n'est pas peintre.
2. Mr Maçon n'est pas charpentier.
3. Mr Charpentier est charpentier.
4. Mr Maçon n'est pas peintre.

D'après 1.

$$\neg \mathrm{Ch}\mathbf{EST}\mathrm{pe} \tag{3}$$

D'après 2.

$$\neg \mathrm{Ch}\mathbf{EST}\mathrm{ma} \tag{4}$$

D'après 3.

$$\mathrm{Ch}\mathbf{EST}\mathrm{ch} \tag{5}$$

D'après 4.

$$\neg \mathrm{Ma}\mathbf{EST}\mathrm{pe} \tag{6}$$

La solution (les métiers) 4/4

On se demande si la GROSSE formule

$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (6)$$

est satisfaisable.
Si oui, une valuation solution nous dira quelles sont les propositions vraies.
Par exemple, on a forcément Ch**EST**ch vraie.

Exercice : Les enseignants

Il y a cinq matières à enseigner : anglais, français, maths, histoire et géographie.

1. Monsieur Lenoir ne sait pas ce qu'est un angle.
2. Monsieur Leblanc est le seul à savoir où sont les montagnes Rocheuses.
3. Chacun enseigne trois matières.
4. Aucune matière n'est enseignée par 3 personnes.
5. Certaines matières sont enseignées par 2 personnes.
6. Monsieur Leroux est bilingue et aime bien les maths[2].
7. Les profs d'Anglais enseignent aussi le Français.

Qui enseigne quelles matières?

[2] comprendre ici qu'il enseigne Anglais et Maths.

La solution (Les enseignants) 1/5

1. Monsieur Lenoir ne sait pas ce qu'est un angle.
2. Monsieur Leblanc est le seul à savoir où sont les montagnes Rocheuses.
3. Chacun enseigne trois matières.
4. Aucune matière n'est enseignée par 3 personnes.
5. Certaines matières sont enseignées par 2 personnes.
6. Monsieur Leroux est bilingue et aime bien les maths[3].
7. Les profs d'Anglais enseignent aussi le Français.

On considère les variables propositionnelles de la forme X-ENSEIGNE-Y où X est choisi parmi LN, LB, LR et Y est choisi parmi A, F, M, H, G.
D'après 1.

$$\neg LN\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}M \tag{7}$$

[3] comprendre ici qu'il enseigne Anglais et Maths.

La solution (Les enseignants) 2/5

2. Monsieur Leblanc est le seul à savoir où sont les montagnes Rocheuses.

D'après 2.

$$\neg LN\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}G \wedge \neg LR\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}G \tag{8}$$

3. Chacun enseigne trois matières.

D'après 3. il faut écrire toutes les formules de la forme

$$X\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}Y \wedge X\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}Z \wedge X\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}T \tag{9}$$

où Y, Z, T sont différents parmi les 5 choix possibles A, F, M, H, G.
Ainsi, pour chaque X parmi LN, LB, LR, il y a $C_5^3 = 10$ façons de choisir Y, Z, T, donc on a en tout 3×10 formules à écrire.
Par quel connecteur ces formules sont-elle séparées ?

La solution (Les enseignants) 3/5

4. Aucune matière n'est enseignée par 3 personnes.

D'après 4. pour chaque Y parmi A, F, M, H, G on doit écrire

$$\neg(LN\text{-ENSEIGNE-}Y \wedge LB\text{-ENSEIGNE-}Y \wedge LR\text{-ENSEIGNE-}Y) \tag{10}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\neg LN\text{-ENSEIGNE-}Y \vee \neg LB\text{-ENSEIGNE-}Y \vee \neg LR\text{-ENSEIGNE-}Y \tag{11}$$

5. Certaines matières sont enseignées par 2 personnes.

D'après 5.

$$\bigvee_{Y \in \{A,F,M,H,G\}} \begin{pmatrix} (LN\text{-ENSEIGNE-}Y \wedge LB\text{-ENSEIGNE-}Y) \\ \vee(LN\text{-ENSEIGNE-}Y \wedge LR\text{-ENSEIGNE-}Y) \\ \vee(LB\text{-ENSEIGNE-}Y \wedge LR\text{-ENSEIGNE-}Y) \end{pmatrix} \tag{12}$$

La solution (Les enseignants) 4/5

6. Monsieur Leroux est bilingue et aime bien les maths[4].

D'après 6.

$$LR\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}A \wedge LR\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}M \tag{13}$$

7. Les profs d'Anglais enseignent aussi le Français.

D'après 7. pour chaque X parmi LN, LB, LR,

$$X\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}A \rightarrow X\text{-}\textsc{enseigne}\text{-}F \tag{14}$$

[4]comprendre ici qu'il enseigne Anglais et Maths.

