



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD**

**UFR Sciences et Sciences de l'Ingénieur**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

Pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD**

*Mention : Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication*  
**École Doctorale SICMA**

présentée par

**Pierre Allain**

**IRISA Institut de Recherche en Informatique et Systèmes  
Aléatoires**

# **Analyse et synthèse de mouvements de foules par contrôle optimal**

**Thèse soutenue le 27 Janvier 2012,**  
devant la commission d'examen composée de :

**M. Étienne Mémin**  
Directeur de Recherche, INRIA Rennes / Président

**Mme. Soraia Musse**  
Professeur des Universités, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brésil /  
Rapporteur

**M. Éric Blayo**  
Professeur des Universités, Université Joseph Fourier, Grenoble / Rapporteur

**Mme. Sylvie Gibet**  
Professeur des Universités, Université de Bretagne-Sud / Directeur de thèse

**M. Nicolas Courty**  
Maître de Conférences, Université de Bretagne-Sud / Encadrant de thèse

**M. Thomas Corpetti**  
Chargé de recherche CNRS, LIAMA, Pékin / Encadrant de thèse



*“Sur une carte au 1/200 000e, en particulier sur  
une carte Michelin, tout le monde a l’air  
heureux ; les choses se gâtent sur une carte à plus  
grande échelle, comme celle que j’avais de  
Lanzarote : on commence à distinguer les  
résidences hôtelières, les infrastructures de loisirs.  
À l’échelle 1 on se retrouve dans le monde  
normal, ce qui n’a rien de réjouissant.”*

Michel Houellebecq, *La possibilité d’une île*,  
Fayard, 2005.



## Remerciements

Je tiens vivement à remercier les rapporteurs de cette thèse Soraia Musse et Eric Blayo d'avoir bien voulu prendre le temps de lire ce manuscrit, pour leurs remarques constructives, et d'avoir eu la patience de passer outre les trop nombreuses fautes de grammaire et autres coquilles qui y subsistaient. Je remercie de même Etienne Mémin d'avoir accepté d'examiner mes travaux.

Ensuite je remercie naturellement mes encadrants Nicolas Courty et Thomas Corpetti pour ces trois années passées ensemble à travailler sur ce sujet de thèse et pour la confiance qu'ils m'ont accordé. J'ai beaucoup appris grâce à eux, et ce dans des domaines aussi variés qu'intéressants. De même je leur suis reconnaissant pour leur disponibilité, leur enthousiasme, l'aide précieuse qu'ils auront pu m'apporter à tous les niveaux, ainsi que pour leur patience dont je n'ai (malgré tous les efforts du monde) pas réussi à éprouver les limites.

Je remercie également tous les membres du laboratoire Valoria/Irisa-UBS pour leur accueil durant ces quelques années et avec qui je me suis bien amusé. J'ai entre autres beaucoup apprécié les discussions enrichissantes concernant leurs domaines respectifs autour d'un café. Je pense par exemple à Frédéric G., Salah, Gildas, ou encore Jean-François, et d'autres bien évidemment. Je remercie aussi Sylviane pour sa disponibilité.

Je pense également aux doctorants du laboratoire qui se sont succédé durant ces trois années. Notamment Nicolas Bonnel que je remercie pour avoir porté à ma connaissance ce sujet de thèse et pour les soirées jeu de société ! Je pense également à Mohammed avec qui je me suis bien amusé, à Alban, Youen, Sébastien, Djamel, Kader pour les mêmes raisons, et puis les autres évidemment qui je l'espère se reconnaîtront. Je remercie en plus Thibaut pour ses coups de main en C++, Vincent pour ses éclaircissements sur l'univers de Linux et Simong pour son accentg du sud.

J'ai aussi une pensée pour les gens que j'ai pu rencontrer lors de mon séjour au laboratoire Liama de Pékin. Plus particulièrement je remercie mes colocataires Antoine et P.Marcombes pour leur motivation sans bornes et qui m'ont énormément aidé à m'intégrer sur place. Je pense aussi à Pascal pour sa passion de la Chine avec qui je me suis bien amusé. De même j'ai beaucoup apprécié le contact enrichissant avec Gong Xing et les autres membres locaux du laboratoire. Je garde un souvenir impérissable du dîner de départ de Ma Dongmin, seul contre tous au rythme des *gambei* ! successifs. Je tiens aussi à remercier vivement Véronique Prinnet pour son accueil au laboratoire et son aide aussi généreuse qu'indispensable à l'extérieur.

Je remercie aussi tous mes amis qui m'ont permis de véritablement me changer les

---

idées aux moments où j'en avais le plus besoin, et ceux d'entre eux qui auraient voulu, ou ont même pu, assister à ma soutenance. J'ai aussi une pensée particulière pour Mehdi.

Je remercie également Marie de m'avoir accompagné durant ces quelques années qui n'ont pas toujours été faciles pour elle !

Je remercie aussi ma famille pour le soutien discret qu'elle a su m'apporter.

Cette liste est par la force des choses loin d'être exhaustive et j'implore le pardon de ceux que j'aurais oublié ou pas assez explicitement cité.

Pour finir toutefois, je remercie évidemment la *Région Bretagne* qui a financé ces travaux sous le nom malicieux de *RB ARE09143- ARED ASFOULE Analyse/Synthèse de foules humaines (2008-2011)*.





# Table des matières

<b>Liste des Abréviations</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Origine . . . . .	2
1.3 Approche . . . . .	2
1.3.1 Représentation d'un phénomène par une modélisation . . . . .	2
1.3.2 Description d'un sujet . . . . .	5
1.3.3 Simulation . . . . .	7
1.3.4 Analyse . . . . .	10
1.3.5 Estimation . . . . .	11
<b>2 Contrôle et Estimation</b>	<b>15</b>
2.1 Définition des problématiques . . . . .	16
2.1.1 Généralités sur les modèles . . . . .	16
2.1.2 Généralités sur l'estimation d'une trajectoire d'état . . . . .	17
2.1.3 Généralités sur le contrôle . . . . .	19
2.1.3.1 Définition . . . . .	19
2.1.3.2 Contrôle optimal . . . . .	20
2.2 Etat de l'art sur les méthodes existantes . . . . .	22
2.2.1 Méthodes déterministes . . . . .	22
2.2.1.1 Méthode des moindres carrés . . . . .	22
2.2.1.2 Méthode des moindres carrés non linéaire . . . . .	23
2.2.2 Méthodes statistiques . . . . .	24
2.2.2.1 Approche bayésienne . . . . .	25
2.2.2.2 Filtre de Kalman linéaire . . . . .	25
2.2.2.3 Filtre de Kalman étendu . . . . .	28
2.2.2.4 Lissage de Kalman . . . . .	28
2.2.2.5 Filtre de Kalman d'ensemble . . . . .	28
2.2.2.6 Filtre particulière . . . . .	30
2.2.2.7 Lissage particulière . . . . .	32
2.2.3 Conclusion . . . . .	34
2.3 Théorie du contrôle optimal par assimilation variationnelle . . . . .	35
2.3.1 Introduction . . . . .	35

2.3.2	Contrôle optimal par contrôle paramétrique d'un modèle . . . . .	35
2.3.2.1	Méthode adjointe . . . . .	36
2.3.2.2	Réflexions sur la variable adjointe . . . . .	38
2.3.2.3	Résolution . . . . .	39
2.3.2.4	Remarque . . . . .	40
2.3.3	Contrôle optimal par contrôle paramétrique sous pénalité . . . . .	40
2.3.4	Cas particulier du contrôle additif temporel . . . . .	42
2.3.4.1	Résolution . . . . .	43
2.3.5	Méthode incrémentale . . . . .	43
2.3.5.1	Résolution . . . . .	44
2.3.5.2	Remarques . . . . .	45
2.3.6	Discussion . . . . .	45
2.4	Conclusion . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Modélisation de la foule</b>	<b>47</b>
3.1	Etat de l'art . . . . .	48
3.1.1	Généralités sur la modélisation de piétons . . . . .	48
3.1.2	Navigation . . . . .	50
3.1.2.1	Algorithme de Dijkstra . . . . .	51
3.1.2.2	Algorithme A* . . . . .	51
3.1.2.3	<i>Fast Marching Method</i> . . . . .	51
3.1.2.4	Discussion . . . . .	54
3.1.3	Comportement d'orientation . . . . .	54
3.1.3.1	Modèles selon des règles . . . . .	54
3.1.4	Analogie avec des modèles physiques . . . . .	54
3.1.4.1	Modèles gazeux . . . . .	55
3.1.4.2	Modèles fluides . . . . .	55
3.1.5	Modèles comportementaux . . . . .	55
3.1.5.1	Modèles sociaux . . . . .	56
3.1.6	Modèles par minimisation de fonctionnelle . . . . .	57
3.1.7	Stratégies d'évitement . . . . .	58
3.1.8	Modèles basés données ou <i>data-driven</i> . . . . .	58
3.1.9	Conclusion . . . . .	59
3.2	Modèle dynamique proposé pour l'analyse du comportement continu de la foule . . . . .	61
3.2.1	Heuristiques de vitesse . . . . .	61

3.2.1.1	Paramétrisation <i>intuitive</i> . . . . .	62
3.2.1.2	Paramétrisation unifiée par l'allure . . . . .	63
3.2.2	Bilan . . . . .	65
3.3	Représentation par graphes . . . . .	66
3.3.1	Généralités . . . . .	66
3.3.2	Connectivité . . . . .	67
3.3.3	Relations pondérées . . . . .	68
3.3.4	Projection dans l'espace Eulérien . . . . .	69
3.3.4.1	Projection inverse . . . . .	71
3.3.4.2	Remarques . . . . .	71
3.3.5	Différenciation . . . . .	71
3.4	Modélisation de la dynamique de la foule retenue et contribution . . . . .	73
3.4.1	Forces corporelles . . . . .	74
3.4.2	Force d'obstacle . . . . .	74
3.4.3	Contribution à la modélisation du continuum social . . . . .	75
3.4.3.1	Minimisation de la densité . . . . .	75
3.4.3.2	Approche spectrale . . . . .	78
3.4.3.3	Discussion . . . . .	81
3.4.3.4	Sensitivité des agents . . . . .	81
3.4.4	Conclusion . . . . .	83
3.5	Conclusion . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Analyse de vidéo de foule</b> . . . . .	<b>85</b>
4.1	Etat de l'art des méthodes de vision dédiées à la foule . . . . .	86
4.1.1	Méthode de vision par représentation Lagrangienne de la foule . . . . .	87
4.1.1.1	Reconnaissance d'individus à partir d'une image . . . . .	87
4.1.1.2	Méthodes de suivi, ou <i>tracking</i> . . . . .	87
4.1.2	Méthodes de vision par estimation du mouvement . . . . .	89
4.1.2.1	Equation du flot optique . . . . .	90
4.1.2.2	Approches globales . . . . .	91
4.1.2.3	Approches locales . . . . .	92
4.1.2.4	Discussion . . . . .	94
4.2	Contribution à l'analyse de foule par la vidéo . . . . .	96
4.2.1	Estimation du potentiel d'inconfort par assimilation variationnelle . . . . .	97
4.2.1.1	Vue d'ensemble de la méthode . . . . .	97
4.2.1.2	Modèle dynamique, observations et covariances . . . . .	98

4.2.2	Experimentations et discussion . . . . .	100
4.2.2.1	Résultats sur des exemples synthétiques . . . . .	101
4.2.2.2	Experimentation sur une séquence de foule réelle . . . . .	103
4.2.2.3	Discussion . . . . .	107
4.2.3	Conclusion et perspectives . . . . .	107
4.3	Base de données de foules . . . . .	110
4.3.1	Typologie des scénarios . . . . .	111
4.3.2	Chaîne de production des vidéos . . . . .	111
4.3.2.1	Simulation comportementale de la foule . . . . .	111
4.3.2.2	Simulation graphique de la foule . . . . .	113
4.3.3	Résultats . . . . .	113
4.3.4	Discussion . . . . .	114
4.4	Conclusion . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Contrôle centralisé d'agents en interaction</b>	<b>119</b>
5.1	Contrôle d'essaim par assimilation variationnelle . . . . .	121
5.1.1	Vue d'ensemble de l'approche . . . . .	122
5.1.2	Modèle dynamique de test . . . . .	123
5.1.3	Application de l'assimilation variationnelle . . . . .	124
5.1.3.1	Linéarisation du modèle de test . . . . .	124
5.1.3.2	Opérateurs d'observation . . . . .	125
5.1.4	Resultats expérimentaux . . . . .	130
5.1.4.1	Considérations pratiques générales . . . . .	130
5.1.4.2	Observations Lagrangiennes relatives . . . . .	131
5.1.4.3	Observations Eulériennes . . . . .	134
5.1.5	Conclusion et discussion . . . . .	140
5.2	Contrôle de foules humaines . . . . .	145
5.2.1	Dérivation par l'état des forces relatives à la foule . . . . .	145
5.2.1.1	Dérivation du terme source . . . . .	146
5.2.1.2	Dérivation du terme de friction . . . . .	146
5.2.1.3	Dérivation de la force sociologique . . . . .	146
5.2.1.4	Dérivation de la force corporelle . . . . .	147
5.2.1.5	Dérivation de la force d'obstacles . . . . .	148
5.2.2	Contrôle de foules unidirectionnelles . . . . .	148
5.2.2.1	Formation . . . . .	149
5.2.2.2	Rendez-vous . . . . .	149

5.2.2.3	Discussion . . . . .	151
5.2.3	Contrôle de foules multi-directionnelles et problématique d’emmêlement . . . . .	154
5.2.3.1	Contrôle sans barrières . . . . .	154
5.2.3.2	Contrôle avec barrières . . . . .	155
5.2.3.3	Discussion . . . . .	155
5.2.3.4	Fractionnement incrémental . . . . .	158
5.2.3.5	Régulation de flux de personnes par contraintes en vorticité	161
5.2.3.6	Assimilation non-incrémentale . . . . .	166
5.2.3.7	Expérience du type <i>pachinko</i> . . . . .	166
5.2.4	Discussion sur le contrôle optimal foules multi-directionnelles . . .	175
5.3	Conclusion . . . . .	176
<b>6</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>177</b>
6.1	Perspectives . . . . .	181
	<b>Références</b>	<b>184</b>
<b>A</b>	<b>Critères de comparaison quantitative</b>	<b>195</b>
A.1	Comparaisons basées sur la segmentation des individus par populations .	195
A.2	Comparaison de vitesses . . . . .	195
A.3	Comparaison de trajectoires . . . . .	196
<b>B</b>	<b>Dérivation des opérateurs de graphes Lagrangiens - Eulériens</b>	<b>197</b>
B.1	Propriétés générales . . . . .	197
B.2	Dérivation d’opérateurs Eulériens de haut niveau . . . . .	199
B.2.1	Divergence . . . . .	199
B.2.1.1	Expression de la divergence . . . . .	199
B.2.1.2	Dérivation par la propriété de position Lagrangienne . .	199
B.2.1.3	Linéarisé adjoint en position . . . . .	200
B.2.1.4	Dérivation par la propriété de vitesse Lagrangienne . . .	200
B.2.2	Vorticité . . . . .	201
B.2.2.1	Expression de la vorticité . . . . .	201
B.2.2.2	Dérivation par la propriété de position Lagrangienne . .	202
B.2.2.3	Linéarisé adjoint en position . . . . .	203
B.2.2.4	Dérivation par la propriété de vitesse Lagrangienne . . .	203

<b>C</b>	<b>Influence du frottement sur la problématique d’emmêlement</b>	<b>205</b>
<b>D</b>	<b>Résolution par intégration Runge-Kutta</b>	<b>207</b>
<b>E</b>	<b>Lexique</b>	<b>209</b>
E.1	Norme . . . . .	209
E.2	Produit scalaire . . . . .	209
E.3	Adjoint . . . . .	209

# Table des figures

1.1	<b>Schéma conceptuel d'un modèle.</b> . . . . .	3
1.2	<b>Modélisations possibles d'un phénomène réel étant l'apparence d'un individu.</b> . . . . .	4
1.3	<b>Description Lagrangienne d'une bille représentée par sa position et sa vitesse.</b> . . . . .	5
1.4	<b>Description Lagrangienne d'une foule représentée par sa position et sa vitesse.</b> Peinture de Florence De Fremond, <i>La Foule 4.</i> . . . . .	5
1.5	<b>Description Eulérienne d'une foule représentée par sa vitesse.</b> A chaque maille sont associées diverses propriétés comme la vitesse ou la densité d'individus. Circumambulation de la <i>Kaaba</i> à <i>La Mecque</i> par des pèlerins. . . . .	6
1.6	<b>Schéma conceptuel d'une simulation.</b> . . . . .	7
1.7	<b>Deux simulations de la chute d'une bille modélisée par l'équation du mouvement.</b> La trajectoire verte est obtenue par intégration analytique (et donc parfaite) du modèle, la rouge par intégration numérique. La position de la bille en bleu est calculée à intervalles temporels réguliers d'une demie seconde. . . . .	8
1.8	<b>Schéma conceptuel d'une synthèse graphique.</b> . . . . .	9
1.9	<b>Deux synthèses de phénomènes différents.</b> . . . . .	9
1.10	<b>Illustration du paradigme de la représentation.</b> Cette image n'est pas une pipe, mais une synthèse de pipe. Elle est basée sur un modèle représentant une pipe qui est issu de la subjectivité de Magritte. Ce modèle est simulé graphiquement par peinture. <i>La Trahison des Images, René Magritte, 1929.</i> . . . . .	10
1.11	<b>Schéma conceptuel général du processus d'analyse.</b> A partir de l'observation d'un phénomène, les composants qui le constituent sont isolés et évalués . . . . .	11
1.12	<b>Problème d'estimation.</b> La trajectoire verte est celle observée, la rouge celle obtenue par une estimation de l'état de la bille et de la valeur du paramètre de gravité se trouvant être dix fois moindre que sur Terre. . . . .	12
1.13	<b>Schéma du processus d'analyse par estimation.</b> A partir de l'observation d'un phénomène, les valeurs permettant de reproduire au mieux celui-ci à partir d'un modèle donné sont estimées. . . . .	12
2.1	<b>Schéma de la problématique d'estimation.</b> Comment accéder à la trajectoire idéale du sujet respectant au mieux le système et l'observation ? . . . . .	18
2.2	<b>Schéma de la problématique d'estimation.</b> Comment remonter aux commandes d'un système à partir d'une observation sur sa sortie. . . . .	18
2.3	<b>Schéma du processus général de contrôle.</b> Comment manipuler les variables de contrôle pour faire correspondre le sujet à la consigne ? . . . . .	19
2.4	<b>Schéma du processus général de contrôle en boucle fermée.</b> . . . . .	19
2.5	<b>Schéma du processus général de contrôle optimal.</b> Comment manipuler un ou plusieurs variables de contrôle pour optimiser le système selon un critère donné. . . . .	20
2.6	<b>Schéma du processus général de contrôle optimal.</b> Le sens des flèches n'est pas chronologique mais itératif. . . . .	20

2.7	<b>Schéma du processus général de contrôle optimal sous contrainte.</b> Les deux schématisations sont équivalentes mais ont un point de vue différent sur ce qui constitue la consigne et le contrôleur. . . . .	21
2.8	<b>Schéma du processus général d'estimation d'état par contrôle optimal.</b> Le sens des flèches n'est pas chronologique mais itératif. . . . .	22
2.9	<b>Schéma du processus de résolution par méthode des moindres carrés.</b> L'absence de système se traduit par un composant unitaire. . . . .	23
2.10	<b>Schéma du processus de résolution par méthode des moindres carrés non linéaire.</b> Le composant d'addition d'état traduit une résolution itérative et progressive sous réserve de convergence. . . . .	24
2.11	<b>Schéma conceptuel du filtrage de Kalman.</b> . . . . .	26
2.12	<b>Schéma de la procédure de filtrage de Kalman.</b> La fonction coût d'optimisation dépend de $\epsilon_M$ et $\epsilon_H$ qui à chaque étape $n$ est minimisée par le chemin et le système optimal que sont le gain de Kalman $K_n$ . . . . .	27
2.13	<b>Exemple d'initialisation du filtrage particulaire pour <math>\mathbf{X} \in \mathbb{R}</math>.</b> Les bruits $\epsilon_0$ et $(\epsilon_H)_0$ sont identiques et gaussiens. L'opérateur d'observation est ici défini par : $\mathbb{H}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ . . . . .	31
2.14	<b>Exemple de rééchantillonnage <i>bootstrap</i>.</b> . . . . .	32
2.15	<b>Illustration de l'assimilation de données par la méthode adjointe dans le cas où <math>\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}</math>.</b> . . . . .	39
2.16	<b>Schéma du processus d'assimilation par contrôle additif temporel.</b> Dans le cas où la variable de contrôle n'est pas additive, $\epsilon_M$ se remplace simplement par $u$ . Par comparaison avec la figure 2.7(a), on suppose ainsi que $\nabla \mathcal{J}$ est évalué par l'intégration arrière du modèle linéarisé adjoint de l'équation 2.70, et que la descente de ce gradient est effectuée par l'intégration avant du modèle de l'équation 2.94a. . . . .	43
2.17	<b>Schéma du processus d'assimilation par contrôle additif temporel et incrémental.</b> Dans le cas où la variable de contrôle n'est pas additive, $d\epsilon_M$ se remplace simplement par $du$ . Par comparaison avec la figure 2.7(a), on suppose ainsi que $\nabla \mathcal{J}$ est évalué par l'intégration arrière du modèle linéarisé adjoint de l'équation 2.70, et que la descente de ce gradient est effectuée par l'intégration avant du modèle linéarisé de l'équation 2.67a. . . . .	44
3.1	<b>Modélisation dite <i>agent de la foule</i>.</b> Modélisation microscopique. Chaque individu est représenté explicitement par une particule Lagrangienne transportant un ensemble de propriétés (ici la position et la vitesse de déplacement). . . . .	49
3.2	<b>Modélisation dite <i>continue de la foule</i>.</b> Modélisation macroscopique. Les individus sont représentés implicitement à travers la densité locale $\rho(\mathbf{x})$ , où $\mathbf{x}$ est la position considérée du domaine, celui-ci étant le plus souvent discrétisé sur une grille Eulérienne. . . . .	49
3.3	<b>Schéma de la problématique de navigation.</b> Comment se rendre de A à B en évitant l'obstacle et en parcourant un minimum de distance. . . . .	50
3.4	<b>Méthode Dijkstra pour la navigation.</b> La propagation illustrée représente le milieu de la procédure algorithmique. Le chemin indique quelles cases successives emprunter pour atteindre la destination en parcourant un minimum de distance. . . . .	51
3.5	<b>Méthode A* pour la navigation.</b> La propagation est orientée selon la navigation directe par rapport à figure 3.4. . . . .	52

3.6	<b>Propagation d'une onde par résolution de l'équation eikonale.</b> La couleur de l'onde correspond au temps écoulé depuis l'origine (bleu $t_0$ , rouge $t_f$ ). Les flèches noires représentent l'opposé du gradient du temps propagé et indiquent localement le chemin de navigation le plus court. La méthode du <i>fast marching</i> est ici utilisée. . . . .	53
3.7	<b>Règles de conduite de Reynolds.</b> Le triangle vert voit sa vitesse modifiée par le vecteur rouge. Figures extraites de [114]. . . . .	55
3.8	<b>Modélisation basée données selon [22].</b> . . . . .	59
3.9	<b>Intégration schématique du modèle de foule Eulérien-Lagrangien.</b> . . . . .	62
3.10	<b>Exemple de graphe.</b> Seuls les sommets voisins d'une maille sont connectés, comme l'illustre le périmètre rouge de norme infinie autour de $p_1$ . . . . .	67
3.11	<b>Exemple d'évaluation de la concentration d'une propriété de graphe sur une grille Eulérienne.</b> Concentration de $\mathbf{q}$ sur la grille $\mathcal{C}$ obtenue par $\mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q}$ . Ici $N = 6$ , $M = 16$ , $o = M$ , et la déviation standard de $G$ est égale à la taille des mailles de $\mathcal{C}$ . . . . .	69
3.12	<b>Exemple d'évaluation d'une propriété de graphe sur une grille Eulérienne.</b> Evaluation de $\mathbf{u}$ sur la grille $\mathcal{C}$ obtenue par $\mathcal{D}_{G^y}^{-1} \mathcal{A}_{G^y} \mathbf{u}$ . Ici $N = 6$ , $M = 16$ , $o = M$ . La déviation standard de $G$ est égale à la taille des mailles de $\mathcal{C}$ pour l'évaluation simple, et comme l'inverse du double de la densité ( $2\mathcal{A}_{G^y} \bar{1}$ ) pour l'évaluation basée sur la densité. . . . .	71
3.13	<b>Simulation de la modélisation agent purement mécanique.</b> . . . . .	76
3.14	<b>Densité associée à un individu à la présence isotrope.</b> $\sigma = 0.8m$ . . . . .	77
3.15	<b>Densité associée à un individu à la présence anisotrope.</b> $\sigma_f = 1.5m$ , $\sigma_l = 0.5m$ et $\theta = 0 rad$ . . . . .	78
3.16	<b>Simulation du modèle proposé par [46].</b> La force sociale crée une congestion <i>respectueuse</i> , puisqu'aucun état de panique n'est ici simulé. . . . .	79
3.17	<b>Simulation de la modélisation agent par minimisation de densité anisotrope.</b> . . . . .	80
3.18	<b>Zone sensitive d'un piéton.</b> Les azimuts limites sont présentés en rouge. . . . .	82
3.19	<b>Densité associée à un individu à la présence anisotrope.</b> $\sigma_f = 1.5m$ , $\sigma_l = 0.5m$ , $\theta = 0 rad$ , et $\gamma = 30 \frac{2\pi}{360} rad$ . . . . .	82
4.1	<b>Confrontation entre la perception humaine et informatique d'une image.</b> A gauche se trouve une photographie du carrefour de Shibuya, au Japon. La perception et la cognition humaine est capable de distinguer, presque immédiatement, perspective, individus, bâtiments et route. L'image de droite (purement fictive) montre une vue d'esprit de la façon dont un ordinateur perçoit la photographie en l'absence d'interprétation mathématique. Autrement dit, l'image de gauche a à l'origine pour un ordinateur autant de sens que l'image de droite a pour nous humains : c'est-à-dire aucun. . . . .	87
4.2	<b>Reconnaissance d'individus dans une image.</b> Les individus se masquent partiellement les un les autres, et l'environnement affiche des similitudes spatiales avec l'existence d'une personne, rendant ainsi difficile la reconnaissance. Figures extraites de [148]. . . . .	88
4.3	<b>Suivi d'individus d'une foule dans un marathon.</b> Malgré le nombre important d'individus, d'occultation et de faux-semblants, la méthode des auteurs est capable de suivre une centaine d'individus en s'appuyant sur le contexte de la scène. Figure extraite de [2]. . . . .	89

