**Licence Informatique ISTIC**
**Module LOG** *2023-2024*

# LOG TD 3 (2 séances)

---

## Application de la méthode de résolution

---

**Exercice 1**
Il y a trois suspects pour un meurtre : Adams, Brown, et Clark. Adams dit : “Ce n’est pas moi. La victime était une vieille connaissance de Brown. Mais Clark la détestait.” Brown déclare : “Ce n’est pas moi. Je ne connaissais même pas cette personne. D’ailleurs je n’étais pas en ville cette semaine.” Clark dit : “Ce n’est pas moi. J’ai vu Adams et Brown en ville avec la victime ce jour-là ; l’un d’eux doit être le coupable.” Supposer que les deux innocents disent la vérité, mais pas nécessairement le coupable.

On nous dit qu’une solution au problème est que Brown est le coupable, mais est-ce la seule possibilité ?

Utiliser la méthode de résolution pour montrer qu’il n’y en a pas d’autre.

---

## Aspects syntaxiques et sémantiques du calcul des prédicats

---

**Exercice 2 (Termes en calcul des prédicats)**
On se donne un ensemble $X$ de variables. Pour chacune des signatures $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions suivantes, donnez plusieurs éléments de l’ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$ des termes définis sur $\mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F} = \{s[1]\}$
2. $\mathcal{F} = \{f[2]\}$
3. $\mathcal{F} = \{f[2], s[1], c[0]\}$

---

**Exercice 3**
On considère le langage $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{F} = \{c[0], f[1], g[2]\}$ et $\mathcal{P} = \{r[2], p[1], q[3]\}$.

**3.1** *Donnez trois termes de ce langage et utilisez les pour construire trois formules atomiques.*

**3.2** *Donnez quelques formules du premier ordre de ce langage.*

---

**Exercice 4**
On considère l'ensemble de variables $X = \{x, y, z\}$ et les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\forall x\, \exists z\, f(x, z)) \to (\exists x\, \forall y\, r(x, y, z)) \\
\varphi_2 &= (\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, f(x)) \to \forall x\, (p(x) \wedge f(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x\, ((\exists x\, g(f(x), a) \vee h(x, x)) \wedge (\forall y\, \exists x\, q(x, y) \vee \exists z\, p(z, y)))
\end{aligned}$$

**4.1** *Donnez les langages sur lesquels sont écrites ces formules.*

**4.2** *Quels sont les termes et les formules atomiques apparaissant dans ces formules?*

---

**Exercice (sur le cours, à faire seul.e) 5**
Soit $\mathcal{S}$ un langage du premier ordre. Pour une formule $\varphi \in FO_{\mathcal{S}}$, définissez les ensembles $\textsc{fvo}(\varphi)$ et $\textsc{bvo}(\varphi)$ des variables libres de $\varphi$ et des variables liées de $\varphi$ respectivement.

---

**Exercice 6**
Soient les trois formules suivantes, où on convient que le symbole "$a$" n'est pas une variable.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x\, \exists z\, r(x, z) \to \exists x\, \forall y\, r(x, z) \\
\varphi_2 &= \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \to \forall x (p(x) \wedge q(x)) \\
\varphi_3 &= \forall x\, ((\exists x\, p(f(x), a) \vee q(x, x)) \wedge (\forall y\, \exists x\, q(x, y) \vee \exists z\, p(z, y)))
\end{aligned}$$

**6.1** *Pour chacune des formules, déterminez les occurrences lieés et libres de chaque variable.*

**6.2** *Renommez les variables pour obtenir une formule équivalente telle que pour aucune sous-formule, il existe une occurrence libre et une occurrence liée d'une même variable.*

---

**Exercice 7**
**7.1** *Proposer une signature pour parler des nombres réels positifs ordonnés de manière à pouvoir écrire les formules qui expriment que :*

1. *l'ordre est dense,*
2. *il existe un plus petit élément,*

3. *qu'il n'existe pas de plus grand élément.*

**7.2** *Proposer une signature pour parler des listes de manière à pouvoir écrire les formules qui expriment que :*

1. *la liste vide est un élément neutre pour la concaténation de listes,*
2. *la concaténation n'est pas commutative,*
3. *une liste à laquelle on ajoute un entier en tête n'est pas vide.*

**7.3** *Proposer une signature pour parler des graphes orientés avec sommets colorés sur les trois couleurs Rouge (R), Vert (V), et Bleu (B), de manière à pouvoir écrire les formules qui expriment que :*

1. *la relation d'arc est réflexive(/non-réflexive), irréflexive(/non-irrefléxive), symétrique(/non-symétrique), anti-symétrique, transitive,*
2. *le graphe est trois colorable, la concaténation n'est pas commutative,*
3. *la relation* $Chem3(x, y)$ *qui catactérise les couples* $(s, t)$ *de sommets avec un chemin de longueur 3 entre* $s$ *et* $t$.

*Peut-on exprimer qu'un graphe est connexe, c'est à dire qu'il existe un chemin entre deux sommets quelconques du graphe ?*