Retour sur les exemples pour le Calcul des prédicats

On revient sur les exemples

Motivations 1/3

- Formules plus courtes que si on l'écrivait en calcul propositionnel
- Certaines formules peuvent concerner des domaines infinis :
  - *"pour tout nombre entier, il en existe un strictement plus grand"*
  - *"il n'existe pas de plus grand nombre réel"*

Motivations 2/3

- On se rend compte qu'il y a des propriétés concernant les énoncés :
  "Dans les graphes non-orientés connexes, pour tout sommet a et pour tout sommet b, il existe un chemin de a à b."
  dit la même chose que
  "Dans les graphes non-orientés connexes, pour tout sommet b et pour tout sommet a, il existe un chemin de a à b."

Motivations 2/3

- On se rend compte qu'il y a des propriétés concernant les énoncés :
  "Dans les entiers, pour tout entier n et pour tout entier m, n et m sont comparables."
  dit la même chose que
  "Dans les entiers, pour tout entier m et pour tout entier n, n et m sont comparables."

  c'est parce que en fait les assertions

  $$\forall x \forall y \text{ <énoncé sur } x \text{ et } y\text{>}$$

  et

  $$\forall y \forall x \text{ <énoncé sur } x \text{ et } y\text{>}$$

  sont équivalentes.

  Et qu'en est-il de $\forall x \exists y$ <énoncé sur x et y> ?

Motivation 3/3

En logique propositionnelle on se limite à des connecteurs propositionnels (connecteurs associant des propositions, et non des variables et des propositions). Ceci ne permet pas de rendre compte des raisonnements tels que :

Tout être humain est mortel.
Or Socrate est un être humain.
Donc Socrate est mortel.

Ce raisonnement repose sur une analyse plus fine des énoncés en termes d'énoncés génériques et d'énoncés singuliers. Il utilise les notions d'objet et de propriété des objets.

Remarques

- Le quantificateur $\forall$ est une conjonction : Si on se limite à un ensemble fini d'objets $\{o_1, ..., o_n\}$ alors $(\forall x)p(x)$ énonce la même chose que $p(o_1) \wedge ... \wedge p(o_n)$.

Remarques

- Le quantificateur $\forall$ est une conjonction : Si on se limite à un ensemble fini d'objets $\{o_1, ..., o_n\}$ alors $(\forall x)p(x)$ énonce la même chose que $p(o_1) \wedge ... \wedge p(o_n)$.
- Une notion plus générale que celle de propriété est celle de prédicat qui exprime une relation entre plusieurs objets, comme $pere(Jean, Pierre)$ ou $pluspetitque(7, 0)$.

Remarques

- Le quantificateur $\forall$ est une conjonction : Si on se limite à un ensemble fini d'objets $\{o_1, ..., o_n\}$ alors $(\forall x)p(x)$ énonce la même chose que $p(o_1) \wedge ... \wedge p(o_n)$.
- Une notion plus générale que celle de propriété est celle de prédicat qui exprime une relation entre plusieurs objets, comme $pere(Jean, Pierre)$ ou $pluspetitque(7, 0)$.
- Un prédicat a zéro, un, ou plusieurs arguments.

Remarques

- Le quantificateur $\forall$ est une conjonction : Si on se limite à un ensemble fini d'objets $\{o_1, ..., o_n\}$ alors $(\forall x)p(x)$ énonce la même chose que $p(o_1) \wedge ... \wedge p(o_n)$.
- Une notion plus générale que celle de propriété est celle de prédicat qui exprime une relation entre plusieurs objets, comme $pere(Jean, Pierre)$ ou $pluspetitque(7, 0)$.
- Un prédicat a zéro, un, ou plusieurs arguments.
- Le calcul des prédicats est aussi appellé logique des prédicats ou logique du premier ordre, par oposition à la *logique du second ordre* et aux logiques d'ordre supérieur (qui contrairement à la logique des prédicats permettent de représenter la théorie des ensembles).