4.4	<b>Schématisme de l'implémentation pyramidale de l'estimation locale du mouvement.</b> La flèche verte correspond au déplacement $dx$ recherché entre deux images séparées de $dt$ . Le cercle rouge correspond au périmètre maximum de captation du déplacement, tel que son rayon soit égal à $\sigma_{res} = 1.5\Delta x_{c_{res}}$ . . . . .	95
4.5	<b>Aperçu de la méthode d'analyse vidéo de la foule du point de vue opérationnel.</b> . . . .	98
4.6	<b>Scène synthétique de foule simulée par le modèle de Helbing.</b> . . . . .	101
4.7	<b>Vérité terrain issue du modèle agent de la figure 4.6.</b> La ligne du haut représente la densité $\rho_{ref}$ variant de $0 ped.m^{-2}$ en bleu foncé à $5 ped.m^{-2}$ en rouge foncé. La ligne du bas représente le champ de vitesse $u_{ref}$ et sa norme dont l'intensité varie elle de $0 m.s^{-1}$ à $1 m.s^{-1}$ . . . . .	102
4.8	<b>Modèle dynamique simulé</b> La ligne du haut représente le potentiel d'inconfort $D$ variant de $0 ped.m^{-2}$ en bleu foncé à $5 ped.m^{-2}$ en rouge foncé, ainsi que son gradient qui donne une certaine information par rapport à la répulsion potentielle. La ligne du bas représente le champ de vitesse $u_{ref}$ et sa norme dont l'intensité varie elle de $0 m.s^{-1}$ à $1 m.s^{-1}$ . . . .	104
4.9	<b>Assimilation de vidéo par le modèle dynamique</b> La ligne du haut représente le potentiel d'inconfort $D$ variant de $0 ped.m^{-2}$ en bleu foncé à $5 ped.m^{-2}$ en rouge foncé, ainsi que son gradient. La ligne du bas représente le champ de vitesse $u_{ref}$ et sa norme dont l'intensité varie elle de $0 m.s^{-1}$ à $1 m.s^{-1}$ . . . . .	105
4.10	<b>RMS sur la norme de vitesse.</b> Les RMS spatiales sur $\ u\ $ à $t = 23 s$ vont de 0% à 100%. .	106
4.11	<b>Comparaison visuelle entre la séquence réelle et le potentiel d'inconfort estimé <math>D</math>.</b> Les figures (a), (b), (e) et (f) sont des images issues de la séquence vidéo de foule réelle. Les figures (c), (d), (g) et (h) sont les cartes de potentiel $D$ estimées aux mêmes instants respectifs.	108
4.12	<b>Topologie des scènes du jeu de données.</b> Les différentes scènes proposées dans le dataset.	112
4.13	<b>Rendu de foule.</b> De gauche à droite : les 26 avatars différents utilisés pour produire les vidéos; une image d'un enregistrement vidéo à Shibuya, Tokyo; un rendu synthétique de foule sous des conditions analogues d'éclairage extérieur. . . . .	113
4.14	<b>Scénario #4-1 : Evacuation dans une situation normale.</b> . . . . .	115
4.15	<b>Scénario #4-2 : Evacuation dans une situation d'urgence et de panique.</b> La ligne supé- rieure montre les trajectoires d'un individu sur 3 durant les 3 dernières secondes. La ligne du milieu montre des captures d'écran du rendu final. La dernière ligne montre les quantités continues mises en jeu que sont la densité $\rho$ et le champ de vitesses $u$ . . . . .	116
4.16	<b>Aperçu de scènes supplémentaires.</b> . . . . .	116
5.1	<b>Schématisme de l'opérateur d'adjacence <math>k</math>-spécifique.</b> . . . . .	126
5.2	<b>Expérimentation KSNA.</b> Les points rouges représentent la configuration de l'essaim à $t = 12 s$ , les points bleus à $t = 0 s$ . Les lignes en pointillé sont les trajectoires des particules au cours de la séquence. Les covariances sont réglées manuellement pour obtenir une convergence suffisamment lente pour être régulière, et préserver autant que possible la dynamique de l'essaim. . . . .	132

5.3	<b>Problème d'agrégation.</b> Au lieu d'être seulement dirigé par le modèle dynamique $\mathbb{M}$ , nous imposons aussi à l'essaim contrôlé d'atteindre les zones $A$ et $B$ . Les deux observations $A$ et $B$ sont symétriques horizontalement, et la valeur maximale de densité en rouge atteint $1.3 \text{ ptl.m}^{-2}$ . La grille $\mathcal{C}$ est uniquement montrée ici dans un souci de clarté des images à venir.	134
5.4	<b>Observation de densité <math>\mathbf{Y}</math> pour différentes résolutions.</b> Observations pour la zone $A$ , à $t_{obs} = 12s$ . L'échelle de couleur est identique à celle de la figure 5.3.	135
5.5	<b>Densité observée <math>\mathbb{H}(\mathbf{X})</math> pour différentes résolutions juste après l'intégration du modèle.</b> L'échelle de couleur est identique à celle de la figure 5.3.	135
5.6	<b>Illustration du comportement d'intensité de l'opérateur d'observation de densité multi-résolution linéarisé adjoint amplifié par <math>R^{-1}</math>.</b> Les courbes tracées sont $G'_{\sigma_r}(\mathbf{x})G_{\sigma_r}(0)^{-2}$ . Le pic d'intensité est atteint pour la distance égale à $\sigma_r$ , et l'intensité augmente avec la diminution de la résolution.	136
5.7	<b>Expérience d'agrégation.</b> Les points verts représentent la configuration des particules à $t_{obs} = 12s$ , les points rouges à $t_{obs} = 20s$ , les bleus à $t = 0s$ .	138
5.8	<b>Evolution de l'erreur de l'expérience d'agrégation.</b> RMS de $R^{-1}\mathbb{H}(\mathbf{X})$ par rapport à $R^{-1}\mathbf{Y}$ .	139
5.9	<b>Densité observée pour l'expérience d'agrégation</b> Illustration de $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ avec superposition des particules à $t_{obs} = 12s$ .	139
5.10	<b>Présentation de l'expérience du dipôle.</b> Au lieu d'être seulement conduit par le modèle dynamique $\mathbb{M}$ , nous demandons à l'essaim de créer sur son chemin un dipôle de vitesse en spécifiant uniquement deux valeurs de vorticité opposées et une divergence nulle.	140
5.11	<b>Expérimentation du dipôle.</b> Les points vers représentent la configuration de l'essaim à $t_{obs} = 14s$ , et les points bleus à $t_0 = 0s$	141
5.12	<b>Quantités observées pour l'expérience du dipôle.</b> Illustration de $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ à $t_{obs} = 14s$ après 150 passes d'assimilation. La vitesse ne fait néanmoins pas partie des observations et est présentée à titre indicatif.	142
5.13	<b>Evolution de l'erreur de l'expérience du dipôle.</b> RMS de $R^{-1}\mathbb{H}(\mathbf{X})$ par rapport à $R^{-1}\mathbf{Y}$ à $t_{obs} = 14s$ .	142
5.14	<b>Un groupe de piétons est chargé de former les lettres EG à un instant donné de la simulation.</b>	149
5.15	<b>Expérimentation par formation de lettres</b>	150
5.16	<b>Expérience de rendez-vous.</b> Deux individus s'extraient du groupe et se rejoignent en un point à une vitesse nulle.	151
5.17	<b>Expérience de rendez-vous.</b> Les piétons sont représentés par des flèches. Le point de rencontre des individus en vert est situé derrière le groupe et doit être atteint à $t_{obs} = 20s$ .	152
5.18	<b>Expérience de rendez-vous.</b> Evolution des trajectoires des individus au cours de l'assimilation. Les points verts et rouges sont les positions des individus à $t_{obs} = 20s$ . Les individus en vert cherchent à atteindre au même instant le point de rendez-vous représenté par le carré vert.	153
5.19	<b>Simulation de croisement d'individus par modélisation mécanique.</b> Le point de départ en bleu et la trajectoire sont représentés.	155

5.20	<b>Assimilation incrémentale par observation en position sans barrières.</b> L'observation est à $t_{obs} = 10 s$ . . . . .	156
5.21	<b>Assimilation incrémentale par observation en position avec barrières.</b> L'observation est à $t_{obs} = 10 s$ . . . . .	157
5.22	<b>Illustration de l'assimilation incrémentale fractionnée.</b> Ceci constitue une seule passe d'assimilation au sens fractionné. . . . .	159
5.23	<b>Assimilation incrémentale par fractionnement de séquence et par observation en position.</b> La problématique de barrière est ainsi contournée. L'observation est à $t_{obs} = 10 s$ . . . . .	160
5.24	<b>Carrefour d'affluence.</b> Chaque groupe cherche à atteindre le côté opposé créant ainsi une forte congestion. . . . .	161
5.25	<b>Résultat de la simulation d'un carrefour d'affluences.</b> . . . . .	163
5.26	<b>Observation en vorticité.</b> Valeurs en $s^{-1}$ . L'observation est à $t_{obs} = 16 s$ et dure une seconde. Les zones en bleu sont les obstacles de l'environnement. . . . .	164
5.27	<b>Résultats après contrôle optimal par assimilation variationnelle d'un carrefour d'affluences sous contrainte de vorticité.</b> 33 passes d'assimilation fragmentée sont ici effectuées. . . . .	165
5.28	<b>Assimilation non-incrémentale par observation en position.</b> L'observation est à $t_{obs} = 10 s$ . . . . .	167
5.29	<b>Expérience du <i>pachinko</i> : simulation du parcours d'un individu asocial.</b> Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à $t_{obs,1} = 9 s$ , $t_{obs,2} = 16 s$ et $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des individus fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps $t$ , à un intervalle de $2\Delta t = 0.2 s$ . . . . .	168
5.30	<b>Expérience du <i>pachinko</i> : assimilation incrémentale par observations en position.</b> Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à $t_{obs,1} = 9 s$ , $t_{obs,2} = 16 s$ et $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des particules fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps $t$ , à un intervalle de $2\Delta t = 0.2 s$ . . . . .	170
5.31	<b>Expérience du <i>pachinko</i> : assimilation incrémentale par fractionnement de séquence et par observations en position.</b> Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à $t_{obs,1} = 9 s$ , $t_{obs,2} = 16 s$ et $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des individus fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps $t$ , à un intervalle de $2\Delta t = 0.2 s$ . Les triangles jaunes indiquent les instants de fractionnement. . . . .	171
5.32	<b>Expérience du <i>pachinko</i> : assimilation non-incrémentale par observations en position.</b> Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à $t_{obs,1} = 9 s$ , $t_{obs,2} = 16 s$ et $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des individus fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps $t$ , à un intervalle de $2\Delta t = 0.2 s$ . . . . .	173
C.1	<b>Assimilation incrémentale par observation en position et modélisation sans frottement mécanique.</b> L'observation est à $t_{obs} = 10 s$ . . . . .	205

D.1 Schéma de la procédure d'assimilation par utilisation de la méthode d'intégration Runge-Kutta d'ordre 4. . . . .	208
--	-----



# Liste des Abréviations

$e_k$	Vecteur de la base orthonormale, $k \in \{1, \dots, d\}$ , page 56	$\in \mathbb{R}^d, 1$
$\kappa$	Intensité de la force de répulsion mécanique, page 56	$\in \mathbb{R}, N.m^{-1}$
$\nu$	Intensité de la force de friction mécanique, page 56	$\in \mathbb{R}, N.s.m^{-2}$
$\circ$	Produit d’Hadamard, page 68	
$\mathcal{J}$	Fonction coût, page 35	$\in \mathbb{R}, 1$
$Q$	Matrice de covariance d’erreur sur $\epsilon_M$ , page 25	$\in \mathbb{R}^{N \times N}, [\mathbf{X}]^2 .s^{-2}$
$R$	Matrice de covariance d’erreur sur $\epsilon_H$ , page 23	$\in \mathbb{R}^{M \times M}, [\mathbf{Y}]^2$
$B_0$	Matrice de covariance d’erreur sur $\epsilon_0$ , page 25	$\in \mathbb{R}^{N \times N}, [\mathbf{X}]^2$
$\rho$	Densité de la quantité $q$ associée, page 55	$\in \mathbb{R}, [q].m^{-d}$
$d$	Nombre de dimensions spatiales, page 55	$\in \mathbb{R}, 1$
$D_{ij}$	Distance entre deux particules $i$ et $j$ , page 56	$\in \mathbb{R}, m$
$G$	Noyau Gaussien, page 68	$\in \mathbb{R}, m^{-d}$
$A$	Matrice d’adjacence de sommets d’un graphe, page 67	$\in \mathbb{Z}^{N \times N}, 1$
$A$	Matrice d’adjacence Eulérienne, page 69	$\in \mathbb{Z}^{M \times N}, 1$
$\mathcal{M}$	Matrice d’adjacence de la grille $\mathcal{C}$ , page 68	$\in \mathbb{Z}^{M \times M}, 1$
$\mathcal{P}$	Matrice de présence de sommets dans un maillage, page 68	$\in \mathbb{Z}^{N \times M}, 1$
$D$	Matrice de degré d’adjacence de sommets d’un graphe, page 67	$\in \mathbb{Z}^{N \times N}, 1$
$D$	Matrice de degré Eulérienne, page 70	$\in \mathbb{Z}^{M \times N}, 1$
$\mathcal{E}$	Ensemble des arêtes d’un graphe, page 66	$\in \mathbb{E}^Z$
$\mathbb{E}$	Espace des arêtes de graphe, page 66	
$p$	Sommet de graphe ou particule Lagrangienne, page 66	$\in \mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	Espace des sommets de graphe, page 66	
$\mathcal{V}$	Ensemble des sommets d’un graphe, page 66	$\in \mathbb{V}^N$
$\mathbb{W}$	Espace auquel appartient le poids de connectivité $w$ , page 68	
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers, page 67	
$\Delta$	Opérateur Laplacien, équivalent à $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}$ , page 91	
$m$	Masse, page 56	$\in \mathbb{R}, kg$
$\mathbb{M}$	Modèle d’évolution, page 16	$\in \mathbb{R}^{N \times N}$ si linéaire, $\in \mathbb{R}^N$ sinon, $[\mathbf{X}] .s^{-1}$
$\epsilon_M$	Erreur de modèle, page 25	$\in \mathbb{R}^N, [\mathbf{X}] .s^{-1}$
$\epsilon_H$	Erreur d’observation, page 22	$\in \mathbb{R}^M, [\mathbf{Y}]$
$\epsilon_0$	Erreur d’initialisation, page 25	$\in \mathbb{R}^N, [\mathbf{X}]$

<b>Y</b>	Observation d'un phénomène, page 17	$\in \mathbb{R}^M, [\mathbf{Y}]$
<b>H</b>	Modèle (ou opérateur) d'observation, page 17	$\in \mathbb{R}^{M \times M}$ si linéaire, $\in \mathbb{R}^M$ sinon, $[\mathbf{Y}]$
<b>W</b>	Direction préférentielle, page 56	$\in \mathbb{R}^d, 1$
<b>q</b>	Quantité de particule, page 68	$\in \mathbb{R}, ptl$
<b>r</b>	Rayon d'un agent, page 56	$\in \mathbb{R}, m$
<b>r<sub>ij</sub></b>	Somme des rayons des agents <i>i</i> et <i>j</i> , page 56	$\in \mathbb{R}, m$
<b>x</b>	Position de l'espace, page 48	$\in \mathbb{R}^d, m$
<b>y</b>	Position Lagrangienne, page 56	$\in \mathbb{R}^d, m$
<b>~</b>	Tirage selon une loi de probabilité, page 30	
<b>σ</b>	Déviatoin standard du noyau Gaussien, page 68	$\in \mathbb{R}, m$
<b>X</b>	Etat d'un sujet, page 16	$\in \mathbb{R}^N, [\mathbf{X}]$
<b>λ</b>	Variable adjointe, page 37	$\in \mathbb{R}^N, s. [\mathbf{X}]^{-1}$
<b>λ<sub>opt</sub></b>	Etat adjoint <i>total</i> supposé optimal, page 37	$\in \mathbb{R}^N, s. [\mathbf{X}]^{-1}$
<b>τ</b>	Temps de réactivité caractéristique, page 56	$\in \mathbb{R}, s$
<b>⊗</b>	Produit tensoriel, page 29	
<b>n<sub>ij</sub></b>	Vecteur unitaire de direction des particules <i>i</i> à <i>j</i> , page 56	$\in \mathbb{R}^d, 1$
<b>t<sub>ij</sub></b>	Vecteur unitaire tangentiel des particules <i>i</i> à <i>j</i> ( $t_{ij} \cdot n_{ij} = 0$ ), page 56	$\in \mathbb{R}^d, 1$
<b>u</b>	Vitesse Lagrangienne, page 56	$\in \mathbb{R}^d, m.s^{-1}$
<b>ECMA</b>	Equation Contrainte du Mouvement Apparent, page 90	
<b>EDP</b>	Equation aux dérivées partielles, page 55	
<b>EKF</b>	Extented Kalman Filter, filtre de Kalman étendu, page 28	
<b>EnKF</b>	Ensemble Kalman Filter, filtre de Kalman d'ensemble, page 28	
<b>KF</b>	Kalman Filter, filtre de Kalman, page 25	
<b>KSA</b>	(opérateur d') adjacence <i>k</i> -spécifique, page 125	
<b>KSNA</b>	(opérateur d') adjacence <i>k</i> -spécifique normalisée, page 127	
<b>OFCE</b>	<i>Optical Flow Constraint Equation</i> , page 90	
<b>RMS</b>	<i>Root Mean Square</i> , erreur quadratique normalisée, page 103	

# 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

Les enjeux concernant l'étude de la foule sont multiples. Ils concernent notamment la sécurité des personnes pour des événements ponctuels de forte affluence et la conception d'espaces publics pour rendre plus confortable les déplacements d'individus. La concentration drastique de l'urbanisation de ces dernières décennies a mis en avant cette dernière problématique. Notons qu'en 2010, la population mondiale frôlait les 7 milliards de personnes, et 51% de la population vivait en milieu urbain<sup>1</sup>. La tendance à la concentration des zones habitées engendre des problématiques de flux de personnes découlant de la macrocéphalie urbaine. Les transports en commun par exemple voient quotidiennement passer plusieurs millions de personnes dans les grandes métropoles. A titre indicatif, 4 millions de passagers empruntent chaque jour le métro parisien, 5 millions le métro de la ville de New-York et près de 9 millions le métro de Tōkyō. Les événements de grande ampleur sont également confrontés à la gestion de flux de personnes. Certains festivals rassemblent parfois des centaines de milliers d'individus sur un même site, chacun d'entre eux ayant des intentions à peu près identiques. Cette convergence de flux est potentiellement dangereuse pour les participants de par la pression qu'ils peuvent exercer les uns sur les autres. Toutes ces foules posent alors des questions sur les conditions, non seulement de bonne gestion du trafic piétonnier pour que ceux-ci soient à l'aise dans leur déplacement, mais aussi de sécurité dans les cas les plus extrêmes. La Mecque accueille ainsi chaque années entre 3 et 4 millions de pèlerins en l'espace de quelques jours. La concentration de la foule est alors telle que certaines années des bousculades ont causé des centaines de morts. En 1990, 1400 personnes y ont perdu la vie dans un mouvement de panique<sup>2</sup>. Le mouvement de foule le plus meurtrier connu à ce jour a eu lieu à Chongqing, en Chine, pendant un bombardement durant la seconde guerre mondiale. Près de 4000 personnes y ont alors perdu la vie par piétinement et suffocation. Si la sécurité des personnes constitue un enjeu de taille, d'autres domaines s'intéressent au phénomène de la foule. L'industrie du cinéma, des jeux vidéo, et plus globalement les domaines liés à l'infographie, cherchent à reproduire le comportement d'individus. Faire appel à quelques milliers de figurants est par exemple très contraignant pour la mise en scène cinématographique, et les techniques de simulation récentes permettent de reproduire, avec plus ou moins de réalisme, de tels phénomènes.

---

1. <http://donnees.banquemondiale.org/>

2. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Bousculade>

## 1.2 Origine

L'étude de foules humaines est une discipline complexe. Elle regroupe à la fois la notion de comportement individuel et collectif, chacun en soi étant relié à des mécanismes psychologiques divers selon les individus et les sociétés. Si l'étude comportementale des individus, et dans une moindre mesure celle de groupes, n'est pas récente dans les domaines psychologiques et sociologiques, son application concrète à des mouvements observables l'est. L'étude sociologique de la foule date en effet de quelques siècles, quand son application à sa dynamique date elle des années 1970.

## 1.3 Approche

De par sa dynamique comportementale, une foule humaine est en réalité impossible à parfaitement synthétiser. La notion même de perfection dans ce cas de figure se révèle absurde pour plusieurs raisons :

- La synthèse devrait s'atteler à reproduire le comportement d'un ensemble d'individus spécifiques (et donc existants) dont les caractéristiques sont entièrement et parfaitement, à la fois connues et comprises.
- Elle devrait aussi parfaitement reproduire l'apparence des ces individus.

Bien évidemment, les comportements et l'apparence de tout un ensemble d'individus réels ne peuvent être simplement absorbés et reproduits. Par conséquent, la synthèse s'applique à créer de toute part des individus en les modélisant. La notion de modélisation est un élément clé de la synthèse et mérite d'être correctement définie. Elle peut prendre plusieurs significations selon son domaine d'application, mais toutes ont pour point commun la notion de représentation. C'est justement la représentation de la foule qui sera au coeur de la problématique de ce manuscrit. Celle-ci est en effet essentielle à la création de scènes virtuelles d'individus, autrement dit la synthèse foules, mais aussi comme nous le verrons à appréhender la phénoménologie mise en jeu au moyen de procédés de décomposition et identification, c'est à dire l'analyse. Ce concept de représentation d'un phénomène est ici détaillé.

### 1.3.1 Représentation d'un phénomène par une modélisation

Il existe un large éventail de phénomènes représentés, et souvent simplifiés, par un *modèle*. Les mécanismes des phénomènes naturels sont par exemple bien souvent trop complexes pour être entièrement compris, et sont donc souvent résumés et simplifiés par un modèle. On en propose ici la définition théorique suivante :

**Modèle (définition) :** *Représentation théorique d'un processus ou phénomène, dont les caractéristiques cherchent en général à être reproduites dans un domaine différent de l'original. Un modèle peut être parfait, ou dans la majorité des cas simplifié.* Dans le cas d'un modèle dit scientifique, par opposition aux modèles artistiques par exemple, il est aussi nécessaire d'en définir les concepts périphériques. Un modèle s'appuie en effet sur des entrées, des contraintes et des paramètres fixes. Les entrées sont les éléments que le modèle traite automatiquement, les contraintes ceux qui proviennent de l'extérieur, et les

paramètres fixes sont intrinsèques au modèle. Il renvoie une sortie qui est l'élément que l'on veut étudier. Un schéma conceptuel de ce propos est présenté en figure 1.1.

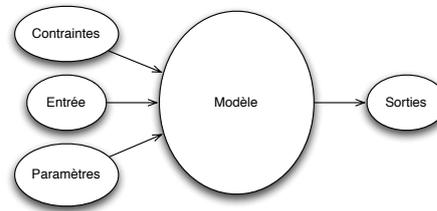


FIGURE 1.1 – Schéma conceptuel d'un modèle.

Pour illustrer ce concept de modèle, prenons l'exemple de la chute d'un objet dont on cherche à modéliser la trajectoire. Un objet a entre autres pour propriétés une forme, un type de surface, une masse, une position et une vitesse. La reproduction exacte de cet évènement est donc rendue difficile par la complexité des phénomènes mis en jeu et par la richesse des propriétés physiques de l'objet. Une façon classique de procéder à la modélisation générale de l'évènement (en l'occurrence la chute) consiste d'abord à évaluer qualitativement son sujet et à en dégager les propriétés essentielles. Cette simplification permet ainsi d'en limiter les propriétés. Celles dont la modélisation est complexe par rapport à l'impact présumé sur la sortie seront écartées.

L'évaluation du sujet est donc cruciale à la modélisation. Par exemple, dans le cas de la chute libre, on comprend aisément que les propriétés retenues seront très différentes pour une bille de plomb et pour un avion planeur. Le choix de représentation fait ici intervenir les propriétés de forme et de type de surface qui sont liées à des phénomènes physiques potentiellement complexes et pouvant relever du domaine de l'aérodynamique.

Si on souhaite obtenir une modélisation à la fois la plus simple et la plus cohérente possible<sup>3</sup>, ces propriétés seront négligées dans le premier cas puisque a priori d'un impact faible sur la trajectoire d'une bille dense, mais pas dans le second où la portance induite par la forme du planeur est un acteur essentiel de sa chute.

