Licence Informatique ISTIC
Module LOG *2023-2024*

LOG TD 1 (1 séance)

Calcul propositionnel

Exercice 1 (Structure arborescente des formules du calcul propositionnel)
On a vu en cours que les formules peuvent être représentées comme des arbres.

1.1 *Décrire la syntaxe du Calcul Propositionnel où les formules sont vues comme des arbres.*

1.2 *Soit la formule* $\varphi_0 = (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$. *Dessiner l'arbre représentant* φ_0. *Quelle est sa hauteur ?*

1.3 *On note* $h(\varphi)$ *la hauteur de la formule* φ, *qui correspond à la hauteur de l'arbre représentant* φ. *Définir la fonction* h *de manière inductive.*

1.4 *Même question pour la fonction* $n_\wedge$, *avec* $n_\wedge(\varphi)$ *le nombre de connecteurs* $\wedge$ *dans la formule* φ.

Notion de conséquence logique

Un *modèle d'un ensemble de formules* Γ du Calcul Propositionnel est une valuation ν telle que $\nu \models \varphi$, pour tout $\varphi \in \Gamma$. On note $mod(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ.
Un ensemble de formules Γ est *consistant* (ou *satisfaisable*) s'il admet au moins un modèle (i.e., si $mod(\Gamma) \neq \emptyset$), sinon il est *contradictoire*, i.e., $mod(\Gamma) = \emptyset$.
Par exemple, $\{p \vee q, \neg p \vee r\}$ est satisfaisable et $\{p, \neg p\}$ est contradictoire.
Une formule φ est *conséquence logique* d'un ensemble de formules Γ, noté $\Gamma \models \varphi$, si, et seulement si, toute valuation modèle de Γ est aussi modèle de φ, i.e., si $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$.
Par exemple, $\{(p \rightarrow s) \vee q, \neg q\} \models p \rightarrow s$.

Exercice (sur le cours, à faire seul.e) 2

2.1 *Soit une tautologie $\varphi \in \mathcal{L}$. Montrer que pour tout ensemble de formules $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, on a $\Gamma \models \varphi$.*

2.2 *Soit un ensemble de formules $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ contradictoire. Montrer que quelque soit $\varphi \in \mathcal{L}$, on a $\Gamma \models \varphi$.*

2.3 *Montrer que si $\Gamma \models \varphi$ alors $mod(\Gamma \cup \{\varphi\}) = mod(\Gamma)$. La réciproque est-elle vraie ?*

2.4 *Montrer que $\Gamma \models \varphi$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est contradictoire.*

2.5 *Soit Γ un ensemble de formules pour lequel il existe une formule ψ telle que $\Gamma \models \psi$ et $\Gamma \models \neg\psi$. Montrer qu'alors Γ est contradictoire.*

Exercice (sur le cours, à faire seul.e) 3

On a vu en cours que pour tous ensembles de formules Σ et Γ, $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$. En déduire que si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $mod(\Gamma) \subseteq mod(\Sigma)$.

Exercice 4

On considère les 3 formules suivantes.

$$\varphi_1 : q \wedge \neg r \quad \varphi_2 : p \rightarrow (r \vee s) \quad \varphi_3 : \neg r \wedge (q \vee p)$$

Soit $\Gamma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ l'ensemble des contraintes à partir desquelles nous allons essayer de déduire les valeurs que doivent prendre les variables propositionnelles.

4.1 *Que faut-il établir pour montrer que φ_3 est conséquence logique de l'ensemble $\Gamma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$? Procéder.*

4.2 *En déduire que $mod(\Gamma_1) = mod(\Gamma_2)$, et déterminer cet ensemble.*

4.3 Γ_2 *est-il consistant ou contradictoire ?*

4.4 *Quelles conséquences logiques pouvons nous tirer de l'ensemble Γ_2 ?*

4.5 *Étudier l'ensemble de formules $\Gamma_3 = \{\neg q \wedge \neg s\} \cup \Gamma_2$.*

Exercice 5

Une publicité pour un magazine de tennis annonce : "Si je ne joue pas au tennis, je regarde du tennis à la télé. Et si je ne regarde pas de tennis à la télé, je lis des articles sur le tennis.". On peut supposer que l'orateur ne peut avoir qu'une activité à la fois. Que fait-il ?