Remarques

- Le quantificateur $\forall$ est une conjonction : Si on se limite à un ensemble fini d'objets $\{o_1, ..., o_n\}$ alors $(\forall x)p(x)$ énonce la même chose que $p(o_1) \wedge ... \wedge p(o_n)$.
- Une notion plus générale que celle de propriété est celle de prédicat qui exprime une relation entre plusieurs objets, comme $pere(Jean, Pierre)$ ou $pluspetitque(7, 0)$.
- Un prédicat a zéro, un, ou plusieurs arguments.
- Le calcul des prédicats est aussi appellé logique des prédicats ou logique du premier ordre, par oposition à la *logique du second ordre* et aux logiques d'ordre supérieur (qui contrairement à la logique des prédicats permettent de représenter la théorie des ensembles).
- La logique propositionnelle peut alors être vue comme logique d'ordre 0.

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$

Exemples de traduction d’énoncés en formules

1. “ Tout est relatif. ” $(\forall x)relatif(x)$
2. “ Une porte est ouverte ou fermée. ”

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x)relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. "

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. “ Tout est relatif. ” $(\forall x) relatif(x)$
2. “ Une porte est ouverte ou fermée. ”
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. “ Tout ce qui brille n'est pas or. ” $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. “ Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. ”
   $(\exists x) peine(x) \wedge (\exists x) plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. “ Tout est relatif. ” $(\forall x) relatif(x)$
2. “ Une porte est ouverte ou fermée. ”
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. “ Tout ce qui brille n'est pas or. ” $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. “ Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. ”
   $(\exists x) peine(x) \wedge (\exists x) plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$
5. “ Tous les chemins mènent à Rome. ”

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "
   $(\exists x) peine(x) \wedge (\exists x) plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$
5. " Tous les chemins mènent à Rome. "
   $(\forall x)(chemin(x) \rightarrow MeneARome(x))$

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x)relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x)))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "
   $(\exists x)peine(x) \wedge (\exists x)plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$
5. " Tous les chemins mènent à Rome. "
   $(\forall x)(chemin(x) \rightarrow MeneARome(x))$
6. " Pour tout entier il existe un entier plus grand. "

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "
   $(\exists x) peine(x) \wedge (\exists x) plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$
5. " Tous les chemins mènent à Rome. "
   $(\forall x)(chemin(x) \rightarrow MeneARome(x))$
6. " Pour tout entier il existe un entier plus grand. "
   $(\forall x)(entier(x) \rightarrow \exists y(entier(y) \wedge PlusGrand(y, x)))$

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "
   $(\exists x) peine(x) \wedge (\exists x) plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$
5. " Tous les chemins mènent à Rome. "
   $(\forall x)(chemin(x) \rightarrow MeneARome(x))$
6. " Pour tout entier il existe un entier plus grand. "
   $(\forall x)(entier(x) \rightarrow \exists y(entier(y) \wedge PlusGrand(y, x)))$
7. " Il existe un plus grand entier. "

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x) relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \rightarrow (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "
   $(\exists x) peine(x) \wedge (\exists x) plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \rightarrow \neg plaisir(x))$
5. " Tous les chemins mènent à Rome. "
   $(\forall x)(chemin(x) \rightarrow MeneARome(x))$
6. " Pour tout entier il existe un entier plus grand. "
   $(\forall x)(entier(x) \rightarrow \exists y(entier(y) \wedge PlusGrand(y, x)))$
7. " Il existe un plus grand entier. "
   $(\exists x)(entier(x) \wedge \forall y(entier(y) \rightarrow PlusGrand(x, y)))$

Exemples de traduction d'énoncés en formules

1. " Tout est relatif. " $(\forall x)relatif(x)$
2. " Une porte est ouverte ou fermée. "
   $(\forall x)(porte(x) \to (ouvert(x) \vee ferme(x))$
3. " Tout ce qui brille n'est pas or. " $(\exists x)(brille(x) \wedge \neg or(x))$
4. " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir. "
   $(\exists x)peine(x) \wedge (\exists x)plaisir(x) \wedge (\forall x)(peine(x) \to \neg plaisir(x))$
5. " Tous les chemins mènent à Rome. "
   $(\forall x)(chemin(x) \to MeneARome(x))$
6. " Pour tout entier il existe un entier plus grand. "
   $(\forall x)(entier(x) \to \exists y(entier(y) \wedge PlusGrand(y, x)))$
7. " Il existe un plus grand entier. "
   $(\exists x)(entier(x) \wedge \forall y(entier(y) \to PlusGrand(x, y)))$

Logique des prédicats : que décrit-on ?