**Représentation d'état** Ce travail préalable à la modélisation consiste à choisir ce que l'on appelle la *représentation d'état*, et peut se résumer à la sélection des propriétés d'un sujet, selon les critères imposés par le phénomène que l'on souhaite modéliser. Dans le cas de la modélisation d'un individu, l'état véritable du sujet est extrêmement riche. Si l'on souhaite modéliser uniquement son apparence, on retiendra la peau comme propriété pertinente. Si l'on souhaite également modéliser ses mouvements, on rajoutera le squelette à la représentation d'état, et ainsi de suite selon le type de phénoménologie modélisée. Par exemple, on considère qu'un individu virtuellement représenté dans un espace tridimensionnel, est un *modèle 3D* d'humain, comme montré dans la figure 1.2. Cette dernière montre ainsi le parallèle existant entre une personne réelle et sa modélisation. Sa version sommaire le représente par une tête, des bras et des jambes, quand sa version plus poussée représente en plus ses proportions. Cette dernière représentation dans un espace tridimensionnel constitue ainsi ce que l'on appelle un modèle 3D.

---

3. Selon le principe du rasoir d'Ockham, les hypothèses, et donc les modélisations, les plus simples sont les plus vraisemblables.

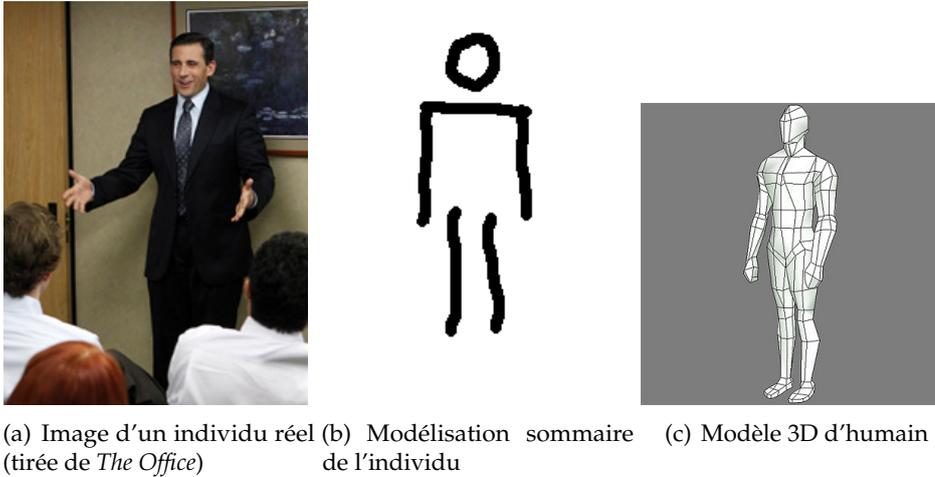


FIGURE 1.2 – Modélisations possibles d'un phénomène réel étant l'apparence d'un individu.

Modèle	Sorties	Entrées	Paramètres	Contraintes
Modèle 3D humanoïde	humain virtuel	Maillage	Echelle, texture	Angle de caméra
Chute libre d'une bille	Trajectoire	Position, vitesse	Gravité	Etat initial
Chute libre d'un planeur	Trajectoire	Position, masse, vitesse, portance	Gravité, viscosité de l'air	Etat initial

TABLE 1.1 – Exemples de modélisation de phénomène et de représentation de son sujet.

La représentation d'état est donc fortement liée au modèle qui l'accompagne, et correspond en règle générale à l'entrée de celui-ci. Toutefois, si une propriété du sujet est constante dans le temps, il arrive qu'on catégorise celle-ci dans les paramètres. La sortie du modèle peut dans certains cas constituer un élargissement de la représentation d'état. La correspondance des exemples cités avec leur modèle respectif est présentée dans le tableau 1.1.

**Modélisation de la foule** La modélisation de la foule amène donc à se poser les questions suivantes :

- Quels sont les phénomènes à modéliser ?
- Quelle est la sortie à étudier ?
- Quelle est la représentation d'état de la foule ?
- Quels sont les paramètres du modèle ?

Dans le cadre de la synthèse de foules humaines, ces questions sont essentielles. Les comportements individuels et collectifs d'individus sont des processus complexes et difficiles à unifier, car dérivant de facteurs à la fois physiques et psychologiques dont la compréhension reste sommaire. Il est alors nécessaire de faire des choix, souvent empiriques, sur le type de modélisation. Certaines approches se concentrent sur des phénomènes physiques, d'autres sociologiques. Parmi ces approches, certaines se basent

sur des propriétés individuelles ou bien collectives. En d'autres termes, la représentation d'état de la foule est très variée et dépend principalement des phénomènes qu'on lui attribue *a priori*. Ces diverses représentations peuvent en outre se décliner selon un autre principe lorsque le sujet a une existence spatiale : la *description*.

### 1.3.2 Description d'un sujet

En plus de la représentation d'un sujet, on évoque aussi son domaine de définition. Dans l'exemple de la bille, la position et la vitesse ont été retenus comme sa représentation d'état. Ces propriétés peuvent en réalité être définies n'importe où dans l'espace, y compris hors de sa trajectoire. Il faut donc définir la représentation d'état du sujet sur un domaine où celui-ci existe. Trivialement, la position et la vitesse de la bille existent uniquement sur celle-ci. Elle est donc son propre domaine de définition. Cette manière de définir la représentation d'état est appelée *description Lagrangienne*. Elle est utilisée pour la représentation de sujets en mouvements en définissant leurs propriétés sur leur position. A titre d'exemple, la bille peut donc être décrite et représentée comme illustré dans la figure 1.3. Ces propriétés peuvent s'appliquer à la foule et donner lieu à l'illustration de la figure 1.4 dans laquelle leur variabilité est observable.

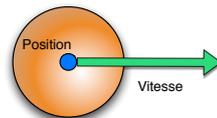


FIGURE 1.3 – Description Lagrangienne d'une bille représentée par sa position et sa vitesse.

La description Lagrangienne apparaît alors comme pertinente pour décrire une foule constituée de sous-sujets en mouvement que sont les individus. La foule peut ainsi être représentée comme un ensemble de particules Lagrangiennes comportant chacune les mêmes propriétés mais dont la valeur est différente.

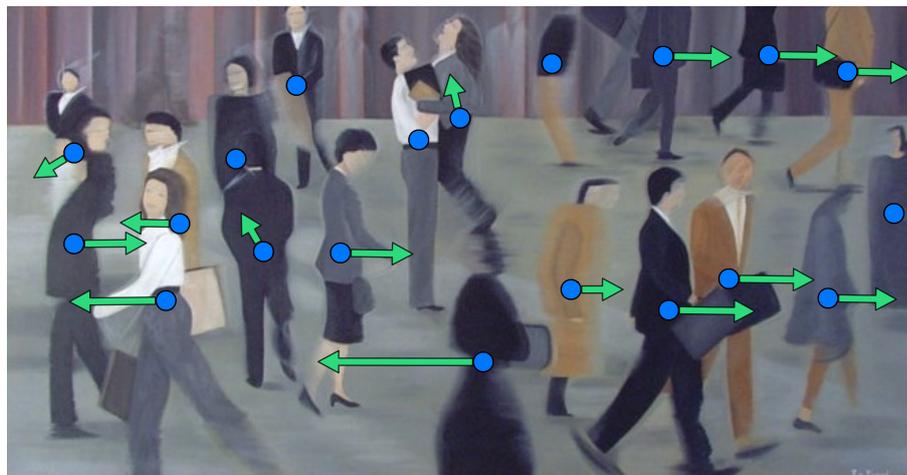


FIGURE 1.4 – Description Lagrangienne d'une foule représentée par sa position et sa vitesse. Peinture de Florence De Fremond, *La Foule 4*.

Dans certains cas pourtant, une foule peut atteindre un niveau de compacité tel, que son comportement se retrouve peu dépendant *a priori* de ses propriétés individuelles. La représentation par description Lagrangienne s'écarte alors du principe de minimisation du rapport entre niveau de simplicité et impact sur la phénoménologie dans la mesure où la taille de la représentation dépend du nombre de particules considérées. Il est possible dans ce cas d'utiliser une représentation différente. En partant du postulat que les propriétés du sujet existent de manière continue dans le domaine considéré, ce dernier est fractionné afin de pouvoir accéder localement à son expression *discrète*. Chaque fraction du domaine est appelée une maille, et leur ensemble constitue un maillage. La propriété de position des individus devient obsolète et l'entité de particule Lagrangienne est remplacée par celle des mailles. Cette manière de décrire les propriétés du sujet est appelée *description Eulérienne*, dont une illustration est proposée en figure 1.5. Ces descriptions mettent en évidence la problématique d'*échelle* des mouvements de foule. Dans la dernière illustration, on comprend bien que le modèle comportemental ne peut pas prendre en compte des comportements dits *microscopiques* comme un individu se faufilant à travers la foule à partir de la description du sujet qui en a été faite. La cause en est la trop grande taille des mailles par rapport aux individus, engendrant une description dite *macroscopique* du sujet. La description Lagrangienne permet par nature d'accéder aux échelles microscopiques. La description Eulérienne nécessite elle pour y accéder d'adapter la taille de ses mailles pour que celles-ci soient partout et tout le temps inférieure à la corpulence des piétons, au risque alors de décrire des zones qui ne seront jamais occupées.

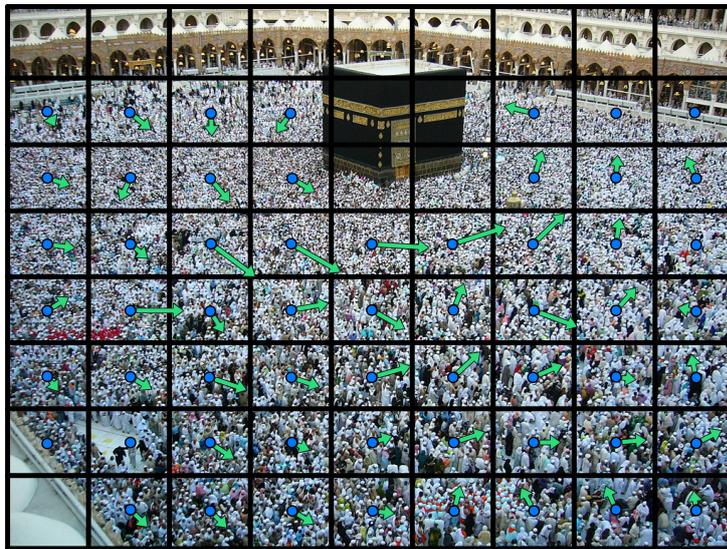


FIGURE 1.5 – Description Eulérienne d'une foule représentée par sa vitesse. A chaque maille sont associées diverses propriétés comme la vitesse ou la densité d'individus. Circumambulation de la Kaaba à La Mecque par des pèlerins.

La modélisation d'un phénomène est donc dépendante de la représentation du sujet qui y est soumis, de sa description et des mécanismes oeuvrant à produire un comportement.

Il est à souligner qu'un modèle est une entité abstraite. Notons aussi que la représentation d'état d'un sujet et sa description forment ce que l'on appelle l'*espace d'état*.

Tournons maintenant sur le lien existant entre un modèle et sa mise en œuvre.

### 1.3.3 Simulation

Si un modèle est une représentation théorique, il est néanmoins nécessaire de le mettre en pratique si l'on souhaite en étudier les sorties. Ce procédé est appelée *simulation*, et se définit comme le processus permettant d'obtenir le résultat d'une action sur un sujet sans avoir à réaliser l'expérience générant le phénomène. Elle regroupe le modèle et ses périphéries, ainsi que les moyens de sa mise en oeuvre, comme illustré figure 1.6.

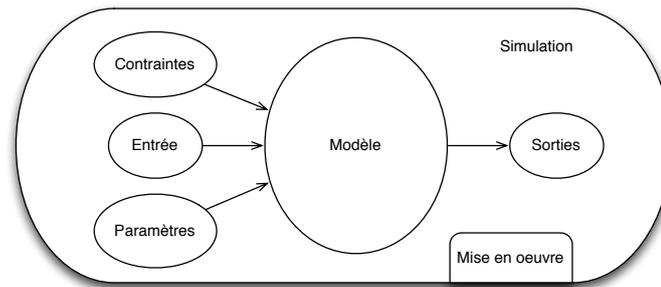


FIGURE 1.6 – Schéma conceptuel d'une simulation.

Dans notre cas, la mise en œuvre de la simulation se fera grâce aux outils informatiques. On parle alors de *simulation numérique*. Afin d'illustrer ce propos, reprenons l'exemple de la chute de la bille. Nous cherchons à récupérer la sortie du modèle de chute issue de la simulation numérique de ce dernier. Cette sortie est donc la trajectoire de la bille. Le modèle peut être pris comme l'équation du mouvement issue des lois du mouvement de Newton. On notera ici que le modèle est dit *mathématique*, et d'*évolution* puisqu'il renvoie la quantité de variation temporelle de l'état du sujet que sont sa position et sa vitesse. Or pour obtenir la trajectoire de la bille, il est nécessaire de déterminer sa position au cours du temps. La trajectoire est alors obtenue par *intégration* du modèle. Si certains modèles sont intégrables mathématiquement d'autres ne le sont pas. Dans le premier cas on peut avoir recours à une *intégration analytique* du modèle, signifiant que celui-ci est transformé mathématiquement, et avec exactitude, en une expression analytique. L'intégration du modèle est alors considérée comme parfaite puisqu'il est possible d'accéder à n'importe quel instant à l'état du sujet respectant rigoureusement le modèle. Cela ne veut évidemment pas dire pour autant que le modèle est lui parfait. Ici, cela signifie qu'il est possible d'obtenir la trajectoire de la bille de manière *continue* dans le temps.

Seulement, comme évoqué, il n'est pas toujours possible de déduire une expression analytique d'un modèle. Pour procéder à la simulation du phénomène on a recours alors à une *intégration numérique*, qui évalue la sortie du modèle à plusieurs instants de la simulation. Ceci implique l'existence d'une *discrétisation temporelle*. Contrairement à l'intégration analytique, l'intégration numérique génère de l'erreur sur la sortie du modèle. Cette erreur peut être minimisée en utilisant une discrétisation temporelle suffisamment fine et des techniques d'intégration avancées, sans quoi la simulation peut se retrouver incapable de reproduire le phénomène étudié.

Pour illustrer ce propos, on considère de nouveau le phénomène de la chute libre d'une bille d'une hauteur de 100 mètres, lancée horizontalement à 50 kilomètres par heure. Les résultats de simulations mises en œuvre par les deux méthodes citées est proposé dans la

figure 1.7, et montrent qu'à partir d'un même modèle les techniques de mise en œuvre peuvent donner lieu à des trajectoires différentes.

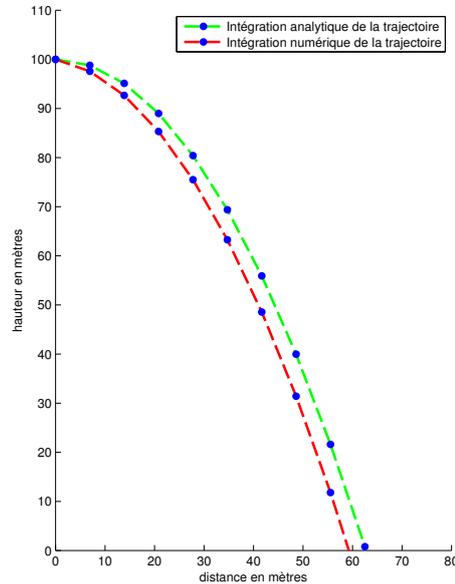


FIGURE 1.7 – Deux simulations de la chute d'une bille modélisée par l'équation du mouvement. La trajectoire verte est obtenue par intégration analytique (et donc parfaite) du modèle, la rouge par intégration numérique. La position de la bille en bleu est calculée à intervalles temporels réguliers d'une demie seconde.

Si l'on souhaite reproduire le plus fidèlement possible le phénomène, on lui attribue aussi une représentation graphique. Cette représentation est en général conçue pour procurer le plus de réalisme possible. Des propriétés graphiques sont attribuées au sujet, ainsi qu'à l'environnement qui l'entoure. Ces propriétés peuvent être des formes, des couleurs, des éclairages ou d'autres encore. Ceci renvoie en réalité directement au concept de modèle 3D évoqué précédemment. Pour la bille, le modèle 3D peut être une sphère et sa couleur orange, son déplacement étant produit par la simulation de son modèle comportemental. Cet ensemble constitue ce que l'on appelle la *synthèse*. Par définition, la synthèse est l'opération par laquelle on rassemble de manière homogène des éléments de provenances diverses. Ces éléments sont ici la simulation comportementale et la simulation graphique. Sa schématisation est proposée dans la figure 1.8.

Pour les phénomènes comportant une évolution temporelle, la synthèse se retrouve être une animation. La synthèse de la chute de la bille est donc une séquence animée faisant apparaître une représentation graphique de cette dernière, ainsi que son évolution spatiale au cours du temps. Il en va de même dans le cas de la foule, où sa synthèse propose une représentation graphique des individus ainsi que leur évolution. Il est possible de voir en figure 1.9, un extrait de synthèse correspondant à ces deux cas.

Précisons encore une fois que la scène présentée dans la figure 1.9(b) n'est pas une foule, mais une synthèse de foule. Pour illustrer ce propos, nous pouvons mentionner la célèbre toile de René Magritte représentant une pipe, et qui n'en est évidemment pas une (figure 1.10). Ce paradigme revêt une certaine importance dans la suite de ce manuscrit.

La modélisation, la simulation et la synthèse sont donc des concepts qui sont en charge de tâches bien définies et qu'il est nécessaire de bien distinguer. Pour une foule, deux

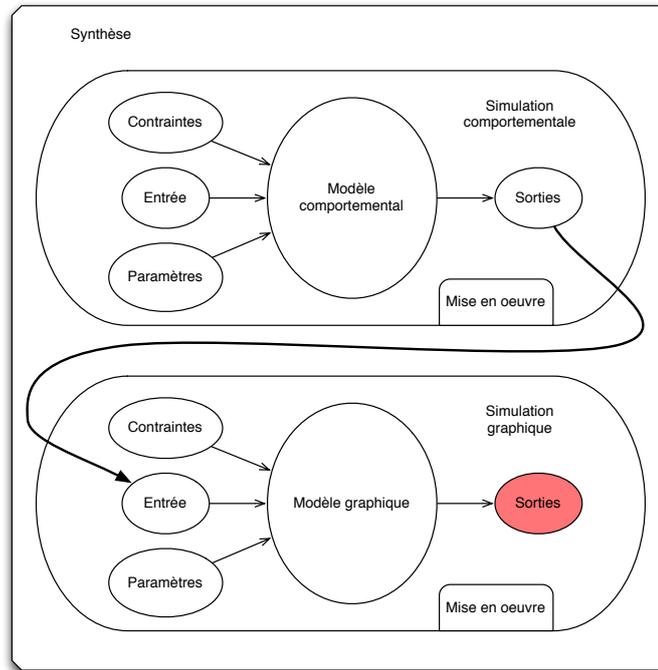
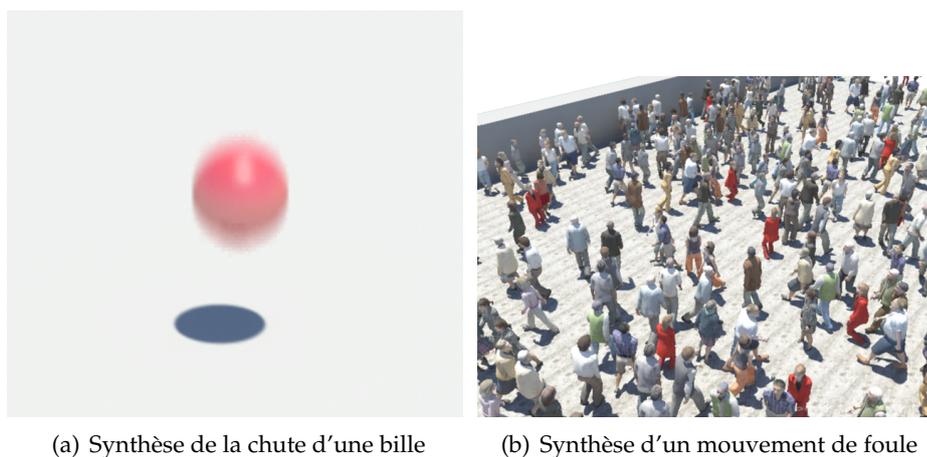


FIGURE 1.8 – Schéma conceptuel d'une synthèse graphique.



(a) Synthèse de la chute d'une bille

(b) Synthèse d'un mouvement de foule

FIGURE 1.9 – Deux synthèses de phénomènes différents.



FIGURE 1.10 – **Illustration du paradigme de la représentation.** Cette image n'est pas une pipe, mais une synthèse de pipe. Elle est basée sur un modèle représentant une pipe qui est issu de la subjectivité de Magritte. Ce modèle est simulé graphiquement par peinture. *La Trahison des Images*, René Magritte, 1929.

problèmes critiques se posent : sa représentation comportementale et sa représentation graphique. Dès lors, l'objectif consistant à générer la synthèse de foule la plus réaliste possible peut se résumer à la recherche des meilleures représentations possibles dans ces deux domaines. Si cette tâche peut s'accomplir de manière qualitative, notamment en simplifiant la représentation des individus et de leur comportement, le résultat de la synthèse n'est pas forcément satisfaisant. La palette de comportements humains est en effet trop riche pour pouvoir être unifiée dans un modèle dédié. Ce point pose la question de la manière d'appréhender des comportements de foule, c'est à dire comment intégrer des comportements réels au modèle sans faire appel à des techniques qualitatives.

La réponse à cette question est complexe, car par définition les comportements que l'on souhaiterait voir intégrés au modèle sont mal compris. A défaut, en supposant qu'elle exhibe certains comportements ciblés, il est possible de récupérer de l'information sur une foule réelle. Cette information provient potentiellement de quantités mesurées *in situ*, comme la trajectoire des individus au cours du temps que l'on peut imaginer enregistrer puis étudier. Disposer de ce type de données ne suffit pourtant pas à appréhender des comportements, il faut savoir comment les intégrer dans la simulation dédiée afin d'enrichir la synthèse. Cette réflexion constitue l'*analyse* de la foule.

### 1.3.4 Analyse

L'analyse consiste en l'observation d'un phénomène et à la répercussion qu'elle peut avoir sur sa compréhension. D'un point de vue littéraire, elle s'oppose à la synthèse, en se définissant comme la méthode permettant d'identifier puis décomposer les constituants d'une entité. C'est l'analyse qui permet à partir de l'observation d'un phénomène, d'en déduire la modélisation et le type de simulation, ainsi que la représentation et la description du sujet. La réflexion faite jusqu'ici sur la chute d'une bille est notamment un travail d'analyse qualitative de phénomène dans la mesure où l'observation, en plus d'être imaginaire, a elle aussi été qualitative. L'analyse est donc par définition *empirique* puisqu'elle se fonde sur l'étude *a posteriori* d'un phénomène, contrairement à la synthèse qui elle s'appuie sur sa caractérisation *a priori* ce qui traduit une approche *innéique*. Une schématisation généraliste du processus d'analyse est disponible à travers la figure 1.11.

Les techniques d'analyse sont nombreuses et peuvent avoir des objectifs différents.

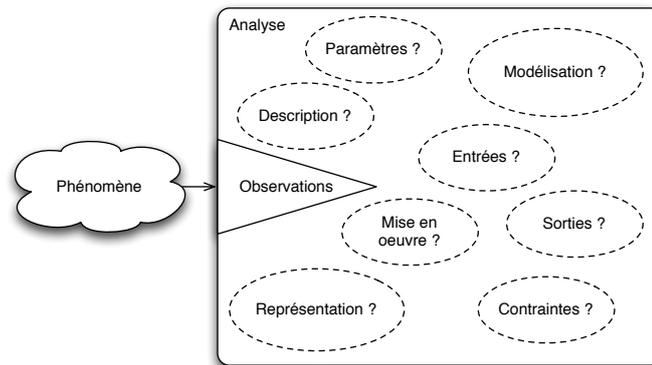


FIGURE 1.11 – Schéma conceptuel général du processus d'analyse. A partir de l'observation d'un phénomène, les composants qui le constituent sont isolés et évalués

L'analyse qualitative menée sur la chute de la bille a eu pour but la détermination de son espace d'état et de son modèle comportemental ainsi que des autres concepts périphériques nécessaires à la simulation du phénomène. Dans le cas de la foule, le raisonnement conduit pour choisir le type de description à partir d'un aperçu visuel de sa structure est aussi un processus d'analyse qualitative. L'analyse d'un phénomène ne se limite cependant pas à ce type d'approche dont la subjectivité peut être problématique dans un contexte scientifique.

#### 1.3.5 Estimation

L'estimation consiste à extraire des informations quantifiables par des mesures objectives d'un phénomène observé. Ces mesures peuvent concerner les valeurs contenues dans les divers concepts constituant la synthèse de ce même phénomène, supposant donc leur identification préalable. A titre d'exemple, la mesure de la température de l'air suppose d'avoir identifié l'existence de la propriété de température, qui est un concept permettant la simulation et la synthèse du phénomène d'agitation de l'air. Dans un autre registre, imaginons que l'on dispose d'une photographie de la bille étudiée plus haut. Cette observation nous renseigne sur son apparence réelle et nous permet d'évaluer la valeur d'un des paramètres de sa modélisation graphique : la texture. Dans un autre cas de figure, on observe la chute libre d'une bille sur une lointaine planète méconnue, de telle manière qu'on dispose de la trajectoire de l'objet. Si cette dernière est parfaitement conforme à la réalité du phénomène, il est possible d'évaluer la gravité régnant à la surface de la planète, autrement dit là aussi la valeur d'un paramètre du modèle cette fois-ci comportemental. Si par malheur le phénomène est observé depuis notre planète, et que la trajectoire dont on dispose est en réalité mal définie, alors difficile d'accéder directement et avec fiabilité à la vitesse de la bille. Certaines techniques d'analyse proposent alors d'évaluer en même temps à la fois la gravité et l'état de l'objet que sont sa position et sa vitesse. Elle permettent donc d'évaluer à la fois les valeurs prises par les paramètres, les entrées et les sorties du modèle comportemental qui sont considérées comme des variables cachées par la médiocrité de l'observation. Toutes ces approches basées données sont des méthodes d'analyse dites d'estimation. Pour illustrer le dernier exemple, une observation imaginaire est présentée figure 1.12. A partir de celle-ci, une estimation de la trajectoire

réelle est proposée, ainsi qu'une valeur de la gravité régnant sur la planète.

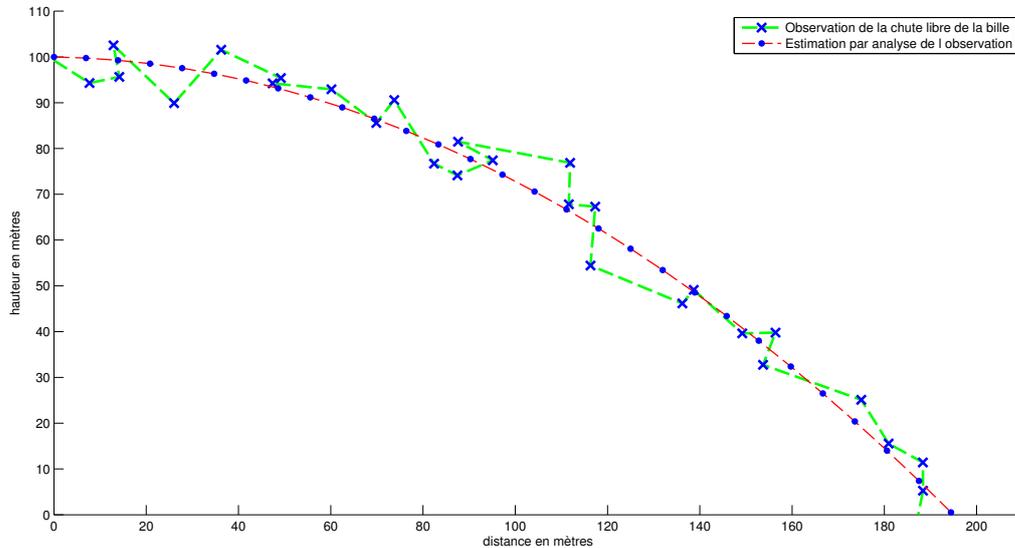


FIGURE 1.12 – **Problème d'estimation.** La trajectoire verte est celle observée, la rouge celle obtenue par une estimation de l'état de la bille et de la valeur du paramètre de gravité se trouvant être dix fois moindre que sur Terre.

La problématique d'estimation peut en réalité s'illustrer comme dans la figure 1.13 : les données à estimer sont cachées à la fois par la modélisation qui les relie, et par une probable mauvaise acuité de la méthode ayant fourni l'observation. Dans certaines communautés cependant, le terme estimation se réfère souvent à l'état du sujet, et non aux contraintes et paramètres de la modélisation. On parle implicitement d'*estimation d'état*, qui dans le cas de la bille se trouve être la position et la vitesse, et donc sa trajectoire.

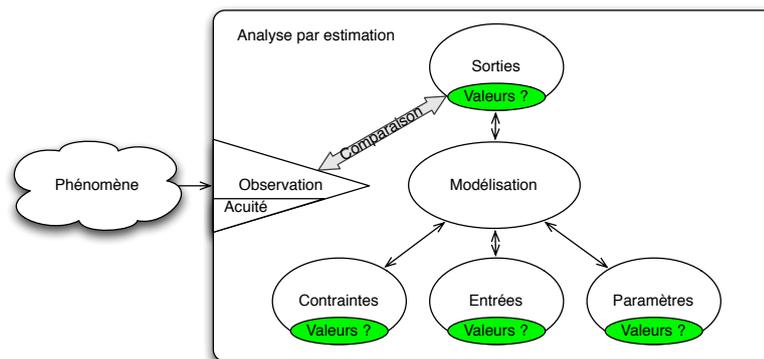


FIGURE 1.13 – **Schéma du processus d'analyse par estimation.** A partir de l'observation d'un phénomène, les valeurs permettant de reproduire au mieux celui-ci à partir d'un modèle donné sont estimées.

Pour revenir au phénomène du mouvement de foule, l'utilisation d'observation permet potentiellement d'estimer nombres de valeurs dirigeant le modèle comportemental. Si l'observation de la trajectoire des individus apparaît comme la plus naturelle, elle présente cependant de nombreux inconvénients. Pour commencer, en supposant qu'on analyse une foule d'une centaine d'individus, il faudrait pouvoir disposer d'autant de capteurs

de positions. Chacun de ces appareils devrait être fixé à son porteur pour la durée de l'observation. Seulement, porter un tel type d'instrument n'est pas anodin. Si il a des répercussions négligeables sur les caractéristiques physiques des individus comme leur masse, il n'en va pas de même pour leur caractéristiques psychologiques. On peut en effet s'attendre à ce que le comportement des individus porteurs de tels instruments se voit modifié par le fait de se savoir suivi. Le fait d'observer le phénomène a alors pour conséquence de le modifier : c'est une observation *intrusive*. De ce fait l'observation correspond à un phénomène différent de celui à étudier en premier lieu. « D'analyse d'un mouvement de foule », on passe à « l'analyse d'un mouvement de foule dont les individus portent un localisateur » ce qui n'est pas ici l'objet d'étude. En outre, il existe une grande variété de mouvements de foules. Certains notamment sont spontanés, fulgurants et parfois malheureusement dangereux. Il est impossible de pouvoir à la fois détecter la naissance de tels phénomènes et équiper les individus à temps pour des observations qui se trouveraient de plus bien futiles dans le dernier cas. Pour résumer, il faudrait non seulement que les individus équipés le soient tout le temps pour qu'ils oublient l'expérience, mais qu'en plus tout un chacun soit impliqué dans l'expérience pour que chaque mouvement caractéristique qui se forme où que ce soit et n'importe quand, soit entièrement constitué d'individus équipés. Tout ceci est évidemment fantaisiste et irréalisable, sans compter le fait que de tels appareils sont très coûteux.

Le type d'observation le plus répandu pour l'analyse de mouvements de foules est en réalité la vidéo, qui présente l'avantage d'être facile à mettre en place, et a l'élégance d'être non-intrusif. Cependant, son utilisation par l'estimation formelle n'est pas évidente à mettre en place. Lors du visionnage d'une vidéo faisant apparaître une foule, notre perception et notre cognition permettent de remonter facilement à des éléments comme la quantité d'individus, leur orientation ou encore leur compacité. En effet nous avons chacun une certaine représentation mentale des individus et une modélisation subjective du phénomène de foule à travers lesquelles le processus d'analyse par estimation se basera. L'absence de facultés cognitives de l'outil informatique oblige à l'inverse à mettre en place des techniques d'estimation extrêmement explicites et de bas niveau qui peuvent en fin de compte s'avérer approximatives. L'analyse d'un phénomène par une vidéo peut s'effectuer de plusieurs manières. Soit spatiale, auquel cas l'observation est une suite décorrélée d'images dont on utilisera les formes, soit temporelle, auquel cas seule l'évolution des valeurs contenues dans chaque pixel sera utilisée comme observation. Ces considérations feront l'objet d'une étude plus poussée dans la suite de ce document.

Avant cela, nous serons amenés dans ce manuscrit à approfondir les concepts d'estimation et de gestion de l'incertitude engendrée par l'étude de phénomènes complexes partiellement observés. Ce sujet sera l'objet du chapitre 2 suivant. Nous nous pencherons ensuite dans le chapitre 3 sur la modélisation de la foule afin d'explorer la compréhension qui peut en être faite. L'étude de l'observation de phénomènes, et en particulier celui qui nous intéresse ici, par le biais de supports vidéos sera ensuite abordée dans le chapitre 4. Pour finir, et avant de discuter sur les différents sujets abordés dans ce manuscrit, nous nous intéresserons dans le chapitre 5 à la problématique plus générale du contrôle de foule qui est fortement liée à l'estimation des variables dirigeant son comportement.



# 2

## Contrôle et Estimation

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Définition des problématiques</b>	<b>16</b>
2.1.1	Généralités sur les modèles	16
2.1.2	Généralités sur l'estimation d'une trajectoire d'état	17
2.1.3	Généralités sur le contrôle	19
<b>2.2</b>	<b>Etat de l'art sur les méthodes existantes</b>	<b>22</b>
2.2.1	Méthodes déterministes	22
2.2.2	Méthodes statistiques	24
2.2.3	Conclusion	34
<b>2.3</b>	<b>Théorie du contrôle optimal par assimilation variationnelle</b>	<b>35</b>
2.3.1	Introduction	35
2.3.2	Contrôle optimal par contrôle paramétrique d'un modèle	35
2.3.3	Contrôle optimal par contrôle paramétrique sous pénalité	40
2.3.4	Cas particulier du contrôle additif temporel	42
2.3.5	Méthode incrémentale	43
2.3.6	Discussion	45
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>

---

L'analyse d'une foule est une tâche complexe. Tout d'abord parce que la nature de sa représentation est fluctuante, et ensuite parce que les lois régissant son comportement ne sont qu'approximativement comprises. La problématique d'analyse d'un tel phénomène, dont la définition reste imprécise, doit ainsi se tourner vers des approches ouvertes. Ces approches doivent être capables d'utiliser à bon escient une information souvent implicite et incomplète dont on dispose du phénomène. A partir de cette dernière, une nouvelle information jugée d'intérêt est alors extraite sous une forme potentiellement très différente de sa source *brute*. Plusieurs questions se posent alors. Quelle information chercher ? Comment la chercher ? De quelle information disposons nous ? Comment l'utiliser ? Nous abordons ici la relation qui existe entre ces interrogations à travers la définition des concepts liés de contrôle et d'estimation mais qui définissent cependant des approches différentes de la problématique d'analyse. Dans ce chapitre, nous nous pencherons tout d'abord sur la définition mathématique de la modélisation et du formalisme nécessaire à la simulation. Les notions de contrôle et d'estimation y sont aussi introduites au sens procédural, donnant une vue d'ensemble de la façon par laquelle l'information sur le phénomène considéré est utilisée. Après un aperçu des méthodes d'estimation existantes, le contrôle optimal par assimilation variationnelle et son formalisme y sont détaillés. Nous discutons enfin de la portée de ces méthodes quant à l'analyse du phénomène de la foule.

## 2.1 Définition des problématiques

Cette section s'intéresse à la taxonomie et au formalisme relatif à l'analyse d'un phénomène régi par des lois évolutives.

Dans un premier temps nous nous penchons sur le formalisme mathématique de la modélisation en partant du concept de modèle évoqué dans le chapitre précédent. Ensuite, nous définissons la problématique d'estimation, et pour finir la problématique du contrôle.

### 2.1.1 Généralités sur les modèles

Comme mentionné au chapitre précédent, un modèle s'appuie sur des entrées, sorties, paramètres et contraintes. Il est cependant important, dans ce document, de différencier deux classes de modèles, que sont sa formulation locale et globale. Lors de l'étude de la chute de la bille évoquée en introduction, la trajectoire peut être vue comme une sortie globale du modèle.

$$\text{sortie globale} = \underbrace{\text{Intégration}(\text{Modèle}(\text{entrée globale; paramètres; contraintes}))}_{\text{sur un intervalle}}. \quad (2.1)$$

L'expression mathématique d'un modèle local est quelque peu différente car la sortie s'exprime, à chaque instant, en fonction d'une entrée qui est elle aussi locale. En notant un tel modèle  $\mathbb{M}$ , on exprime la sortie locale comme suit :

$$\text{sortie locale} = \mathbb{M}(\text{entrée locale; paramètres, contraintes}). \quad (2.2)$$

Généralement, l'entrée locale est l'état d'un sujet que l'on note  $\mathbf{X}$ . Le modèle quant à lui peut soit être séquentiel, soit continu. Dans le premier cas, la sortie locale se trouve être aussi l'état, mais à un point différent défini par un indice  $n$ . L'expression locale du modèle se trouve alors être :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}_n(\mathbf{X}_n; \text{paramètres, contraintes}). \quad (2.3)$$

Dans le cas continu, la sortie locale du modèle est l'évolution de l'état selon une variable. Si cette variable est le temps, on parle alors de modèle dynamique, ou d'évolution, s'écrivant :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbb{M}(\mathbf{X}; \text{paramètres, contraintes}), \quad (2.4)$$

signifiant alors de manière implicite que  $\mathbf{X}$  dépend de  $t$ . On considère que la sortie d'un système dirigé par un modèle, discret ou continu, est la sortie globale que l'on appellera trajectoire du sujet notée  $\underline{\mathbf{X}}$ . Dans le premier cas cette trajectoire est notée  $\underline{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}_n\}, n \in \{0, \dots, N_t\}$ ,  $N_t$  étant le nombre d'instantés considérés, et dans le second cas  $\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(t), t \in [t_0, t_f]$ , où  $t_0$  et  $t_f$  sont respectivement les instants de début et de fin de l'intervalle temporel considéré.

Communément, les paramètres et contraintes du modèle n'apparaissent pas explicitement dans la formulation de la sortie. Ils sont cependant utilisés, dans la mesure où toute intégration fournissant une trajectoire se base sur des paramètres et contraintes définis. Une contrainte souvent exprimée en dehors du modèle est sa condition initiale, à savoir

## 2.1. Définition des problématiques

---

l'état explicite en début de trajectoire noté :  $\mathbf{X}_0$  dans le cas séquentiel, ou  $\mathbf{X}(t_0)$  dans le cas continu.

Lorsque ces variables sont retirées de l'écriture mathématique du modèle, la notation courante devient dans le cas séquentiel :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}_n(\mathbf{X}_n), \quad (2.5)$$

et dans le cas dynamique :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = 0. \quad (2.6)$$

Cette dernière notation, opposée à celle définissant la sortie locale comme égale au modèle, est couramment utilisée dans les problématiques d'estimation et de contrôle. On peut remarquer qu'en considérant uniquement certains instants définis par leur intervalle  $\{t_n = \sum_{i=0}^n (\Delta t)_i\}$ , l'équation 2.6 est discrétisable et exprimable comme l'équation 2.5. Le modèle séquentiel s'écrit alors :

$$\mathbb{M}_n = -(\Delta t)_n \mathbb{M}. \quad (2.7)$$

Un autre type de contrainte du modèle peut être un terme dit *source*, traduisant une contrainte extérieure qu'il subit. Cette contrainte  $C$  s'exprime alors :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}_n(\mathbf{X}_n) + C, \quad (2.8)$$

dans le cas séquentiel, et :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = C. \quad (2.9)$$

dans le cas dynamique.

### 2.1.2 Généralités sur l'estimation d'une trajectoire d'état

L'estimation peut se définir comme étant une **quantification approchée de variables cachées par un ou plusieurs processus**. Elle consiste en la recherche d'une correspondance entre la sortie d'un système et une observation grâce à l'ajustement de variables. Cette correspondance se traduit par une trajectoire particulière du sujet (voir figure 2.1) alors dite *estimée*. La commande constitue le seul degré de liberté permettant au système de proposer une sortie conciliante vis-à-vis de l'observation.

Si le système est dirigé par un modèle, les commandes sont constituées par les contraintes et paramètres de celui-ci (voir figure 2.2). Ce sont ces derniers qui permettent d'estimer la trajectoire réelle de la bille vue dans la figure 1.12. Cette estimation est alors menée en proposant une condition initiale (contrainte) et une gravité (paramètre) permettant d'obtenir une intégration de modèle satisfaisant autant que possible l'observation.

Le processus d'observation d'un phénomène peut se traduire comme un opérateur qui dépend de l'état du sujet. Autrement dit :

$$\text{observation} = \text{Méthode d'observation}(\text{état du sujet}). \quad (2.10)$$

En notant l'observation  $\mathbf{Y}$  et la méthode d'observation  $\mathbb{H}$ , la relation précédente peut s'écrire mathématiquement comme suit :

$$\mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}). \quad (2.11)$$

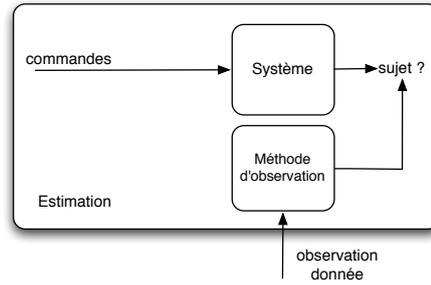


FIGURE 2.1 – Schéma de la problématique d'estimation. Comment accéder à la trajectoire idéale du sujet respectant au mieux le système et l'observation ?

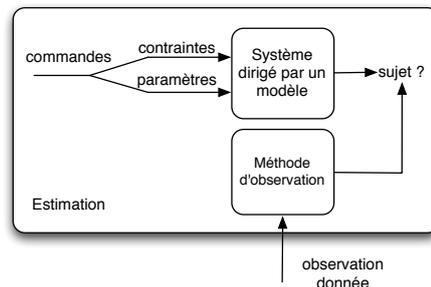


FIGURE 2.2 – Schéma de la problématique d'estimation. Comment remonter aux commandes d'un système à partir d'une observation sur sa sortie.

La trajectoire du sujet doit donc vérifier deux équations, qui ensemble constituent le problème d'estimation, se traduisant par la détermination de la trajectoire du sujet vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = 0 & \text{ou } \mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}(\mathbf{X}_n), & (2.12a) \\ \mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}). & & (2.12b) \end{cases}$$

Ce système met en évidence le fait qu'il n'existe pas forcément de trajectoire d'état qui soit solution au problème posé. La trajectoire acceptable du sujet se trouve être un compromis entre ces deux relations. Ce compromis implique l'existence de degrés de libertés relatifs au respect de l'une et l'autre des relations. Dans le cas de l'opérateur d'observation, cette flexibilité est représentée par une erreur vraisemblable (et par la suite mathématiquement assumée) de l'observation faite du phénomène. Cette erreur est généralement inconnue et peut se traduire de plusieurs manières :

- D'un point de vue matériel : la marge d'erreur de l'outil servant à la mesure.
- D'un point de vue estimation : la propension qu'a l'opérateur d'observation à concéder un différentiel sur l'état estimé et l'état implicitement observé, autrement dit sa tolérance.
- D'un point de vue résolution : une erreur statique inconnue.

Mathématiquement, elle s'exprime comme une contrainte inconnue de l'opérateur  $\mathbb{H}$  et amène les écritures suivantes :

$$\mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}; \epsilon_{\mathbb{H}}) \quad \text{ou plus communément} \quad \mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\mathbb{H}}, \quad (2.13)$$

si cette erreur  $\epsilon_{\mathbb{H}}$  est additive. Dans le cas du modèle, la flexibilité de la trajectoire repose sur ses paramètres et contraintes qui constituent les commandes du système utilisé pour l'estimation. La manipulation de ces commandes est donc un point crucial pour l'estimation de l'état du sujet, ou de sa trajectoire.

### 2.1.3 Généralités sur le contrôle

#### 2.1.3.1 Définition

Le contrôle peut se définir comme suit : **Maîtrise de l'état d'un sujet selon une consigne par l'utilisation de leviers inhérents au système auquel il est soumis. Ces leviers sont appelés commandes ou variables de contrôle.** Le contrôleur se charge ainsi de traduire la consigne en variables de contrôle, comme présenté dans la figure 2.3.

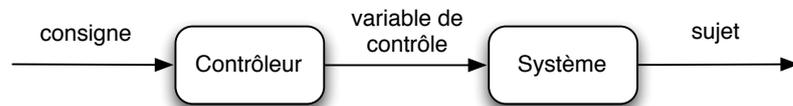


FIGURE 2.3 – Schéma du processus général de contrôle. Comment manipuler les variables de contrôle pour faire correspondre le sujet à la consigne ?

Le contrôleur a un rôle déterminant dans le processus de contrôle puisque c'est lui qui orchestre la manipulation des commandes du système afin d'amener le sujet à respecter une certaine consigne. Néanmoins, il est souvent nécessaire de vérifier si cette consigne est respectée. Pour cela, un capteur d'état est souvent utilisé pour en calculer l'écart avec le sujet. Cet écart permet au contrôleur de réagir et de fournir une nouvelle valeur aux variables de contrôle. Cette boucle de retour crée alors un contrôle dit en boucle fermée, comme illustré en figure 2.4. Il est à noter que par abus de langage on parle parfois du contrôle d'un sujet alors que celui-ci ne constitue en général pas la variable de contrôle.

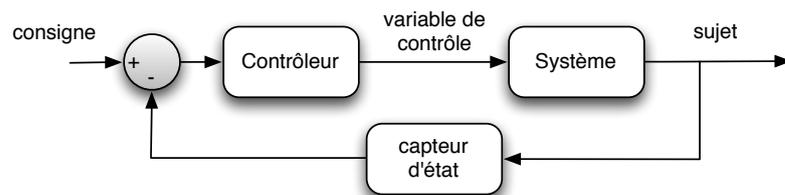


FIGURE 2.4 – Schéma du processus général de contrôle en boucle fermée.

Pour illustrer ce propos, voici quelques exemples de contrôle en boucle fermée :

- Contrôle d'une voiture roulant qui doit rester sur la route. Le sujet est la voiture, l'état à maîtriser est sa position, les commandes sont le volant et les pédales, et le système est constitué de la voiture et de la route.
- Dans un contexte sportif, contrôle d'un ballon arrivant rapidement sur un individu et qui ne doit pas lui échapper. Le sujet est le ballon, l'état à maîtriser est sa position, les commandes sont les membres de l'individu et le système est constitué du ballon et de l'individu.

Le contrôleur revêt une grande importance quant à la qualité et au type de contrôle. Dans ces exemples il peut être humain, auquel cas le cerveau se chargera d'évaluer le différentiel avec la consigne et d'actionner les commandes. Mais il peut aussi être *automatique*, proposant ainsi un contrôle autonome, et dont la mission est bornée. Le contrôleur est alors paramétré pour que la régulation du sujet vis-a-vis de la consigne réponde à certaines exigences de rapidité, stabilité ou autres. On parle alors d'asservissement, qui dans l'exemple de la voiture peut se caractériser par un régulateur de vitesse. La notion de contrôle peut cependant être élargie par rapport à sa seule dimension temporelle dont les exemples précédents sont issus.

### 2.1.3.2 Contrôle optimal

Le contrôle optimal peut être vu comme une déclinaison du contrôle vu précédemment, et dont une schématisation est visible en figure 2.5. Sa spécificité se situe sur le type de consigne et contrôleur, rassemblés en un concept qui est l'optimisation.

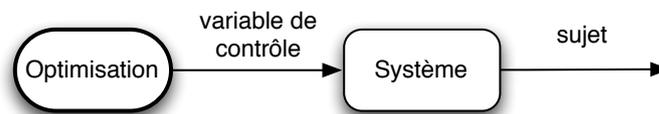


FIGURE 2.5 – Schéma du processus général de contrôle optimal. Comment manipuler un ou plusieurs variables de contrôle pour optimiser le système selon un critère donné.

L'optimisation, au sein d'un processus de contrôle, se base sur une fonction qui cumule le coût mathématique de la valeur de diverses variables inhérentes au système sur toute la trajectoire du sujet. Le but est de minimiser (ou maximiser) cette fonction coût notée  $\mathcal{J}$  pour dégager un état ou une trajectoire du sujet dite optimale. Ceci est rendu possible par la détermination d'un chemin optimal pilotant les variables de contrôles du système. C'est donc une méthode de résolution, le plus souvent itérative et donc en boucle fermée, qu'il est possible de schématiser sur la base de la théorie du contrôle, comme illustré en figure 2.6.

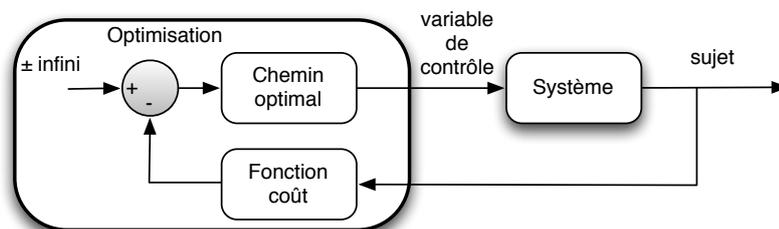


FIGURE 2.6 – Schéma du processus général de contrôle optimal. Le sens des flèches n'est pas chronologique mais itératif.

Pour illustrer ce propos, il est possible de considérer l'exemple du contrôle optimal du trajet d'une voiture pour lequel une consommation minimale d'essence est demandée. La fonction coût exprime alors le prix du carburant consommé.

Le contrôle optimal peut aussi se voir adjoindre une contrainte auxiliaire. Le coût de l'écart entre celle-ci et la propriété du sujet correspondante est alors ajoutée à la

## 2.1. Définition des problématiques

fonction coût. Deux schématisations équivalentes du contrôle optimal sous contrainte sont proposées en figure 2.7. En reprenant le dernier exemple du contrôle de la voiture, on peut en plus demander à celle-ci d'être présente à un certain endroit du parcours à un certain moment. Cette contrainte auxiliaire entre en conflit avec la contrainte primaire que constitue la minimisation de la consommation totale de carburant.