On vous donne la formule

$$(\forall x)(R(x,0) \to P(f(x)))$$

et on vous demande si cet énoncé est vraie.

Mais attendez, vous ne pouvez pas répondre !

- De quoi parle-t-on ? d'entiers ? de personne ? de sommets d'un graphe ? de chemins ?
- Que signifient les *symboles de prédicats* R et P ?
- Que signifie le *symbole de fonction* f, c-à-d. que vaut $f(x)$ si on se donne x ?

Logique des prédicats : que décrit-on ?

On vous donne la formule

$$(\forall x)(R(x,0) \rightarrow P(f(x)))$$

et on vous demande si cet énoncé est vraie.

Mais attendez, vous ne pouvez pas répondre !

- De quoi parle-t-on ? d'entiers ? de personne ? de sommets d'un graphe ? de chemins ?
- Que signifient les *symboles de prédicats* R et P ?
- Que signifie le *symbole de fonction* f, c-à-d. que vaut $f(x)$ si on se donne x ?

Il faut se mettre d'accord sur une interprétation des "choses".

En calcul propositionnel, la sémantique est obtenue à partir des *valuations*, en calcul des prédicats, elle est obtenue à partir des **structures**.

$(\forall x)(R(x,c) \to P(f(x)))$

- On peut se placer dans les entiers relatif $\mathbb{Z}$ où le symbole c s'interprète comme l'entier 0, le symbole f dénote la fonction "opposé" : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) = -k$, le symbole R signifie $\geqslant$, le symbole P signifie "être négatif".

$(\forall x)(R(x,c) \to P(f(x)))$

- On peut se placer dans les entiers relatif $\mathbb{Z}$ où le symbole c s'interprète comme l'entier 0, le symbole f dénote la fonction "opposé" : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) = -k$, le symbole R signifie $\geqslant$, le symbole P signifie "être négatif".

  On parle alors de la structure $(\mathbb{Z}, 0, -(.), \geqslant, \mathbb{Z}^-)$

$(\forall x)(R(x,c) \rightarrow P(f(x)))$

- On peut se placer dans les entiers relatif $\mathbb{Z}$ où le symbole c s'interprète comme l'entier 0, le symbole f dénote la fonction "opposé" : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) = -k$, le symbole R signifie $\geqslant$, le symbole P signifie "être négatif".

  On parle alors de la structure $(\mathbb{Z}, 0, -(.), \geqslant, \mathbb{Z}^-)$

- on peut se placer dans un arbre donné et parler de ses noeuds qui peuvent être blancs ou noirs, avec la racine pour le symbole c, R la relation de descendant, P pour les feuilles de l'arbre, et f pour l'application qui associe à un noeud son parent.

$(\forall x)(R(x,c) \to P(f(x)))$

- On peut se placer dans les entiers relatif $\mathbb{Z}$ où le symbole c s'interprète comme l'entier 0, le symbole f dénote la fonction "opposé" : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) = -k$, le symbole R signifie $\geqslant$, le symbole P signifie "être négatif".

  On parle alors de la structure $(\mathbb{Z}, 0, -(.), \geqslant, \mathbb{Z}^-)$

- on peut se placer dans un arbre donné et parler de ses noeuds qui peuvent être blancs ou noirs, avec la racine pour le symbole c, R la relation de descendant, P pour les feuilles de l'arbre, et f pour l'application qui associe à un noeud son parent.

  Quel serait la forme d'une structure qui reflète un arbre ?