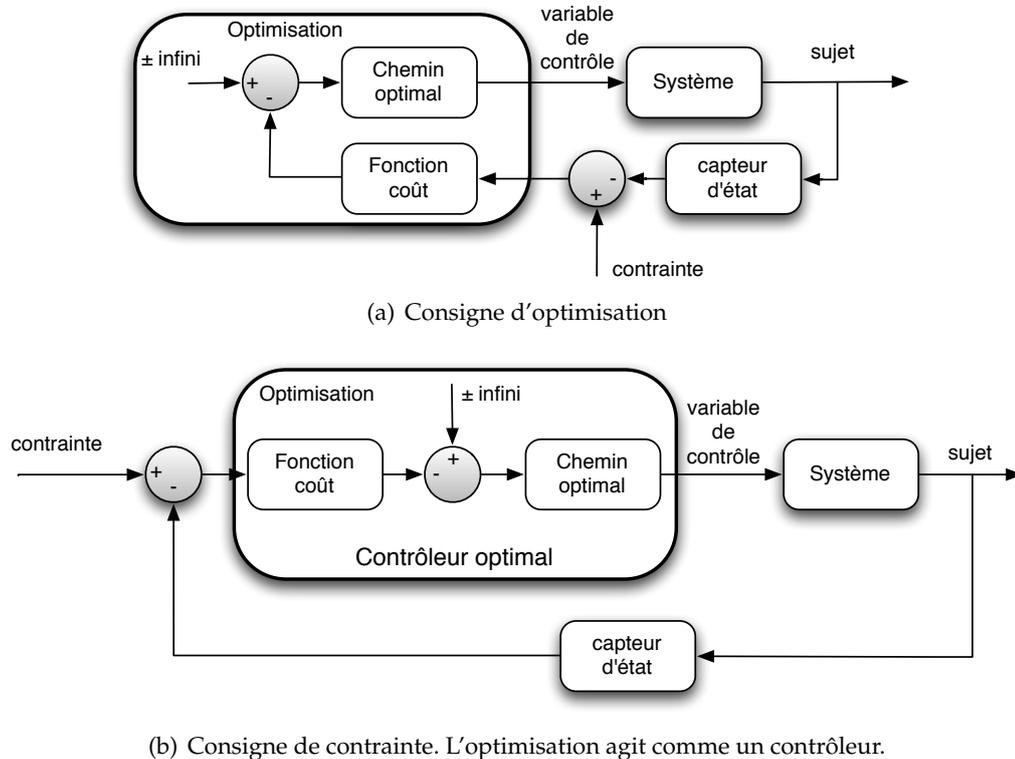


FIGURE 2.7 – Schéma du processus général de contrôle optimal sous contrainte. Les deux schématisations sont équivalentes mais ont un point de vue différent sur ce qui constitue la consigne et le contrôleur.

Une utilisation particulièrement intéressante du contrôle optimal peut-être faite dans le cadre de l'estimation dirigée par un modèle. En intégrant la méthode d'observation à la fonction de coût, et plus précisément en lui ajoutant l'erreur d'observation  $\epsilon_{\mathbb{H}}$ , il est possible de déterminer une trajectoire optimale du sujet en reprenant le concept de contrôle optimal sous contrainte. Cette synthèse de procédés est représentée en figure 2.8, en y intégrant la schématisation de l'estimation présentée en figure 2.2. Il est possible de définir l'estimation par contrôle optimal comme l'estimation de l'état d'un sujet par contrôle optimal sous contrainte, cette dernière étant alors appelée observation; ou plus spécifiquement, cette « estimation optimale » peut être vue comme l'estimation de l'état d'un sujet à partir d'une observation et par l'utilisation de variables de contrôle engendrant la minimisation d'une fonction coût à travers un système dont dépend le sujet.

Les concepts d'estimation, de contrôle, et d'optimalité ayant été introduits, nous abordons maintenant les différentes méthodes permettant de les appliquer. Celles-ci correspondent pour la plupart au formalisme mathématique constituant la notion cruciale de contrôleur que nous avons ici détaillée, et qui permet le dialogue entre une modélisation et des observations en vue d'obtenir un certain état du sujet.

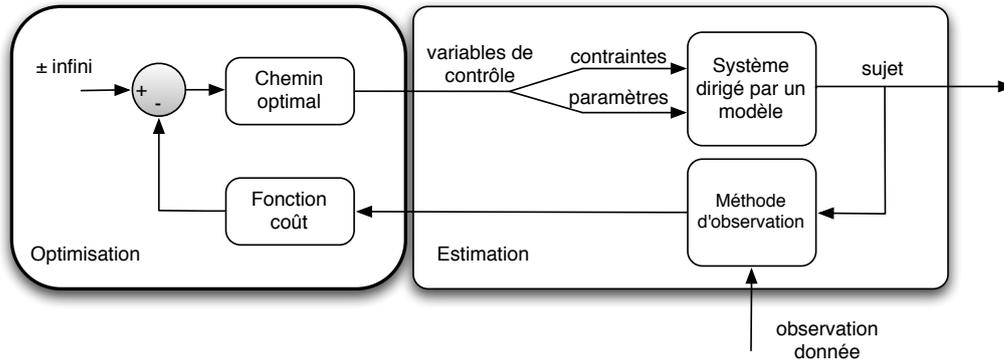


FIGURE 2.8 – Schéma du processus général d'estimation d'état par contrôle optimal. Le sens des flèches n'est pas chronologique mais itératif.

## 2.2 Etat de l'art sur les méthodes existantes

Il existe un grand nombre de méthode permettant de faire la synthèse d'informations diverses en vue d'obtenir un état jugé pertinent. Parmi elles, nous commençons par nous pencher sur les méthodes déterministes pour lesquelles *l'a priori* d'une modélisation dynamique n'est pas utilisé, c'est à dire sans système du point de vue de proposé par la section précédente. Nous évoquerons ensuite quelques unes des principales méthodes stochastiques permettant de relier des données issues d'observations de phénomène avec une modélisation qui en est faite.

### 2.2.1 Méthodes déterministes

On se place dans le cas où l'état n'est pas régi pas un système, mais seulement caché par une méthode d'observation. L'observation  $\mathbf{Y}$  est liée à l'état par l'opérateur d'observation  $\mathbb{H}$ . On considère  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$  l'état du sujet considéré et  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^M$  l'observation qu'on en fait. Le problème consiste à chercher une estimation de  $\mathbf{X}$  fonction de  $\mathbf{Y}$  la plus vraisemblable ou la meilleure :  $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})$ .

#### 2.2.1.1 Méthode des moindres carrés

On considère un opérateur d'observation  $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{N \times M}$  linéaire auquel est associée une erreur de mesure  $\epsilon_{\mathbb{H}}$  décrivant la relation :

$$\mathbf{Y} = \mathbb{H}\mathbf{X} + \epsilon_{\mathbb{H}}. \quad (2.14)$$

La meilleure estimation possible est celle proposant une erreur d'observation nulle  $\epsilon_{\mathbb{H}} = 0$ , autorisant ainsi un calcul direct par inversion de  $\mathbb{H}$ . Cependant, la matrice d'observation n'est dans le cas général pas inversible (i.e.  $N \neq M$ ), et faute de pouvoir annuler  $\epsilon_{\mathbb{H}}$ , on cherche à minimiser ce dernier en en exprimant d'abord le coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\epsilon_{\mathbb{H}}\|^2, \quad (2.15)$$

la définition de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  se trouvant en section E.1. En développant cette fonction coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbb{H}\mathbf{X}\|^2, \quad (2.16)$$

on arrive à l'expression de son gradient :

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{X}) = -\mathbb{H}^T(\mathbf{Y} - \mathbb{H}\mathbf{X}). \quad (2.17)$$

La valeur de  $\mathbf{X}$  annulant ce gradient est alors considérée comme l'état le plus vraisemblable, puisque minimisant  $\mathcal{J}$ , et est par conséquent considéré comme l'estimation  $\hat{\mathbf{X}}$  :

$$\mathbb{H}^T(\mathbf{Y} - \mathbb{H}\hat{\mathbf{X}}) = 0, \quad (2.18)$$

ce qui nous donne, par la pseudo-inverse de Moore-Penrose, l'expression de l'estimation :

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbb{H}^T\mathbb{H})^{-1}\mathbb{H}^T\mathbf{Y}. \quad (2.19)$$

Une schématisation dérivant de celle du contrôle optimal vue à la figure 2.7(b) est présentée en figure 2.9. Ici, l'absence de système fait que  $\mathbf{X}$  est aussi une variable de contrôle optimal.



FIGURE 2.9 – Schéma du processus de résolution par méthode des moindres carrés. L'absence de système se traduit par un composant unitaire.

Dans le cas où la mesure est pondérée par un facteur d'incertitude, on introduit la matrice de confiance en l'observation  $\mathbf{Y}$  : la matrice de covariance d'erreur  $R \in \mathbb{R}^{M \times M}$  sur  $\epsilon_{\mathbb{H}}$ . Cette covariance permet de donner un degré de confiance divers sur les composantes de  $\mathbf{Y}$ , et de corrélérer leur vraisemblance entre elles lorsque  $R$  n'est pas purement diagonale. La fonction coût devient :

$$\mathcal{J}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbb{H}\mathbf{X}\|_{R^{-1}}^2, \quad (2.20)$$

et en reprenant les mêmes développements que précédemment, on obtient l'expression de l'estimation :

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbb{H}^T R^{-1} \mathbb{H})^{-1} R^{-1} \mathbb{H}^T \mathbf{Y}. \quad (2.21)$$

### 2.2.1.2 Méthode des moindres carrés non linéaire

Dans le cas où l'opérateur d'observation n'est pas linéaire, il n'est pas possible d'obtenir une expression directe de l'estimation. En effet l'équation d'observation :

$$\mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\mathbb{H}}, \quad (2.22)$$

et sa fonction coût associée :

$$\mathcal{J}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}))^T (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), \quad (2.23)$$

donnent le gradient de  $\mathcal{J}$  :

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{X}) = -\nabla \mathbb{H}(\mathbf{X})^T (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), \quad (2.24)$$

dont l'annulation :

$$\nabla \mathbb{H}(\hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\hat{\mathbf{X}})) = 0, \quad (2.25)$$

ne permet pas de déduire de manière explicite  $\hat{\mathbf{X}}$ . On procède alors à la linéarisation de  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  autour d'un état estimé  $\bar{\mathbf{X}}$  :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}}) + \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}}) d\mathbf{X}, \quad (2.26)$$

avec  $d\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}$ . On obtient ainsi par multiplication par  $\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}})$ , et en utilisant le fait que  $\mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X})$  :

$$d\mathbf{X} = (\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}})^T \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}}))^{-1} \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}})^T (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\bar{\mathbf{X}})) \quad (2.27)$$

La résolution du problème se fait itérativement tel qu'illustré en figure 2.10. Il est possible d'ajouter un gain au contrôleur optimal représenté afin de pouvoir modifier la vitesse de descente de gradient. Cette méthode est donc sujette aux problèmes de minimum locaux, de stabilité, et de divergence, et peut selon les cas s'avérer délicate à mettre en pratique. La covariance d'observation vue dans le cas linéaire, qui peut ici aussi s'exprimer, joue un rôle important quant à la vitesse de convergence et la solution obtenue.

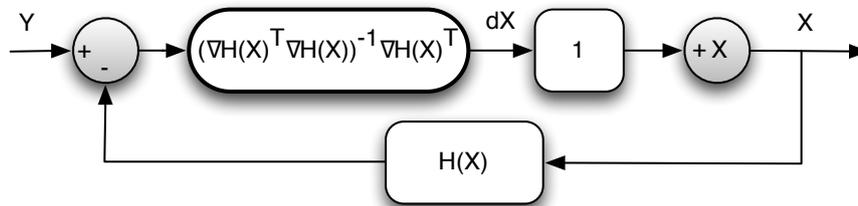


FIGURE 2.10 – Schéma du processus de résolution par méthode des moindres carrés non linéaire. Le composant d'addition d'état traduit une résolution itérative et progressive sous réserve de convergence.

## 2.2.2 Méthodes statistiques

Par opposition aux méthodes déterministes vues précédemment, les méthodes stochastiques reposent sur une estimation statistique de l'état caché. Elles sont basées sur la notion de probabilité d'existence d'un évènement lorsque un (ou plusieurs) évènement(s) existe(nt), et s'appuient le plus souvent sur une théorie bayésienne. Les méthodes stochastiques permettent d'intégrer de ce fait des contraintes diverses comme la correspondance avec un système dirigé par un modèle. Le fait que l'état respecte une loi ou un modèle d'évolution est en effet une contrainte que la méthode des moindres carrés n'est pas apte à prendre en compte puisque uniquement capable d'estimer ponctuellement un état  $\mathbf{X}_n$ , selon une contrainte  $\mathbf{Y}_n$ .

### 2.2.2.1 Approche bayésienne

Ici, nous abordons les généralités du formalisme bayésien. Plutôt que d'estimer directement un état  $\hat{\mathbf{X}}$ , l'approche bayésienne étudie l'estimation  $\hat{\mathbf{X}}$  la plus probable. Le problème d'estimation revient à étudier la loi de probabilité :

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}), \quad (2.28)$$

se traduisant comme la probabilité d'existence d'un état  $\mathbf{X}$  sous condition d'existence d'une observation  $\mathbf{Y}$ . La loi de Bayes permet de réécrire cette loi de probabilité sous la forme suivante :

$$p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y} | \mathbf{X})p(\mathbf{X})}{p(\mathbf{Y})}. \quad (2.29)$$

L'estimation la plus probable se traduit par l'espérance de  $p(\mathbf{X} | \mathbf{Y})$  :

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbb{E}[\mathbf{X} | \mathbf{Y}] = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{X} dp. \quad (2.30)$$

Cette expression traduit ainsi le compromis existant entre un état  $\mathbf{X}$ , potentiellement dirigé par un modèle, et une observation  $\mathbf{Y}$  du phénomène modélisé. Voyons maintenant comment un modèle et des observations sont utilisés par des approches statistiques.

### 2.2.2.2 Filtre de Kalman linéaire

Le filtre de Kalman [58] (KF) propose de suivre l'état d'un sujet dirigé par un modèle  $\mathbb{M}$  d'un phénomène pour lequel des observations  $\mathbf{Y}$  sont disponibles de manière séquentielle. Ce filtre permet ainsi de concilier la prédiction qui peut être faite d'un phénomène grâce à sa modélisation, avec une observation courante incertaine (voir figure 2.11). Historiquement, ce filtre a entre autres trouvé des applications dans le domaine des radars suivant des corps mobiles.

On considère ainsi le système séquentiel suivant comprenant un modèle évolutif, une contrainte d'initialisation et des observations, tous trois incertains :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}_n \mathbf{X}_n + (\epsilon_{\mathbb{M}})_n, & (2.31a) \\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0, & (2.31b) \\ \mathbf{Y}_n = \mathbb{H}_n \mathbf{X}_n + (\epsilon_{\mathbb{H}})_n, & (2.31c) \end{cases}$$

où les bruits blancs gaussiens  $(\epsilon_{\mathbb{M}})_n$ ,  $\epsilon_0$  et  $(\epsilon_{\mathbb{H}})_n$  sont respectivement associés aux matrices de covariance d'erreur du modèle  $Q_n$ , de la condition initiale  $B_0$  et de l'observation  $R_n$ , et  $n \in \mathbb{N} \cap n < N_t$ .

Cette méthode est séquentielle car chaque évolution d'état estimé  $\hat{\mathbf{X}}_n \rightarrow \hat{\mathbf{X}}_{n+1}$  utilise de manière explicite uniquement les données disponibles à l'étape  $n$ . L'état estimé se décompose en une composante de prédiction et une autre dite d'innovation. Cette expression se lit :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1} = \underbrace{\hat{\mathbf{X}}_{n+1|n}}_{\text{prédiction}} + \underbrace{\Delta \hat{\mathbf{X}}_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1})}_{\text{innovation}}, \quad (2.32)$$

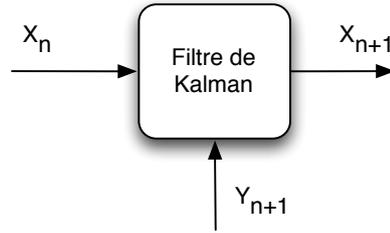


FIGURE 2.11 – Schéma conceptuel du filtrage de Kalman.

accompagnée de l'évolution de la covariance d'état :

$$B_{n+1} = \underbrace{B_{n+1|n}}_{\text{prédiction}} - \underbrace{\Delta B_{n+1}}_{\text{innovation}}. \quad (2.33)$$

Cette méthode peut être considérée comme localement optimale dans le temps dans la mesure où l'étape d'innovation se charge de minimiser à chaque étape  $n + 1$  l'erreur sur le système 2.31. Le filtre de Kalman nécessite de calculer successivement les expressions suivantes.

**L'étape de prédiction :**

La prédiction de l'état estimé est :

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1|n} = \mathbb{M}_n \hat{\mathbf{X}}_n, \quad (2.34)$$

et celle de la covariance d'état est :

$$B_{n+1|n} = Q_n + \mathbb{M}_n B_n \mathbb{M}_n^T. \quad (2.35)$$

**L'étape d'innovation :**

L'innovation sur l'état estimé est :

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1}) = K_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbb{H}_{n+1} \hat{\mathbf{X}}_{n+1|n}), \quad (2.36)$$

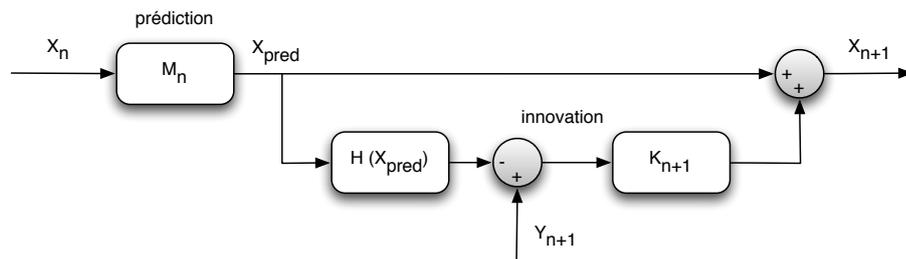
et celle sur la covariance d'état est :

$$\Delta B_{n+1} = K_{n+1} \mathbb{H}_{n+1} B_{n+1|n}, \quad (2.37)$$

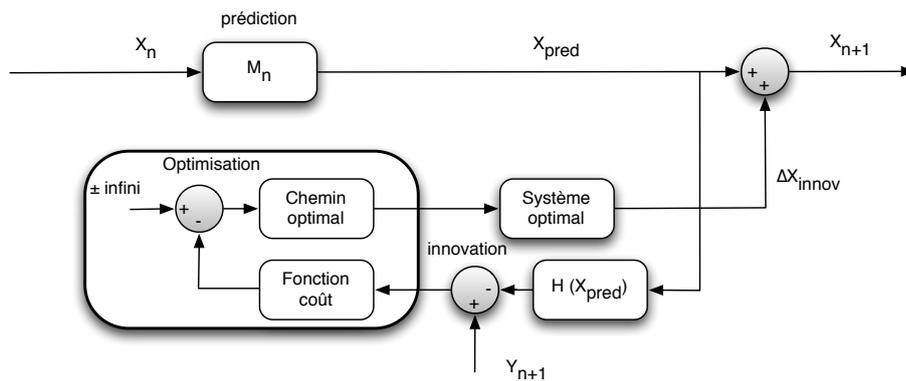
où  $K$  est le gain de Kalman, obtenu par l'équation suivante :

$$K_{n+1} = \underbrace{B_{n+1|n}}_{\text{Système optimal}} \underbrace{\mathbb{H}_{n+1}^T (R_{n+1} + \mathbb{H}_{n+1} B_{n+1|n} \mathbb{H}_{n+1}^T)^{-1}}_{\text{Chemin optimal}}, \quad (2.38)$$

qui fait office de contrôleur optimal. La schématisation du filtre de Kalman est présentée en figure 2.12.



(a) Schéma procédural.



(b) Schéma procédural au sens de l'optimisation. On reconnaît dans la partie inférieure qu'est l'innovation la représentation du contrôle optimal sous contrainte. Le contenu du chemin et système optimal sont donnés dans l'équation 2.38.

FIGURE 2.12 – Schéma de la procédure de filtrage de Kalman. La fonction coût d'optimisation dépend de  $\epsilon_M$  et  $\epsilon_H$  qui à chaque étape  $n$  est minimisée par le chemin et le système optimal que sont le gain de Kalman  $K_n$ .

### 2.2.2.3 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu (ou EKF) est la déclinaison non linéaire du filtre KF. Le système à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}_n(\mathbf{X}_n) + (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{M}})_n, & (2.39a) \\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \boldsymbol{\epsilon}_0, & (2.39b) \\ \mathbf{Y}_n = \mathbb{H}_n(\mathbf{X}_n) + (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{H}})_n. & (2.39c) \end{cases}$$

Par rapport au cas linéaire, les opérateurs  $\mathbb{M}_n$  et  $\mathbb{H}_n$  utilisés pour le calcul des covariances sont remplacés par leur linéarisation respectives, aussi appelées matrices Jacobiennes,  $\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M}_n$  et  $\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{H}_n$ . La procédure vue précédemment s'applique alors de manière itérative autour d'une solution courante jusqu'à convergence.

### 2.2.2.4 Lissage de Kalman

Dans la perspective du suivi d'un état *a posteriori* des observations, il est possible d'utiliser le lissage de Kalman pour déterminer une estimation optimale de l'état  $\mathbf{X}_n$  en ayant connaissance de toutes les observations  $\mathbf{Y}_{1:N_t}$ . Cette estimation s'exprime  $\hat{\mathbf{X}}_n = \mathbb{E}[\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:N_t}]$ . Pour ce faire, un filtrage « avant » et un filtrage « arrière » sont effectués. Le filtrage avant procure une estimation  $\hat{\mathbf{X}}_n^{\rightarrow} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{1:n}]$ , et correspond au filtrage vu précédemment. Le filtrage arrière procure lui une estimation  $\hat{\mathbf{X}}_n^{\leftarrow} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{n+1:N_t}]$ . La combinaison de ces deux estimations permet d'accéder à l'estimé global optimal en utilisant leur moyenne pondérée par leur covariance  $B_n^{\rightarrow}$  et  $B_n^{\leftarrow}$  :

$$\hat{\mathbf{X}}_n = (B_n^{\rightarrow} + B_n^{\leftarrow})^{-1}(B_n^{\rightarrow}\hat{\mathbf{X}}_n^{\rightarrow} + B_n^{\leftarrow}\hat{\mathbf{X}}_n^{\leftarrow}). \quad (2.40)$$

### 2.2.2.5 Filtre de Kalman d'ensemble

Nous avons vu que le filtre de Kalman étendu est capable de répondre à la problématique d'estimation par suivi pour des modèles faiblement non linéaires. Seulement en pratique, beaucoup de modèles physiques exhibent de fortes non-linéarités. Pour ne citer qu'eux, les phénomènes météorologiques et océanographiques comportent des dynamiques fortement non linéaires. En effectuant un tirage de Monte-Carlo, il est possible de suivre non plus un seul, mais plusieurs sujets qui constituent ainsi un *ensemble* artificiel d'états suivis. Cet ensemble fournit alors une distribution de probabilité empirique de la trajectoire du sujet [32], de laquelle l'espérance donne la trajectoire la plus probable. Ce filtrage est alors appelé filtre de Kalman d'ensemble (EnKF).

Pour chaque membre ( $i$ ) de l'ensemble, l'état prédit  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)}$  est obtenu grâce au modèle et l'innovation grâce à l'observation, comme pour le filtre de Kalman classique. Cependant, le gain de Kalman s'appuie ici sur l'ensemble des états  $\hat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)}$ , et est appliqué identiquement à chaque étape  $n$  à toutes les innovations des membres ( $i$ ).

On se place ici dans le cadre d'un modèle évidemment non linéaire, et d'un opérateur

d'observation linéaire pour faciliter la présentation.