Logique des prédicats : Syntaxe

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué:

- d'un ensemble $\mathcal{V}$ de variables d'objets (ou variables d'individu), notées $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$;

Logique des prédicats : Syntaxe

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué:

- d'un ensemble $\mathcal{V}$ de variables d'objets (ou variables d'individu), notées x, y, z, x_1, x_2, ...;
- d'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées $f, g, \ldots$

Logique des prédicats : Syntaxe

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué:

- d'un ensemble $\mathcal{V}$ de variables d'objets (ou variables d'individu), notées $x, y, z, x_1, x_2, ...$;
- d'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées $f, g, \dots$
- d'un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $P, Q, R, \dots$;

Logique des prédicats : Syntaxe

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué:

- d'un ensemble $\mathcal{V}$ de variables d'objets (ou variables d'individu), notées $x, y, z, x_1, x_2, ...$;
- d'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées $f, g, \ldots$
- d'un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $P, Q, R, \ldots$;
- les connecteurs $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ainsi que les parenthèses au besoin;

Logique des prédicats : Syntaxe

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué:

- d'un ensemble $\mathcal{V}$ de variables d'objets (ou variables d'individu), notées $x, y, z, x_1, x_2, ...$;
- d'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées $f, g, \ldots$
- d'un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $P, Q, R, \ldots$;
- les connecteurs $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ainsi que les parenthèses au besoin;
- des quantificateurs $\forall, \exists$;

Logique des prédicats : Syntaxe

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué:

- d'un ensemble $\mathcal{V}$ de variables d'objets (ou variables d'individu), notées $x, y, z, x_1, x_2, ...$;
- d'un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions à 0, 1, ou plusieurs arguments, notées $f, g, \ldots$
- d'un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $P, Q, R, \ldots$;
- les connecteurs $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ainsi que les parenthèses au besoin;
- des quantificateurs $\forall, \exists$;

La donnée de $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ est la signature du langage.

Premières données d'interprétation

On définit une structure du premier ordre $\mathcal{M}$ sur laquelle on saura interpréter les formules.

Ayant fixé un domaine d'interprétation D, on associe à chaque symbole de fonction une application dans D : pour chaque $f \in \mathcal{F}$ arité n, on choisit $f^{\mathcal{M}} : D^n \to D$ – en particulier pour $c \in \mathcal{F}$ d'arité 0, on a $c^{\mathcal{M}} \in D$.

Le uplet $(D, \{f^{\mathcal{M}}\}_{f \in \mathcal{F}})$ est une algèbre.

Exemples

On se fixe les symboles de fonction $\{0, opp, \oplus, \otimes\}$ d'arités respectives $0, 1, 2, 2$. On a par exemple les algèbres :

- $(\mathbb{Z}, 0, -(.), +, *)$ – le symbole *opp* correspond à l'opposé;
- $(\mathbb{N}, 1, 2 * (.), +, *)$ – le symbole 0 correspond à l'entier 1.

Interprétation des formules

On poursuit la définition d'une structure du premier ordre $\mathcal{M}$.

1. pour chaque symbole de prédicat $Q(.,\ldots,.)$ à n places, on choisit la relation n-aire $Q^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$

Interprétation des formules

On poursuit la définition d'une structure du premier ordre $\mathcal{M}$.

1. pour chaque symbole de prédicat $Q(.,\ldots,.)$ à n places, on choisit la relation n-aire $Q^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$
2. L'interprétation des formules plus générales se fait conformément à la logique propositionnelle en, et pour les quantifications :
   - la formule $\forall x A(x)$ est vraie dans $\mathcal{M}$ si "$A(x)$ est vrai pour toute interprétation de x dans $\mathcal{M}$ "
   - la formule $\exists x A(x)$ est vraie dans $\mathcal{M}$ si "$A(x)$ est vraie pour une interprétation de x" dans $\mathcal{M}$

Sémantique récap (plus formelle) 1/2

Interprétation

. Une interprétation $\mathcal{M}$ est constituée de :

- un ensemble non-vide D appelé domaine d'objets
- une valeur des variables dans D
- pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$ d'arité n, la donnée une application $f^{\mathcal{M}} : D^n \to D$.
- pour chaque chaque prédicat $Q \in \mathcal{P}$ d'arité n, la donnée sous-ensemble $Q^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$

Donnez des exemples...

Exercice

On reprend nos exemples des métiers, des enseignants, etc.