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{M}_n(\mathbf{X}_n) + (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{M}})_n & (2.41a) \\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \boldsymbol{\epsilon}_0 & (2.41b) \\ \mathbf{Y}_n = \mathbb{H}_n \mathbf{X}_n + (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{H}})_n & (2.41c) \end{cases}$$

La première variable aléatoire à subir un tirage de Monte-Carlo est l'erreur d'initialisation  $\boldsymbol{\epsilon}_0$ . Un tirage de  $P$  membres, aussi appelées particules, est effectué. Ce tirage se fait souvent selon une loi normale gaussienne autour d'un *a priori* sur l'état initial  $\mathbf{X}_0$ . Chacune des particules se voit alors affecter une certaine erreur d'initialisation  $\boldsymbol{\epsilon}_0^{(i)}$ , et une estimation associée  $\widehat{\mathbf{X}}_0^{(i)}$ . Chaque particule ( $i$ ) est ensuite propagée selon le modèle,

$$\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)} = \mathbb{M}_n(\widehat{\mathbf{X}}_n^{(i)}) + (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{M}})_n^{(i)}, \quad (2.42)$$

où  $(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{M}})_n^{(i)}$  est réalisé sur la base d'une loi normale gaussienne de variance  $Q_n$ , à chaque étape  $n$  et pour toutes les particules ( $i$ ). Il est à noter que la répartition prédite des particules  $\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)}$  ne suit une loi gaussienne que si la répartition précédente en suivait déjà une (donc par récursivité  $\boldsymbol{\epsilon}_0^{(i)}$  aussi), et que le modèle est linéaire. Cependant, nous considérons ici un modèle non linéaire, par conséquent le filtre de Kalman n'est en théorie plus applicable. Malgré cela, la méthode produit de bonnes performances dans des applications à des dynamiques fortement non linéaires et à grand espace d'état telles que les phénomènes géophysiques. Le degré de non-linéarité se retrouve d'une certaine manière dans la covariance d'ensemble prédite de l'état  $B_{n+1|n}^e$ , calculée cette fois ci grâce à la répartition des particules à l'étape  $n + 1$ . Celle-ci est calculée en utilisant d'abord une particule moyenne définie telle que :

$$\overline{\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}} = \frac{\sum_{i=1}^P \widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)}}{P}, \quad (2.43)$$

permettant ainsi de calculer la covariance d'ensemble prédite grâce à l'expression :

$$B_{n+1|n}^e = \frac{\sum_{i=1}^P (\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)} - \overline{\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}}) \otimes (\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)} - \overline{\widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}})}{P - 1}. \quad (2.44)$$

En vue de l'étape d'innovation, il est alors possible de définir un gain de Kalman d'ensemble, basé sur l'expression classique du filtre de Kalman vu en section 2.2.2.2 :

$$K_{n+1} = B_{n+1|n}^e \mathbb{H}_{n+1}^T (R_{n+1} + \mathbb{H}_{n+1} B_{n+1|n}^e \mathbb{H}_{n+1}^T)^{-1}. \quad (2.45)$$

L'utilisation de ce gain peut se faire encore de la même manière. Cependant, il a été montré [16] que perturber l'observation  $\mathbf{Y}_{n+1}^{(i)}$  par un tirage sur le bruit  $(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{H}})_n^{(i)}$  permet davantage de rester dans le cadre gaussien et ainsi conserver la validité des hypothèses sur lesquelles se base le filtre de Kalman classique. L'étape d'innovation se traduit par conséquent par l'équation suivante :

$$\Delta \widehat{\mathbf{X}}_{n+1}^{(i)}(\mathbf{Y}_{n+1}) = K_{n+1}(\mathbf{Y}_{n+1} + (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbb{H}})_n^{(i)} - \mathbb{H}_{n+1} \widehat{\mathbf{X}}_{n+1|n}^{(i)}). \quad (2.46)$$

Il existe nombre de variantes du filtre de Kalman, notamment le filtre dit *inodore*, ou *unscented*. Ces méthodes s'appuient cependant sur des hypothèses potentiellement contraignantes, comme le type de perturbation que subissent le modèle et l'observation. Nous renvoyons le lecteur vers [5, 94] pour plus de détails sur ces méthodes.

### 2.2.2.6 Filtre particulaire

Le filtre particulaire reprend la notion d'ensemble du filtre de Kalman d'ensemble, mais élargit son spectre d'applications en proposant cette fois-ci de prendre en compte des bruits non additifs et non Gaussiens. Il est ainsi possible de s'affranchir des hypothèses précédentes sur la loi de filtrage, en autorisant notamment des lois multimodales. L'idée principale du filtre est de contrôler l'importance des particules par confrontation aux observations afin de déterminer séquentiellement lesquelles sont les plus aptes à proposer une estimation optimale de la trajectoire du sujet.

**Approche bayésienne** Grâce à la loi de Bayes, il est possible d'obtenir une expression récursive de l'expression de la probabilité de la trajectoire  $\mathbf{X}_{0:n}$  sous condition des observations  $\mathbf{Y}_{0:n}$  :

$$p(\mathbf{X}_{0:n} | \mathbf{Y}_{0:n}) = p(\mathbf{X}_{0:n-1} | \mathbf{Y}_{0:n-1}) \underbrace{\frac{\overbrace{p(\mathbf{Y}_n | \mathbf{X}_n)}^{\text{Probabilité d'observation}} \overbrace{p(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n-1})}^{\text{Probabilité d'évolution}}}{p(\mathbf{Y}_n | \mathbf{Y}_{0:n-1})}}_{\text{Loi de filtrage}}. \quad (2.47)$$

L'évaluation de la loi de filtrage s'effectue par échantillonnage et par un tirage de Monte-Carlo. Il en va de même pour l'initialisation de la récursivité où l'on recherche alors à déterminer  $p(\mathbf{X}_0 | \mathbf{Y}_0)$ .

Nous noterons  $p((\epsilon_{\mathbb{M}})_n)$  la loi de probabilité associée à l'erreur  $(\epsilon_{\mathbb{M}})_n$ ,  $p(\epsilon_0)$  celle associée à  $\epsilon_0$  et enfin  $p((\epsilon_{\mathbb{H}})_n)$  celle associée à  $(\epsilon_{\mathbb{H}})_n$ . Le tirage  $i$  d'une valeur selon une loi de probabilité sera lui exprimé tel que :  $\epsilon_0^{(i)} \sim p(\epsilon_0)$ .

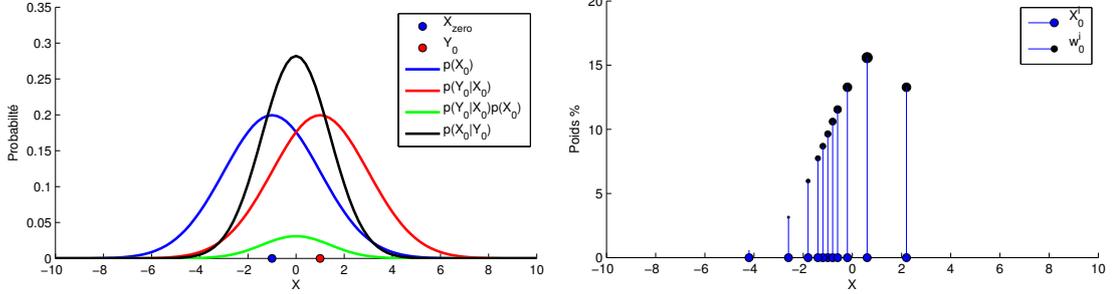
**Loi d'initialisation** La loi de probabilité d'initialisation, grâce à la loi de Bayes, peut être exprimée comme suit :

$$p(\mathbf{X}_0 | \mathbf{Y}_0) = \frac{p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0)p(\mathbf{X}_0)}{p(\mathbf{Y}_0)}. \quad (2.48)$$

L'application discrète de cette loi par tirages de Monte-Carlo peut se décomposer en plusieurs étapes.

- Pour commencer, nous considérons la loi  $p(\mathbf{X}_0)$ . Pour chaque particule  $i$ , une valeur  $\mathbf{X}_0^{(i)}$  est déterminée par tirage de  $\epsilon_0^{(i)} \sim p(\epsilon_0)$ .
- La loi  $p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0)$  correspond elle à la vraisemblance de  $\mathbf{X}_0$  par rapport à  $\mathbf{Y}_0$  qui témoigne de la probabilité d'un certain écart entre  $\mathbf{Y}_0$  et  $\mathbb{H}_0(\mathbf{X}_0)$ , autrement dit :  $p(\epsilon_0)$ . Cette vraisemblance se traduit par un poids  $w_0^{(i)}$  donné à chaque particule.
- La loi  $p(\mathbf{Y}_0)$  est homogène puisque n'importe quelle observation peut être faite. La loi caractérise alors une normalisation de  $p(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{X}_0)p(\mathbf{X}_0)$ , et donc une normalisation des poids  $w_0^{(i)}$  par  $\sum_{j=1}^P w_0^{(j)}$ .

Un exemple d'initialisation est proposé en figure 2.13(a) illustrant l'utilisation de ces lois. Passons maintenant à l'expression de la loi de filtrage.



(a) Détermination de  $p(\mathbf{X}_0 | \mathbf{Y}_0)$  par la loi de Bayes. (b) Tirages de Monte-Carlo de  $\mathbf{X}_0^{(i)} = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0^{(i)}$  et poids  $w_0^{(i)}$  des particules donnant une estimation discrète de  $p(\mathbf{X}_0 | \mathbf{Y}_0)$ .  $P = 11$  particules sont tirées.

FIGURE 2.13 – Exemple d'initialisation du filtrage particulaire pour  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$ . Les bruits  $\epsilon_0$  et  $(\epsilon_{\mathbb{H}})_0$  sont identiques et gaussiens. L'opérateur d'observation est ici défini par :  $\mathbb{H}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ .

**Loi de filtrage** Nous nous intéressons maintenant à la loi de probabilité de filtrage présentée dans l'équation 2.47.

- Nous considérons la loi de probabilité d'évolution  $p(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n-1})$ . Pour chaque particule  $i$ , une valeur est déterminée par tirage de  $(\epsilon_{\mathbb{M}})_{n-1}^{(i)} \sim p((\epsilon_{\mathbb{M}})_{n-1})$  et propagation du modèle :  $\mathbf{X}_{n|n-1}^{(i)} = \mathbb{M}_{n-1}(\mathbf{X}_{n-1}) + (\epsilon_{\mathbb{M}})_{n-1}^{(i)}$ .
- La loi de probabilité d'observation  $p(\mathbf{Y}_n | \mathbf{X}_n)$  octroie un nouveau poids  $w_n^{(i)}$  aux particules.
- Enfin, les poids sont normalisés.

On constate que la seule différence entre la loi de probabilité d'initialisation et la loi de filtrage concerne  $p(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n-1})$  qui remplace  $p(\mathbf{X}_0)$  pour le tirage séquentiel de Monte-Carlo.

### Rééchantillonnage :

L'utilisation récursive de la loi pose le problème de l'interprétation de  $p(\mathbf{X}_{0:n-1} | \mathbf{Y}_{0:n-1})$ . En effet, les poids  $w_{n-1}^{(i)}$  ne permettent d'en obtenir qu'une estimation discrète. Une méthode couramment utilisée est le filtre *bootstrap*, aussi appelé méthode *Sequential Importance Resampling* (SIR), qui propose de traduire la probabilité  $p(\mathbf{X}_{0:n-1} | \mathbf{Y}_{0:n-1})$  par un rééchantillonnage des particules en se basant sur leurs poids. L'idée est de tirer  $P$  nouvelles particules  $\tilde{\mathbf{X}}_{n-1}^{(i)}$  parmi celles existantes en pondérant leur probabilité de tirage par  $w_{n-1}^{(i)}$  selon la loi :

$$\tilde{\mathbf{X}}_{n-1}^{(i)} \sim \sum_{j=1}^P w_{n-1}^{(j)} \delta_{\mathbf{X}_{n-1}^{(j)}}, \quad (2.49)$$

et de remplacer les particules par celles tirées :

$$\mathbf{X}_{n-1}^{(i)} = \tilde{\mathbf{X}}_{n-1}^{(i)}. \quad (2.50)$$

Une illustration de cette méthode de rééchantillonnage pour  $n = 1$  reprenant l'exemple de la figure 2.13 est proposée en figure 2.14. On peut voir plus particulièrement que l'évaluation de la densité de particules obtenue (figure 2.14(b)) s'approche de l'expression analytique  $p(\mathbf{X}_0 | \mathbf{Y}_0)$  vue plus tôt (figure 2.13(a)).

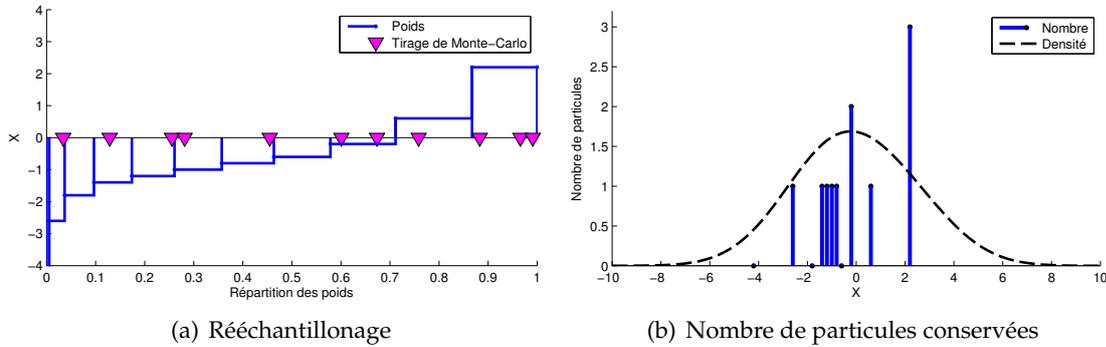


FIGURE 2.14 – Exemple de rééchantillonnage *bootstrap*.

Cette étape de rééchantillonnage est donc cruciale, car elle est la seule à répercuter les observations sur les trajectoires [30]. Le poids des particules, attestant de leur pertinence vis-à-vis des observations, est en effet uniquement utilisé à cette occasion. L'omission du rééchantillonnage reviendrait à simuler indépendamment la trajectoire de  $P$  particules générées à l'initialisation, sans aucun lien avec les observations. Cette étape n'est pour autant pas non plus systématiquement nécessaire. Il convient de rééchantillonner essentiellement lorsque la répartition des poids est très inégale (contrairement au cas présenté dans la figure 2.13(b) où elle est qualitativement régulière). Il arrive en effet fréquemment que quelques unes, voire une seule, des particules concentrent tout le poids. Le rééchantillonnage permet de remédier à ce problème de dégénérescence des poids en abandonnant les particules devenues extrêmement peu probables, et en concentrant les ressources de calcul sur la ou les quelques particules devenues seules « candidates » crédibles. Il existe plusieurs méthodes permettant de quantifier le degré de dégénérescence des poids, parmi lesquelles on trouve le critère d'efficacité :

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{1}{P \sum_{i=1}^P (w_n^{(i)})^2}. \quad (2.51)$$

Si  $\alpha_{\text{eff}} = 1$ , tous les poids ont la même valeur et la répartition est alors considérée comme optimale. A l'inverse, si  $\alpha_{\text{eff}}$  tend vers 0, la dégénérescence augmente.

Pour plus de détail sur le filtrage particulaire, on pourra se référer à [29, 28].

### 2.2.2.7 Lissage particulaire

Nous savons qu'il est possible d'estimer la trajectoire de  $\mathbf{X}$  au fil des observations  $\mathbf{Y}_n$  grâce au filtrage particulaire. En restant dans le même cadre, il est aussi possible d'utiliser la méthode pour faire du lissage [28], c'est à dire estimer la probabilité de la trajectoire de  $\mathbf{X}$  connaissant toutes les observations, à la fois passées et à venir. Plusieurs techniques permettent cette estimation, dont la technique de filtrage « avant-arrière » présentée ci-dessous.

**Approche bayésienne** La loi de Bayes permet de décomposer la probabilité de cette trajectoire de la façon suivante :

$$p(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:N}) = p(\mathbf{X}_N | \mathbf{Y}_{0:N}) \prod_{n=0}^{N-1} p(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{Y}_{0:N}), \quad (2.52)$$

$$= p(\mathbf{X}_N | \mathbf{Y}_{0:N}) \prod_{n=0}^{N-1} p(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{Y}_{0:n}). \quad (2.53)$$

Une estimation de la loi  $p(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:N})$  peut être obtenue à l'issue d'un filtrage particulière avant. L'autre partie peut être déduite par la décomposition suivante :

$$p(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{Y}_{0:n}) = \frac{p(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{X}_n) p(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:n})}{p(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{Y}_{0:n})}, \quad (2.54)$$

où la aussi  $p(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:n})$  provient du filtrage avant. Pour finir la loi de lissage est définie par :

$$p(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:N}) = p(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:n}) \int \frac{p(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{X}_n)}{p(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{Y}_{0:N})} p(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{Y}_{0:N}) d\mathbf{X}_{n+1}. \quad (2.55)$$

**Estimation par méthode de Monte-Carlo** Dans le contexte d'estimation par tirage de Monte-Carlo, les lois de filtrage précédentes peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\hat{p}(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:n}) = \sum_{i=1}^P w_n^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_n^{(i)}}(\mathbf{X}_n), \quad (2.56)$$

ainsi que :

$$\hat{p}(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{Y}_{0:n}) = \sum_{i=1}^P \frac{w_n^{(i)} p(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{X}_n^{(i)}) \delta_{\mathbf{X}_n^{(i)}}(\mathbf{X}_n)}{\sum_{j=1}^P w_n^{(j)} p(\mathbf{X}_{n+1} | \mathbf{X}_n^{(j)})}. \quad (2.57)$$

Le lissage s'exprime lui tel que :

$$\hat{p}(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:N}) = \sum_{i=1}^P w_{n|N}^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_n^{(i)}}(\mathbf{X}_n), \quad (2.58)$$

et en insérant l'équation 2.58 dans l'équation 2.55, on obtient :

$$\hat{p}(\mathbf{X}_n | \mathbf{Y}_{0:N}) = \sum_{i=1}^P w_n^{(i)} \left[ \sum_{j=1}^P w_{n+1|N}^{(j)} \frac{p(\mathbf{X}_{n+1}^{(j)} | \mathbf{X}_n^{(i)})}{\left[ \sum_{k=1}^P w_n^{(k)} p(\mathbf{X}_{n+1}^{(j)} | \mathbf{X}_n^{(k)}) \right]} \right] \delta_{\mathbf{X}_n^{(i)}}(\mathbf{X}_n). \quad (2.59)$$

On constate que la complexité du lissage particulière est en  $O(P^2)$ , ce qui peut le rendre impraticable si le nombre de particules est grand. C'est en général le cas pour les modèles fortement non linéaires et incertains, comme les modèles géophysiques. On pourra se référer à [110] pour approfondir la problématique de complexité du lissage particulière.

### 2.2.3 Conclusion

Les méthodes d'estimation et de contrôle stochastiques sont puissantes et peuvent résoudre une grande variété de problèmes d'optimisation. Le filtre de Kalman permet par exemple de suivre une trajectoire d'état pour des modèles et observations linéaires, ou faiblement non linéaires. Son extension aux cas non linéaires permet de suivre des états dirigés par des phénomènes plus divers, notamment géophysiques. Cependant la loi de filtrage reste soumise à une hypothèse Gaussienne qui limite les perspectives de suivi dans certains cas. Le filtrage particulaire lève cette limitation en autorisant n'importe quelle loi de filtrage. Dans le cas de la foule, cette ouverture s'avère intéressante puisque ce phénomène présente une grande variété de comportements. Néanmoins, cette méthode se base sur la génération de particules ayant en charge de trouver une trajectoire optimale vis-à-vis de la modélisation et des observations. Dans la mesure où pour la foule, à la fois la modélisation et les observations sont très incertaines, la probabilité de trouver une particule ayant une trajectoire, sinon optimale, acceptable, est réduite. Un autre facteur pénalisant est la taille de l'espace d'état qu'il est possible de suivre. Le nombre d'individus composant une foule complexifie d'autant le rééchantillonnage des particules. Il est effet très peu probable de correctement explorer l'espace d'état avec un nombre de particules atteignant tout juste le nombre d'individus. C'est pour cela que la méthode de filtrage particulaire est le plus souvent réservée à des espaces de relativement faible dimension dans le cas de dynamiques hautement non linéaires.

Etant donné le phénomène que nous cherchons ici à analyser, il est plus approprié de se tourner vers des méthodes capables d'évaluer la direction dans laquelle l'état doit évoluer pour satisfaire le modèle et les observations. Le calcul d'un tel gradient est pourtant *a priori* extrêmement complexe. Les méthodes variationnelles proposent néanmoins une approche permettant d'évaluer à moindre coût calculatoire ce gradient, et d'ainsi contrôler de façon optimale des systèmes à la fois complexes et dirigeant des états de grande dimension comme les foules humaines.

## 2.3 Théorie du contrôle optimal par assimilation variationnelle

### 2.3.1 Introduction

L'assimilation variationnelle dérive du contrôle optimal dont nous avons vu le principe en section 2.1.3.2. Elle consiste en l'estimation de paramètres et contraintes d'un système en accord avec l'état d'un sujet suivi par des observations ponctuelles ou continues. Introduite par F-X. Le Dimet [67], cette méthode a été largement utilisée dans le cadre des problématiques d'estimation d'état sous l'hypothèse de continuité dynamique, notamment pour l'étude de fluides géophysiques [115].

Elle consiste principalement en la détermination d'une trajectoire d'état optimale dans sa globalité sur un intervalle de temps fini  $t \in [t_0, t_f]$ . L'assimilation variationnelle se rapproche ainsi des techniques stochastiques de lissage vues dans la section précédente, et ne permet pas une approche séquentielle. Le terme d'assimilation a pour origine l'objectif de calibration de modèles dynamiques sur la base de données réelles. Les variables à calibrer constituent donc les variables de contrôle. Nous présentons dans cette section le formalisme principal de l'assimilation variationnelle de données. Pour un approfondissement théorique, on pourra se tourner vers [132].

### 2.3.2 Contrôle optimal par contrôle paramétrique d'un modèle

Nous commençons par introduire le formalisme de l'assimilation variationnelle dans le simple cas où l'on ne dispose d'aucun *a priori* sur la valeur de la variable de contrôle du modèle. On considère ici le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}; u) = 0, & (2.60a) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0, & (2.60b) \\ \mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\mathbb{H}}, & (2.60c) \end{cases}$$

où  $u \in \mathbb{R}^U$  est une variable de contrôle quelconque du modèle,  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^N$  une variable de contrôle de la condition initiale, et  $\epsilon_{\mathbb{H}} \in \mathbb{R}^M$  est une erreur de mesure sur l'observation. La fonction coût  $\mathcal{J}$  associée à ce système peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, \epsilon_0) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}(t, u, \epsilon_0))\|_{R^{-1}}^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\epsilon_0\|_{B_0^{-1}}^2 dt, \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  $B_0$  et  $R$  sont les matrices de covariances respectivement associées aux erreurs  $\epsilon_0$ <sup>1</sup> et  $\epsilon_{\mathbb{H}}$ . La définition d'une fonction coût, associée au système 2.60 permet de qualifier ce dernier de *système optimal*, renvoyant à la problématique de *contrôle optimal* dont une schématisation est pour rappel proposée en figure 2.7.

1. Dans un souci d'homogénéité dimensionnelle au sens des unités, on choisit ici d'intégrer également cette erreur (bien qu'elle soit indépendante du temps et donc constante).

Le problème consiste donc à trouver les valeurs  $(u, \epsilon_0)$  minimisant la fonction coût  $\mathcal{J}(u, \epsilon_0)$ . Comme la plupart des méthodes de contrôle optimal, ces valeurs sont déterminées grâce à une descente de gradient. Malheureusement, l'évaluation de ce dernier n'est pas triviale. Considérons par exemple l'expression aux différences finies de  $\nabla \mathcal{J}$  dans une direction de l'espace des variables de contrôle :

$$\nabla \mathcal{J}(u, \epsilon_0) \cdot \begin{bmatrix} e_u \\ e_{\epsilon_0} \end{bmatrix} \simeq \frac{\mathcal{J}(u + \epsilon e_u, \epsilon_0 + \epsilon e_{\epsilon_0}) - \mathcal{J}(u, \epsilon_0)}{\epsilon}, \quad (2.62)$$

où  $\epsilon \in \mathbb{R}$  est une perturbation infinitésimale, et où  $e_u$  et  $e_{\epsilon_0}$  sont des vecteurs unitaires appartenant respectivement au même espace que  $u$  et  $\epsilon_0$ . L'évaluation complète de  $\nabla \mathcal{J}$ , autrement dit dans toutes les directions, requiert ainsi le calcul de  $\mathcal{J}$ , et donc l'intégration du modèle  $\mathbb{M}$ , autant de fois que la taille de l'espace des paramètres de contrôle et de l'espace d'état. De plus, le paramètre de contrôle du modèle peut dépendre du temps, impliquant de prendre aussi en compte les perturbations dans l'espace temporel. Cette méthode d'évaluation du gradient est donc impraticable pour des espaces de grande dimension.

### 2.3.2.1 Méthode adjointe

A la place, la méthode adjointe [67, 72] permet de calculer en une seule intégration du modèle le gradient de la fonction coût, alors qu'une seconde intégration permet de le descendre. Elle se base sur la différenciation de la fonction coût  $\mathcal{J}$  et du système dynamique.

La différenciation de  $\mathcal{J}$  donne :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle = - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}), (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H}) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \delta u \right\rangle_{R^{-1}} dt \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_0}, \delta \epsilon_0 \right\rangle &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}), (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H}) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon_0} \delta \epsilon_0 \right\rangle_{R^{-1}} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \langle \epsilon_0, \delta \epsilon_0 \rangle_{B_0^{-1}} dt, \end{aligned} \quad (2.64)$$

ce qui équivaut à :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle = - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H})^* R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \delta u \right\rangle dt \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_0}, \delta \epsilon_0 \right\rangle &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H})^* R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon_0} \delta \epsilon_0 \right\rangle dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \langle B_0^{-1} \epsilon_0, \delta \epsilon_0 \rangle dt, \end{aligned} \quad (2.66)$$

où l'opérateur adjoint  $(\cdot)^*$  est défini en section E.3.

La différenciation de la dynamique donne elle :

$$\begin{cases} \frac{\partial d\mathbf{X}}{\partial t} + (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{M}) d\mathbf{X} + (\partial_u \mathbb{M}) \delta u = 0, & (2.67a) \\ d\mathbf{X}(t_0) = \delta \epsilon_0, & (2.67b) \end{cases}$$

qui fournit implicitement la variation de la trajectoire d'état<sup>2</sup>  $d\mathbf{X}$  selon les variations de l'état initial  $\delta\epsilon_0$  et du paramètre de contrôle  $\delta u$  que l'on recherche justement. La multiplication de l'équation d'évolution différenciée, l'équation 2.67a, par une variable adjointe  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , et son intégration sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$  donne :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\langle \frac{\partial d\mathbf{X}}{\partial t}, \lambda \right\rangle dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M}) d\mathbf{X}, \lambda \rangle dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u\mathbb{M}) \delta u, \lambda \rangle dt = 0. \quad (2.68)$$

L'intégration par parties du premier terme, avec l'expression adjointe du modèle différencié, donne :

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M})^* \lambda, d\mathbf{X} \right\rangle dt &= \langle \lambda(t_f), d\mathbf{X}(t_f) \rangle - \langle \lambda(t_0), d\mathbf{X}(t_0) \rangle \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u\mathbb{M})^* \lambda, \delta u \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Le lien entre la différenciation de la fonction coût des équations 2.65 et 2.66, avec celle du modèle de l'équation 2.69 se fait alors grâce à la définition du *problème adjoint* qui suppose qu'il existe une trajectoire adjointe de  $\mathbf{X}$  :  $\lambda$ , solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M})^* \lambda = (\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{H})^* R^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), & (2.70a) \\ \lambda(t_f) = 0. & (2.70b) \end{cases}$$

En rappelant que  $d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon_0} \delta \epsilon_0$ , l'hypothèse du système 2.70 permet alors d'obtenir par combinaison :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_0}, \delta \epsilon_0 \right\rangle &= \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u\mathbb{M})^* \lambda, \delta u \rangle dt \\ &- \langle \lambda(t_0), \delta \epsilon_0 \rangle + \int_{t_0}^{t_f} \langle B_0^{-1} \epsilon_0, \delta \epsilon_0 \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Par identification selon la base  $[\delta u, \delta \epsilon_0]$ , on obtient ainsi une expression de la dérivée de la fonction coût.

$$\begin{bmatrix} \partial_u \mathcal{J} \\ \partial_{\epsilon_0} \mathcal{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u\mathbb{M})^* \lambda dt \\ -\lambda(t_0) + T B_0^{-1} \epsilon_0 \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

avec  $T = t_f - t_0$ . On notera que dans le cas où  $u$  est une variable temporelle, la dérivée de la fonction coût selon celle-ci peut s'exprimer telle que :

$$\partial_u \mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u\mathbb{M})^* \lambda dt, \quad (2.73)$$

ce qui est équivalent à l'expression :

$$\partial_u \mathcal{J} = (\partial_u\mathbb{M})^* \lambda, \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (2.74)$$

La solution au problème d'optimalité défini par le système 2.60 consiste alors à annuler le gradient défini par l'équation 2.72, ce qui requiert la connaissance d'une certaine trajectoire adjointe optimale  $\lambda_{\text{opt}}$ .

2. On rappelle que la trajectoire d'une variable est définie en section 2.1.1 et se note  $\underline{x}$ .

### 2.3.2.2 Réflexions sur la variable adjointe

L'annulation du gradient de la fonction coût exprimé dans l'équation 2.72 permet d'écrire la condition d'optimalité suivante :

$$\nabla \mathcal{J}(u, \epsilon_0) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda_{\text{opt}} dt \\ -\lambda_{\text{opt}}(t_0) + T B_0^{-1} \epsilon_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

en précisant que la trajectoire adjointe optimale  $\lambda_{\text{opt}}$  ne dépend que de la trajectoire *innée*  $\underline{\mathbf{X}}^0$  (autrement dit de  $\mathbf{X}_{\text{zero}}$  et  $\mathbb{M}$ ), de la confiance d'observation  $R$  et de l'observation  $\mathbf{Y}$ .

Nous voyons dans l'équation 2.70a que la seule estimation de la trajectoire adjointe dont on dispose dépend de la trajectoire d'état  $\underline{\mathbf{X}}$  à travers la linéarisation du modèle  $\mathbb{M}(\mathbf{X})$  et l'opérateur d'observation  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ . Dans le cas où ces deux opérateurs sont linéaires ou faiblement non linéaires, il est possible d'accéder presque immédiatement à  $\lambda_{\text{opt}}$  puisque leur linéarisés respectifs ne dépendent pas, ou peu, de  $\mathbf{X}$ . Autrement dit, quelle que soit la trajectoire d'état considérée, la trajectoire adjointe obtenue par intégration temporelle de l'équation 2.70a sera la même à un coefficient près.

Dans le cas non linéaire par contre, la trajectoire adjointe  $\lambda$  que l'on obtient dépend de la trajectoire d'état, ne donnant ainsi qu'une estimation locale au sens  $\mathbb{R}^N \times [t_0, t_f]$ , et donc partielle, de  $\lambda_{\text{opt}}$ . L'apprentissage de la trajectoire adjointe optimale doit alors se faire de manière incrémentale par sommation des trajectoires adjointes locales.

Pour cela on considère  $\underline{\mathbf{X}}^k$  comme étant la trajectoire d'état obtenue à partir de  $\lambda_{\text{opt}}^k$  grâce aux équations 2.75, 2.60a, 2.60b, et on considère  $\lambda^k$  comme étant la trajectoire adjointe obtenue à partir de  $\underline{\mathbf{X}}^k$  grâce au système 2.70. L'estimation incrémentale de la trajectoire adjointe optimale s'exprime de la manière suivante :

$$\lambda_{\text{opt}}^k(\underline{\mathbf{X}}^0, R) = \lambda_{\text{opt}}^{k-1}(\underline{\mathbf{X}}^0, R) + \lambda^k(\underline{\mathbf{X}}^k, R), \quad (2.76)$$

qui traduit le fait que  $\lambda_{\text{opt}}$  dépend de la trajectoire d'état d'origine mais en théorie pas du chemin  $\underline{\mathbf{X}}^k$  emprunté contrairement à la pratique itérative.

Finalement, à chaque étape d'apprentissage de la trajectoire adjointe optimale, on suppose que  $\lambda_{\text{opt}}^k = \lambda_{\text{opt}}$ , et on résout :

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda_{\text{opt}}^k dt = 0, & (2.77a) \\ \epsilon_0^k = T^{-1} B_0 \lambda_{\text{opt}}^k(t_0). & (2.77b) \end{cases}$$

Si la seconde équation est triviale, la première s'avère plus délicate à résoudre. Il est en effet ici impossible de déterminer de manière explicite la valeur de  $u_{\text{opt}}^k$  à partir de la trajectoire adjointe optimale. Dans certains cas même,  $(\partial_u \mathbb{M})^*$  ne dépend pas explicitement de  $u$ . A la place, le gradient local de la fonction coût selon  $u$  de l'équation 2.72 est utilisé. Au lieu de calculer directement  $u_{\text{opt}}^k$  à chaque itération donc, on calcule  $du^k$  par descente de gradient grâce à l'expression :

$$du^k = -h(\partial_u \mathcal{J}^k)^T, \text{ avec } \partial_u \mathcal{J}^k = \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda^k dt, \quad (2.78)$$

où  $h \in \mathbb{R}^{U \times U}$  est une matrice correspondant à la vitesse de descente<sup>3</sup> du gradient  $\partial_u \mathcal{J}$ . Il est intéressant de noter que dans le cas où  $\partial_u \mathbb{M} = \bar{K}_N$  avec  $K$  une constante  $\in \mathbb{R}^U$ , l'optimalité  $\partial_u \mathcal{J} = 0 \Leftrightarrow du^k = 0$  implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t_f} \lambda_{\text{opt}} dt = 0, \\ \int_{t_0}^{t_f} \lambda^{k_{\text{opt}}} dt = 0. \end{array} \right. \quad (2.79a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t_f} \lambda^{k_{\text{opt}}} dt = 0. \end{array} \right. \quad (2.79b)$$

### 2.3.2.3 Résolution

La résolution du problème de contrôle optimal par assimilation variationnelle est finalement présenté dans l'algorithme 1, et une illustration de ce problème est proposée en figure 2.15.

**Data** : Trajectoire  $\underline{\mathbf{X}}$

**Result** : Solution optimale du système 2.60

- Intégration de l'équation 2.60a à partir de valeurs données de  $\mathbf{X}_{\text{zero}}$  et  $u$ , avec  $\epsilon_0 = 0$
- Définir nulle la trajectoire adjointe optimale :  $\lambda_{\text{opt}}^0 = 0$

**while** Convergence non atteinte **do**

- Intégration arrière du système 2.70 pour obtenir  $\lambda^k(\underline{\mathbf{X}}^k)$
- Mettre à jour la trajectoire adjointe optimale grâce à l'équation 2.76
- Calculer  $u^k = u^{k-1} + du^k$  grâce à l'équation 2.78, et  $\epsilon_0^k = T^{-1} B_0 \lambda_{\text{opt}}^k(t_0)$
- Mettre à jour  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0^k$
- Intégration de l'équation 2.60a à partir de  $\mathbf{X}(t_0)$  et de la nouvelle valeur  $u^k$

**end**

**Algorithme 1** : Assimilation par contrôle paramétrique d'un modèle

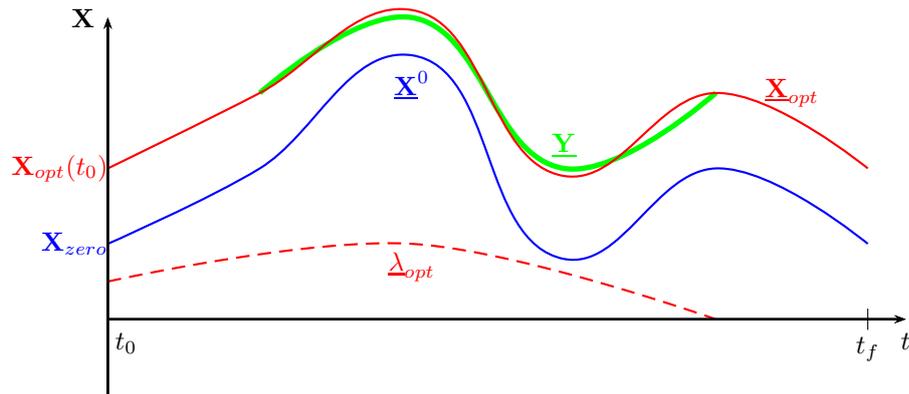


FIGURE 2.15 – Illustration de l'assimilation de données par la méthode adjointe dans le cas où  $\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ .

3. Cette matrice est homogène à la matrice de covariance  $Q$  associée à  $u$  que nous abordons dans la section 2.3.3 à venir.

### 2.3.2.4 Remarque

Dans l'optique de mieux saisir la signification que peut avoir la variable adjointe, il est aussi intéressant de remarquer que si à chaque trajectoire d'état  $\mathbf{X}$ , covariance  $R$  et observation  $\mathbf{Y}$ , correspond une seule et unique trajectoire adjointe optimale  $\underline{\lambda}_{\text{opt}}$ , il est alors possible de supposer l'existence d'un modèle direct d'optimalité  $\mathbb{M}_{\text{opt}}$  tel que :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \lambda_{\text{opt}}}{\partial t} + \mathbb{M}_{\text{opt}}(\lambda_{\text{opt}}; \mathbf{X}, R, \mathbf{Y}) = 0, & (2.80a) \\ \lambda_{\text{opt}}(t_f) = 0. & (2.80b) \end{cases}$$

La différenciation de ce système donne :

$$\begin{cases} -\frac{\partial d\lambda_{\text{opt}}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbb{M}_{\text{opt}}}{\partial \lambda_{\text{opt}}}\right) d\lambda_{\text{opt}} + \left(\frac{\partial \mathbb{M}_{\text{opt}}}{\partial \mathbf{X}}\right) d\mathbf{X} = 0, & (2.81a) \\ d\lambda_{\text{opt}}(t_f) = 0. & (2.81b) \end{cases}$$

En supposant  $d\lambda_{\text{opt}} = \underline{\lambda}$ , et par identification avec le système 2.70, il est alors possible d'écrire :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbb{M}_{\text{opt}}}{\partial \lambda_{\text{opt}}}\right) = \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}}\right)^*, & (2.82a) \\ \left(\frac{\partial \mathbb{M}_{\text{opt}}}{\partial \mathbf{X}}\right) d\mathbf{X} = \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* R^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})). & (2.82b) \end{cases}$$

L'existence et la connaissance d'un tel modèle permettrait en théorie de résoudre en une seule intégration de  $\mathbb{M}_{\text{opt}}$ , puis de  $\mathbb{M}$ , le système d'optimalité.

### 2.3.3 Contrôle optimal par contrôle paramétrique sous pénalité

Dans cette section, une pénalité est ajoutée sur la valeur de la variable de contrôle  $u$ . Elle est ajoutée à la fonction coût de l'équation 2.61 vue dans la partie précédente. Le système optimal reste donc le même :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}; u) = 0, & (2.83a) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0, & (2.83b) \\ \mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\mathbb{H}}, & (2.83c) \end{cases}$$

mais la fonction coût prend désormais en compte un *a priori* sur la valeur de  $u$ , et s'écrit dorénavant :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, \epsilon_0) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}(t, u, \epsilon_0))\|_{R^{-1}}^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\epsilon_0\|_{B_0^{-1}}^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|u - u^0\|_{Q^{-1}}^2 dt, \end{aligned} \quad (2.84)$$

où  $u^0$  est la valeur supposée du paramètre de contrôle. Cette expression de la fonction coût pénalise par conséquent l'écartement de  $u$  par rapport à cette valeur pour laquelle une certaine confiance, témoignée par la matrice de covariance  $Q$ , est accordée. On utilise de nouveau la méthode adjointe vue précédemment, puisque pour les mêmes raisons le gradient de  $\mathcal{J}$  n'est pas accessible à travers une estimation par différences finies. La différenciation de  $\mathcal{J}$  donne ici :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}), (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H}) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \delta u \right\rangle_{R^{-1}} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \langle u - u^0, \delta u \rangle_{Q^{-1}} dt \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_0}, \delta \epsilon_0 \right\rangle &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}), (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H}) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon_0} \delta \epsilon_0 \right\rangle_{R^{-1}} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \langle \epsilon_0, \delta \epsilon_0 \rangle_{B_0^{-1}} dt, \end{aligned} \quad (2.86)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H})^* R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon_{\mathbb{M}}} \delta u \right\rangle dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \langle Q^{-1} (u - u^0), \delta u \rangle dt \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_0}, \delta \epsilon_0 \right\rangle &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{H})^* R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})), \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon_0} \delta \epsilon_0 \right\rangle dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \langle B_0^{-1} \epsilon_0, \delta \epsilon_0 \rangle dt, \end{aligned} \quad (2.88)$$

En procédant de la même manière qu'entre les étapes définies au système 2.67 et à l'équation 2.71, cette dernière est alors remplacée par :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_0}, \delta \epsilon_0 \right\rangle &= \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u \mathbb{M})^* \boldsymbol{\lambda}, \delta u \rangle dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle Q^{-1} (u - u^0), \delta u \rangle dt \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\lambda}(t_0), \delta \epsilon_0 \rangle + \int_{t_0}^{t_f} \langle B_0^{-1} \epsilon_0, \delta \epsilon_0 \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Par identification selon la base  $[\delta u, \delta \epsilon_0]$ , on obtient une expression de la dérivée de la fonction coût.

$$\begin{bmatrix} \partial_u \mathcal{J} \\ \partial_{\epsilon_0} \mathcal{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_f} ((\partial_u \mathbb{M})^* \boldsymbol{\lambda} + Q^{-1} (u - u^0)) dt \\ -\boldsymbol{\lambda}(t_0) + T B_0^{-1} \epsilon_0 \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

La remarque exprimée à l'équation 2.74 s'applique ici aussi. A savoir que si  $u$  est une variable temporelle la dérivée de la fonction coût selon celle-ci peut s'exprimer telle que :

$$\partial_u \mathcal{J} = (\partial_u \mathbb{M})^* \boldsymbol{\lambda} + Q^{-1} (u - u^0), \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (2.91)$$

L'annulation du gradient de la fonction coût exprimé dans l'équation 2.72 permet d'écrire la condition d'optimalité suivante :

$$\nabla \mathcal{J}(u, \epsilon_0) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_f} ((\partial_u \mathbb{M})^* \boldsymbol{\lambda}_{\text{opt}} + Q^{-1} (u - u^0)) dt \\ -\boldsymbol{\lambda}_{\text{opt}}(t_0) + T B_0^{-1} \epsilon_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

La résolution directe de  $\partial_u \mathcal{J} = 0$  n'est pas possible dans le cas où  $u$  est une constante. On procédera alors, là encore, à la méthode de descente de gradient évoquée précédemment à l'équation 2.78. La procédure de résolution reste la même que celle définie dans l'algorithme 1 à l'exception de l'expression de la descente de gradient selon le paramètre contrôle, qui s'appuiera sur l'équation 2.90 et non pas l'équation 2.72.

Nous pouvons cependant voir grâce à l'équation 2.91 qu'un cas de figure intéressant se présente lorsque  $u$  est une variable temporelle et que  $\partial_u \mathbb{M} = \vec{K}_N$ .

### 2.3.4 Cas particulier du contrôle additif temporel

Nous nous penchons ici sur le cas particulier où la variable de contrôle est un bruit additif temporel se traduisant par la relation :

$$\mathbb{M}(\mathbf{X}; u) = \mathbb{M}(\mathbf{X}) - u. \quad (2.93)$$

L'hypothèse sous-jacente à ce type contrôle est que le modèle est imparfait dans sa globalité, la variable de contrôle se chargeant alors d'évaluer le terme source inconnu s'ajoutant au modèle. La variable de contrôle devient alors une contrainte<sup>4</sup> inconnue du modèle nommée  $\epsilon_{\mathbb{M}}$ . Cette méthode de contrôle est caractéristique d'une hypothèse faible sur le modèle puisqu'aucune heuristique n'est proposée sur le paramètre de contrôle. Le système d'optimalité s'écrit par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = \epsilon_{\mathbb{M}}, & (2.94a) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0, & (2.94b) \\ \mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\mathbb{H}}. & (2.94c) \end{cases}$$

Dans la mesure où  $\epsilon_{\mathbb{M}}$  représente la « puissance » additive au modèle, on cherche à minimiser sa valeur. Ceci explique l'absence d'une valeur supposée du paramètre de contrôle puisque l'on a alors  $u^0 = \epsilon_{\mathbb{M}}^0 = 0$ . Il est intéressant d'observer qu'ici, la dérivation du modèle par rapport à la variable de contrôle est de la forme  $\vec{K}_N$  :

$$\partial_{\epsilon_{\mathbb{M}}} \mathbb{M} = -\vec{1}_N, \quad (2.95)$$

avec  $K = -1$ . En reprenant rigoureusement les développements de la section 2.3.3 précédente, et en remplaçant simplement  $u$  par  $\epsilon_{\mathbb{M}}$ , l'expression de l'équation 2.92 devient :

$$\nabla \mathcal{J}(\epsilon_{\mathbb{M}}, \epsilon_0) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_{\text{opt}} + Q^{-1} \epsilon_{\mathbb{M}} \\ -\lambda_{\text{opt}}(t_0) + T B_0^{-1} \epsilon_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

puisque  $\epsilon_{\mathbb{M}}$  est ici une variable temporelle. De ce fait le calcul de la valeur de la variable de contrôle du modèle peut ici être directe, et ne nécessite pas de descente de gradient.

4. Au sens défini à l'équation 2.9

### 2.3.4.1 Résolution

La procédure de résolution du système optimal est définie dans l'algorithme 2.

**Data** : Trajectoire  $\underline{\mathbf{X}}$

**Result** : Solution optimale du système 2.94

– Intégration de l'équation 2.94a à partir de la valeurs donnée de  $\mathbf{X}_{\text{zero}}$ , avec  $\epsilon_M = 0$  et  $\epsilon_0 = 0$

– Définir nulle la trajectoire adjointe optimale :  $\lambda_{\text{opt}}^0 = 0$

**while** Convergence non atteinte **do**

– Intégration arrière du système 2.70 pour obtenir  $\lambda^k(\underline{\mathbf{X}}^k)$

– Mettre à jour la trajectoire adjointe optimale grâce à l'équation 2.76

– Calculer  $\epsilon_M^k = Q\lambda_{\text{opt}}^k \forall t \in [t_0, t_f]$  et  $\epsilon_0^k = T^{-1}B_0\lambda_{\text{opt}}^k(t_0)$

– Mettre à jour  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{zero}} + \epsilon_0^k$

– Intégration de l'équation 2.94a à partir de  $\mathbf{X}(t_0)$  et de la nouvelle trajectoire  $\epsilon_M^k$

**end**

**Algorithme 2** : Assimilation par contrôle paramétrique additif et temporel d'un modèle

La schématisation de l'assimilation par contrôle additif temporel, dérivant de celle de la figure 2.7(a), est présentée en figure 2.16.

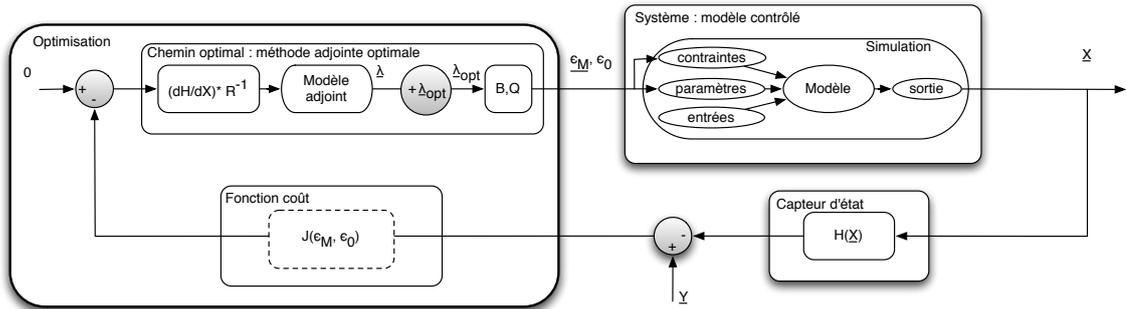


FIGURE 2.16 – Schéma du processus d'assimilation par contrôle additif temporel. Dans le cas où la variable de contrôle n'est pas additive,  $\epsilon_M$  se remplace simplement par  $u$ . Par comparaison avec la figure 2.7(a), on suppose ainsi que  $\nabla \mathcal{J}$  est évalué par l'intégration arrière du modèle linéarisé adjoint de l'équation 2.70, et que la descente de ce gradient est effectuée par l'intégration avant du modèle de l'équation 2.94a.

### 2.3.5 Méthode incrémentale

Une variante aux méthodes de résolution de système optimal vues précédemment est la méthode incrémentale<sup>5</sup>. Sa différence se situe dans l'interprétation de l'annulation du gradient de la fonction coût. Nous avons vu à l'équation 2.75 qu'il existe une trajectoire adjointe optimale permettant d'écrire la relation :

$$f(u_{\text{opt}}, \epsilon_{0\text{opt}}, \lambda_{\text{opt}}) = 0, \quad (2.97)$$

dont l'apprentissage se fait de manière itérative grâce à l'équation 2.76. La méthode incrémentale s'appuie sur la différenciation de cette équation et suppose qu'il est équivalent de

5. On parle aussi de *boucle externe* dans l'approche précédente, et de *boucle interne* pour l'approche incrémentale.

résoudre en lieu et place, si  $f$  est trinéaire, le système suivant :

$$f(du_{\text{opt}}^k, d\epsilon_0^k, d\lambda_{\text{opt}}^k) = 0 \quad \forall k \in [1, k_{\text{opt}}], \quad (2.98)$$

autrement dit :

$$f(du^k, d\epsilon_0^k, \lambda^k) = 0 \quad \forall k \in [1, k_{\text{opt}}]. \quad (2.99)$$

L'utilisation de  $du^k$  et  $d\epsilon_0^k$  se fait alors, non plus par l'intégration du modèle, mais par intégration du modèle linéarisé 2.67, qui fournit un incrément de la trajectoire d'état :  $d\mathbf{X}^k$ . C'est en réalité une méthode de descente de gradient sur  $\underline{\mathbf{X}}$ . Elle repose sur la supposition que si la relation 2.99 est vérifiée (*i.e.* appliquée), alors la relation 2.97 le sera aussi à terme (*i.e.* convergence).

### 2.3.5.1 Résolution

**Data** : Trajectoire  $\underline{\mathbf{X}}$

**Result** : Solution optimale du système 2.94

– Intégration de l'équation 2.94a à partir de la valeur donnée de  $\mathbf{X}_{\text{zero}}$ , avec  $\epsilon_{\mathbb{M}} = 0$  et  $\epsilon_0 = 0$  pour obtenir  $\underline{\mathbf{X}}^0$

**while** Convergence non atteinte **do**

– Intégration arrière du système 2.70 pour obtenir  $\lambda^k(\underline{\mathbf{X}}^k)$

– Calculer  $d\epsilon_{\mathbb{M}}^k = Q\lambda^k \forall t \in [t_0, t_f]$  et  $d\epsilon_0^k = T^{-1}B_0\lambda^k(t_0)$

– Calculer  $d\mathbf{X}(t_0) = d\epsilon_0^k$

– Intégration de l'équation 2.67a à partir de  $d\mathbf{X}(t_0)$  et de la nouvelle trajectoire  $d\epsilon_{\mathbb{M}}^k$  pour obtenir  $d\mathbf{X}^k$

– Incrémenter :  $\underline{\mathbf{X}}^k = \underline{\mathbf{X}}^{k-1} + d\mathbf{X}^k$

**end**

**Algorithme 3** : Exemple de méthode incrémentale pour l'assimilation par contrôle paramétrique additif et temporel d'un modèle

La schématisation de l'assimilation par contrôle additif temporel, dérivant de celle de la figure 2.7(a), est présentée en figure 2.17.

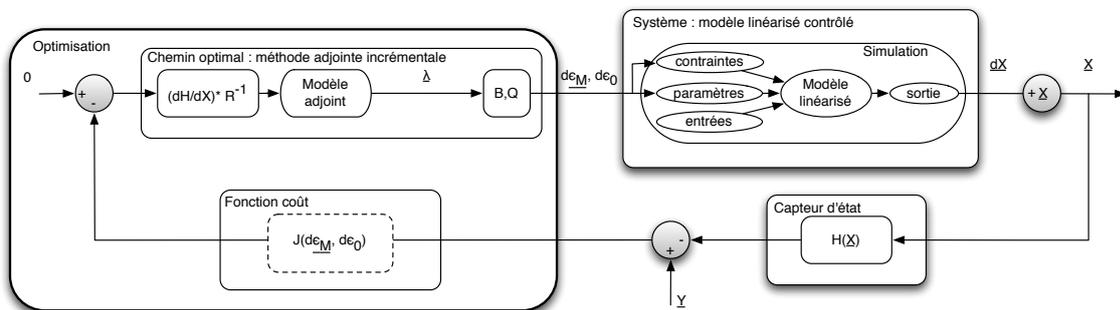


FIGURE 2.17 – Schéma du processus d'assimilation par contrôle additif temporel et incrémental. Dans le cas où la variable de contrôle n'est pas additive,  $d\epsilon_{\mathbb{M}}$  se remplace simplement par  $du$ . Par comparaison avec la figure 2.7(a), on suppose ainsi que  $\nabla \mathcal{J}$  est évalué par l'intégration arrière du modèle linéarisé adjoint de l'équation 2.70, et que la descente de ce gradient est effectuée par l'intégration avant du modèle linéarisé de l'équation 2.67a.

### 2.3.5.2 Remarques

Bien qu'a priori équivalentes, les méthodes d'intégration variationnelle classiques et incrémentales peuvent présenter des différences notables quant aux solutions obtenues. La méthode incrémentale s'appuie en particulier sur une proximité de  $\underline{\mathbf{X}}^k$  à  $\underline{\mathbf{X}}^{k-1}$  à travers  $\partial_{\underline{\mathbf{X}}}\mathbb{M}$ , et donc par récurrence de  $\underline{\mathbf{X}}^k$  à  $\underline{\mathbf{X}}^0$ . Or cette proximité supposée va à l'encontre du principe selon lequel la trajectoire optimale  $\underline{\mathbf{X}}_{\text{opt}}$  est en théorie, et en théorie seulement, indépendante de la trajectoire d'état initiale  $\underline{\mathbf{X}}^0$ . Dans le cas de modèles diffusifs notamment, l'amortissement de  $d\underline{\mathbf{X}}$  peut être important, et la proximité entre trajectoires telle, que la méthode incrémentale est incapable de faire converger  $\underline{\mathbf{X}}^{k=+\infty}$  vers  $\underline{\mathbf{X}}_{\text{opt}}$ . La méthode incrémentale, en tant que méthode de descente de gradient, est en fait particulièrement sujette au problème de minima locaux.

### 2.3.6 Discussion

Au regard des méthodes présentées dans cette section, l'assimilation variationnelle par contrôle additif temporel, malgré le fait qu'elle puisse engendrer un problème de sous-détermination, semble être la méthode la plus robuste pour des modèles de faible confiance. En effet, comme nous l'avons vu en section 2.3.4, elle autorise un ajustement direct total et temporel de ceux-ci. L'utilisation de ce procédé pour l'estimation et le contrôle de foules s'avère par conséquent pertinent puisque il n'existe à l'heure actuelle aucun modèle fiable, ni même de moyen d'en vérifier la fiabilité. L'assimilation variationnelle permet justement d'intervenir de manière quantitative sur ce point.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que les méthodes d'estimation et de contrôle sont nombreuses. Celles permettant de s'appuyer sur l'*a priori* d'une dynamique modélisée et dans le même temps sur des observations présentent chacune des approches et hypothèses spécifiques les dédiant à certaines problématiques. Les méthodes stochastiques, et notamment le filtrage particulaire, se révèlent très puissantes pour l'estimation d'état cachés par des dynamiques et des observations potentiellement très complexes. L'avantage de la méthode particulaire réside dans l'approche probabiliste du problème d'estimation, qui fait appel à un ensemble de particules d'état chargées d'explorer l'espace de solution. Il est ainsi possible en théorie de résoudre n'importe quel problème d'estimation ou de contrôle, quel que soit le degré de non-linéarité de la dynamique ou la confiance qu'on lui attribue. Néanmoins, cette exploration est très coûteuse, et le nombre de particules nécessaires à une exploration significative de l'espace d'état croît très rapidement avec sa taille. Ce point est critique dans le cadre de l'analyse de la foule, qui est souvent représentée par un état de taille importante, et ce quel que soit son type de description, Eulérien ou Lagrangien.

Les méthodes variationnelles se basent elles sur l'évaluation locale du gradient d'une fonction d'énergie sur l'erreur induite par les variables de contrôle. L'assimilation, grâce aux méthodes adjointes, permet ainsi d'évaluer ce gradient pourtant *a priori* difficile à calculer. Elle permet ainsi, contrairement aux méthodes stochastiques, l'estimation et le contrôle pour des espaces d'états de grande dimension. L'assimilation a toutefois plusieurs déclinaisons dont l'application a des conséquences différentes sur la résolution du système optimal dont elle découle. Les déclinaisons incrémentales et non-incrémentales s'opposent en effet sur l'utilisation faite de la variable adjointe servant à calculer le gradient de la fonction d'énergie. La méthode incrémentale propose ainsi d'utiliser localement ce gradient, et de minimiser progressivement l'erreur, l'exposant ainsi fortement aux minimums locaux. La méthode non-incrémentale quant à elle suggère de cumuler tous ces gradients locaux et de les parcourir à chaque itération dans leur intégralité, au risque de s'égarer et de diverger dans le cas de forte non-linéarité de la fonction d'énergie sur l'erreur.

Ces deux déclinaisons de l'assimilation variationnelle comportent donc des forces et des faiblesses, mais restent cependant, et *a priori*, les plus adaptées à l'analyse de la foule.

Dans ce cadre justement, nous souhaitons arriver à plusieurs fins. Pour commencer nous cherchons un moyen de retrouver l'état d'une foule considérée, en faisant ainsi appel à l'estimation par assimilation de données. L'autre objectif est de trouver des leviers pertinents caractérisant le comportement de la foule, ce qui peut s'identifier à la problématique de contrôle. Dans le cas d'un phénomène mal défini comme l'est la foule, ces deux enjeux sont très similaires, et nous serons amenés ici à aborder les manières de les envisager.

Nous avons donc vu comment utiliser en théorie au mieux l'information brute, et incertaine, sur un phénomène donné. Il reste maintenant à définir l'*a priori* d'évolution de ce phénomène. Le modèle, puisque c'est de lui dont il s'agit, tient en effet une place prépondérante dans la grande majorité des techniques d'analyse vues dans ce chapitre. Il concentre la quasi intégralité de l'information dynamique, qui dans notre cas correspond à celle de la foule. La façon dont celle-ci est représentée et modélisée est donc un point critique de l'estimation, et plus largement de l'analyse basée données.

# 3

## Modélisation de la foule

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>48</b>
3.1.1	Généralités sur la modélisation de piétons	48
3.1.2	Navigation	50
3.1.3	Comportement d'orientation	54
3.1.4	Analogie avec des modèles physiques	54
3.1.5	Modèles comportementaux	55
3.1.6	Modèles par minimisation de fonctionnelle	57
3.1.7	Stratégies d'évitement	58
3.1.8	Modèles basés données ou <i>data-driven</i>	58
3.1.9	Conclusion	59
<b>3.2</b>	<b>Modèle dynamique proposé pour l'analyse du comportement continu de la foule</b>	<b>61</b>
3.2.1	Heuristiques de vitesse	61
3.2.2	Bilan	65
<b>3.3</b>	<b>Représentation par graphes</b>	<b>66</b>
3.3.1	Généralités	66
3.3.2	Connectivité	67
3.3.3	Relations pondérées	68
3.3.4	Projection dans l'espace Eulérien	69
3.3.5	Différenciation	71
<b>3.4</b>	<b>Modélisation de la dynamique de la foule retenue et contribution</b>	<b>73</b>
3.4.1	Forces corporelles	74
3.4.2	Force d'obstacle	74
3.4.3	Contribution à la modélisation du continuum social	75
3.4.4	Conclusion	83
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>

---

L'appréhension du comportement spatio-temporel de la foule fait l'objet d'études depuis la fin des années 1940 [156], à l'heure où la manifestation des problématiques qu'elle soulevait ont commencé à se faire jour avec l'apparition de métropoles et des transports en commun de masse. A cette époque, l'analyse du phénomène se basait essentiellement sur des observations et des heuristiques permettant de traduire de façon élémentaire les grands principes gouvernant l'évolution des individus. Depuis, les approches n'ont évolué essentiellement que dans la formalisation et la résolution numérique de ces principes. La

grande majorité des modèles de foule sont bâtis sur des heuristiques, de plus en plus fines, et parfois analogues à d'autres phénomènes. Ce domaine est en réalité très ouvert de par la complexité des mécanismes qu'il met en jeu, et dans une moindre mesure de par sa relative nouveauté en tant qu'enjeu de recherche à part entière. On peut situer son émergence à la fin des années 1980 avec l'augmentation significative de la place de l'informatique et des méthodes numériques [113], et parallèlement l'accroissement drastique des problèmes résultants de la concentration de la population en zone urbaine.

Dans ce chapitre, après avoir passé en revue les principales approches existantes de la modélisation de la foule, nous nous pencherons sur leur articulation avec les techniques d'analyse vues précédemment. Dans les contributions de ce chapitre, nous présentons un formalisme mathématique adapté à la manipulation de groupes de particules en interaction. Ce formalisme est proposé pour lier au mieux la modélisation de la foule et son analyse par estimation. Celui-ci est finalement utilisé au sein d'un modèle construit sur des heuristiques de sens commun, et généralisables à différentes descriptions.

### 3.1 Etat de l'art

Dans cette section nous nous penchons sur les principales approches et méthodes de la modélisation de la foule. Pour commencer, ses types de description les plus courants sont introduits. Nous verrons ensuite les différentes façons par lesquelles la modélisation permet la recherche et l'obtention d'un chemin menant à une certaine destination au sein d'un environnement complexe. Les approches d'interactions entre piétons, comme les comportements d'orientation, sont ensuite abordées. D'autres approches proposent d'utiliser des modèles analogues à ceux de fluides compressibles, dont une présentation sera faite. Les désormais répandus modèles sociaux seront ensuite abordés, et une attention particulière sera mise sur l'un d'entre eux. Les méthodes représentant le comportement de la foule à travers la minimisation de fonctionnelles d'effort feront aussi leur apparition dans cet état de l'art, tout comme celles qui nous intéressent ici plus particulièrement se basant sur l'utilisation de modèles dirigés par des données. Nous pourrions ainsi constater que la modélisation de la foule est un sujet très ouvert, et que les approches qui donnent naissance à ces modèles diffèrent parfois radicalement les unes des autres.

#### 3.1.1 Généralités sur la modélisation de piétons

Plusieurs approches existent concernant l'étude des mouvements de foules, dont une des principales déclinaisons est le type de représentation de l'ensemble des individus. La plus intuitive de ces représentations est sans doute la description Lagrangienne, évoquée en section 1.3.2. Elle engendre une modélisation dite *agent* ou microscopique schématisée en figure 3.1. Ce type de modélisation permet une approche directe sur la mobilité et le comportement des individus. A cette vision s'oppose la description Eulérienne de la foule, engendrant une modélisation macroscopique cette fois-ci, comme illustré en figure 3.2.

Il est évident que le type de description dépend fortement du type de phénomène que l'on souhaite modéliser, autrement dit du type de foule considéré. Représenter la foule par sa densité dans le cas où les individus sont très espacés et ont des destinations sans rapport est par exemple peu pertinent. On préférera dans ce cas utiliser la description

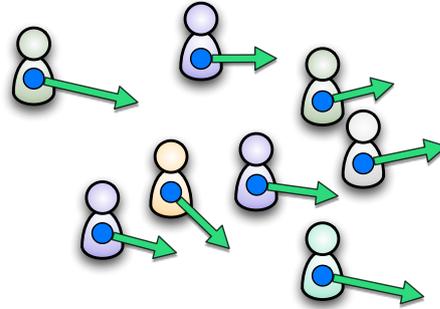


FIGURE 3.1 – **Modélisation dite *agent de la foule***. Modélisation microscopique. Chaque individu est représenté explicitement par une particule Lagrangienne transportant un ensemble de propriétés (ici la position et la vitesse de déplacement).

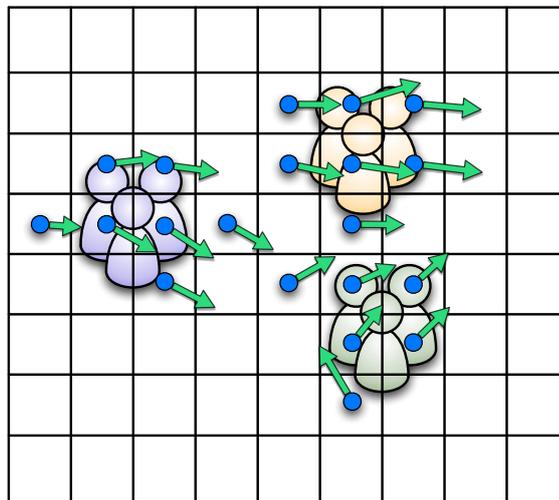


FIGURE 3.2 – **Modélisation dite *continue de la foule***. Modélisation macroscopique. Les individus sont représentés implicitement à travers la densité locale  $\rho(\mathbf{x})$ , où  $\mathbf{x}$  est la position considérée du domaine, celui-ci étant le plus souvent discrétisé sur une grille Eulérienne.

Lagrangienne. A l'inverse, si on considère énormément d'individus au sein d'un espace relativement confiné, et dont les intentions sont proches, la description Lagrangienne s'avère alors redondante et peu adaptée pour prendre en compte des phénomènes de plus grande échelle que nous aborderons dans la suite de cet état de l'art et de ce document. Quelle que soit sa description, la foule et les piétons qui la composent se meuvent avec une certaine intention. Nous allons maintenant voir les différents moyens existant pour représenter la manifestation de ces intentions.

### 3.1.2 Navigation

La caractéristique la plus évidente d'un individu en mouvement est son intention de se rendre d'un point à un autre. Le plus souvent, l'environnement dans lequel il évolue n'est pas vide et est composé d'obstacles entravant sa progression, comme illustré en figure 3.3. Il est alors nécessaire de trouver un chemin menant à destination, en empruntant éventuellement le chemin optimal minimisant la distance parcourue. Cette stratégie est aussi appelée *path-planning*. La méthode « humaine » de navigation la plus classique se

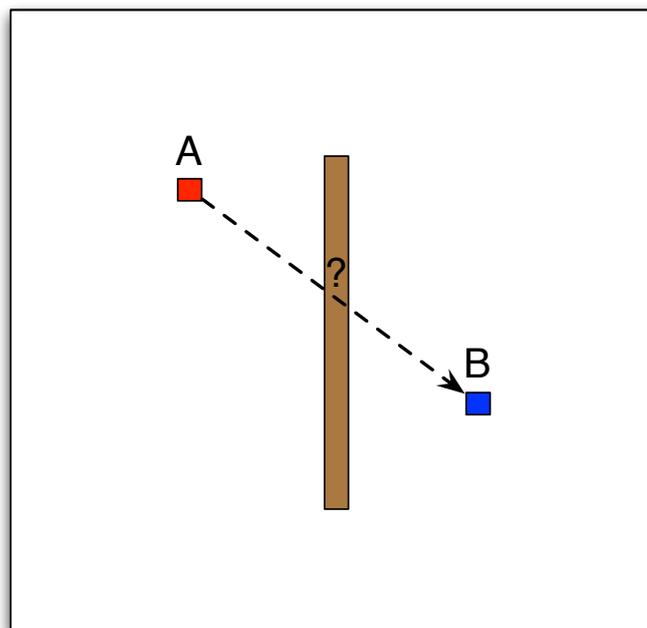


FIGURE 3.3 – Schéma de la problématique de navigation. Comment se rendre de A à B en évitant l'obstacle et en parcourant un minimum de distance.

base sur la constitution d'un chemin à partir de points clés où la direction de l'individu change. Plus de détails sur ce type de méthode sont disponibles dans [64]. Elle se base sur le compromis entre une navigation réactive (direction du point courant à la destination) et le contournement d'obstacles visibles à l'instant courant. Cette méthode souffre néanmoins de la difficulté à concilier des considérations locales avec une planification globale pouvant devenir inadaptée au fil du parcours emprunté. Les méthodes les plus répandues dans ce domaine sont celles basées sur un domaine discrétisé donnant une description Eulérienne du chemin à emprunter [65].

### 3.1.2.1 Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra [27] est la plus ancienne méthode de navigation. Elle consiste à propager depuis le point de départ la distance cumulée en mémorisant pour chaque case laquelle l'a précédée. Une fois la destination atteinte par la propagation, le chemin à emprunter est constitué de l'historique arrière des cases depuis la case finale.

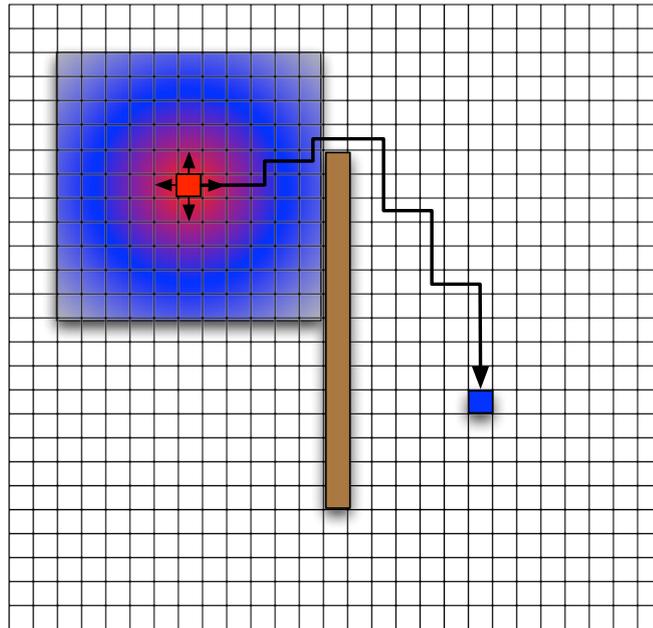


FIGURE 3.4 – Méthode Dijkstra pour la navigation. La propagation illustrée représente le milieu de la procédure algorithmique. Le chemin indique quelles cases successives emprunter pour atteindre la destination en parcourant un minimum de distance.

### 3.1.2.2 Algorithme A\*

L'algorithme A\*, dit « A étoile » ou « A star » [42], est une variante de l'algorithme de Dijkstra. Cette méthode utilise la navigation directe pour orienter la propagation de la distance cumulée. Son intérêt principal est de limiter la zone d'exploration du domaine et donc d'accroître la rapidité à laquelle le chemin optimal est trouvé. C'est pourquoi elle trouve essentiellement son utilisation dans les applications temps réel telles que les jeux vidéos. Elle est cependant sujette aux pièges de concavité qui peuvent potentiellement entraîner une exploration plus longue, et au final infructueuse, du domaine.

### 3.1.2.3 Fast Marching Method

La méthode dite du *Fast Marching* [107, 61, 122, 123] (FMM) se base, par analogie, sur la propagation d'une onde. A la différence des méthodes vues précédemment, l'hypocentre de la propagation n'est plus le point de départ mais la destination. Cette onde est décrite

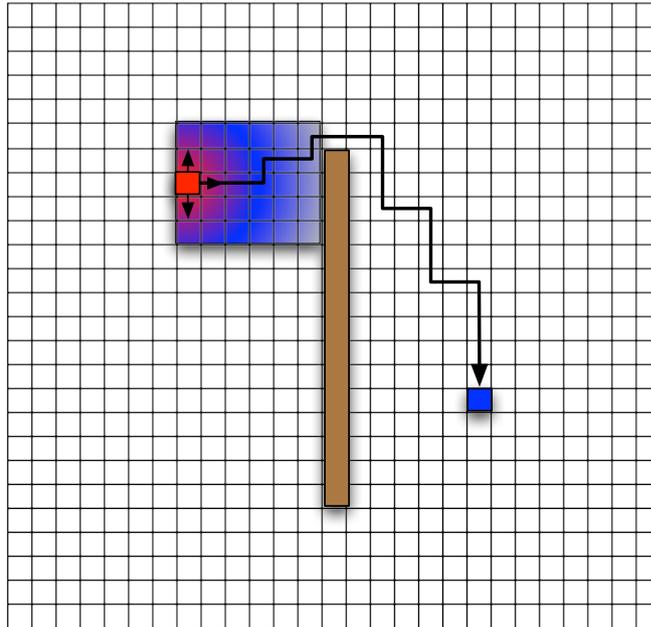


FIGURE 3.5 – Méthode A\* pour la navigation. La propagation est orientée selon la navigation directe par rapport à figure 3.4.

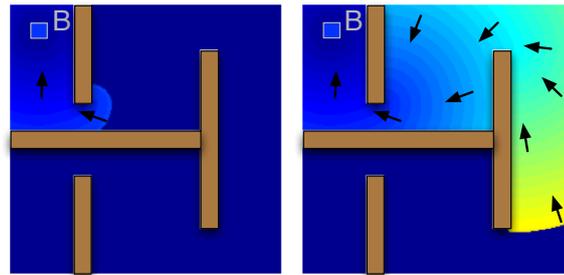
par l'équation eikonale non linéaire suivante :

$$\|\nabla t(\mathbf{x})\| = F(\mathbf{x}), \quad F(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{et} \quad t(\mathbf{x}_{\text{destination}}) = 0s. \quad (3.1)$$

Le potentiel  $t(\mathbf{x})$  représente le temps auquel l'onde a atteint la position  $\mathbf{x}$ , et la fonction  $F(\mathbf{x})$  représente l'inverse de la vitesse de propagation dans le milieu. Dans le cas d'un obstacle infranchissable, on a :  $F(\mathbf{x}) = +\infty$ . Une fois la valeur de  $t$  obtenue partout dans le domaine, la direction optimale à prendre en n'importe quel point du domaine pour atteindre en un minimum de temps la destination est donnée par l'expression :  $-\nabla t(\mathbf{x})$ .

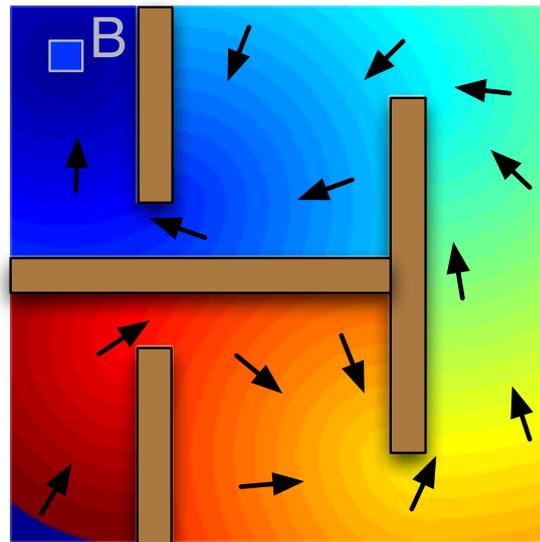
Cette méthode de planification de chemin est adaptée à l'étude des foules puisque dans le cas d'un groupe d'individus ayant la même destination, il n'est pas nécessaire de l'appliquer pour chacun d'eux. Elle permet en outre de disposer d'un champ de direction partout dans le domaine, permettant ainsi plus de robustesse face aux errements des individus. Cependant, si plusieurs destinations différentes existent au sein de la foule, il est nécessaire d'appliquer la méthode autant de fois que leur nombre.

On notera aussi que la fonction de vitesse de propagation  $F(\mathbf{x})$  n'est pas nécessairement binaire sur la base du simple « obstacle ou libre », et peut dépendre du niveau de facilité local à évoluer dans le milieu. Ce niveau de facilité pouvant être aussi bien mécanique (e.g. environnement sableux) que psychologique (e.g. arpenter une « pelouse interdite »). La figure 3.6 montre la propagation de cette onde dans un environnement comportant des obstacles et dont la zone libre est un milieu homogène.



(a) après 20 secondes

(b) après 75 secondes



(c) après 125 secondes

FIGURE 3.6 – Propagation d'une onde par résolution de l'équation eikonale. La couleur de l'onde correspond au temps écoulé depuis l'origine (bleu  $t_0$ , rouge  $t_f$ ). Les flèches noires représentent l'opposé du gradient du temps propagé et indiquent localement le chemin de navigation le plus court. La méthode du *fast marching* est ici utilisée.

### 3.1.2.4 Discussion

La liste des méthodes de navigation ici présentées est loin d'être exhaustive. On peut par exemple encore citer les méthodes de navigation dans des graphes [104], ou encore les méthodes stochastiques de planification de chemin comme la méthode *Rapidly-Exploring Random Trees* (RRT) [66].

La navigation d'un individu dans un environnement caractérise une grande partie de son existence, réelle ou virtuelle. Il ne se retrouve en général pas à un certain endroit par hasard et embarque une certaine liste de missions à accomplir dont la plus évidente est celle d'atteindre sa destination. Cette navigation est souvent entravée par des contraintes extérieures imprévues nécessitant d'évaluer continuellement la possibilité d'emprunter le chemin initialement défini. Dans le cas d'une foule notamment, les individus doivent déterminer comment prendre leur direction de navigation tout en s'accommodant de contraintes plus ou moins urgentes, stratégiques ou respectueuses envers ses semblables. Il est ainsi difficile de prendre en compte l'ensemble de ces aspects dans la définition *a priori* du chemin optimal pour un piéton. Dans la section suivante, nous présentons quelques travaux visant à modifier ce trajet en fonction de contraintes propres à l'individu, ou extérieures.

### 3.1.3 Comportement d'orientation

Une grande partie des modélisations de foule proposent différentes heuristiques, empiriquement inspirées et validées, pour modifier la vitesse des individus.

#### 3.1.3.1 Modèles selon des règles

Ces modèles sont historiquement liés à la reproduction du comportement animalier observé dans les cas des volées d'oiseaux ou des bancs de poisson [113, 135]. Ils consistent à établir des règles sur l'évolution des individus selon des observations visuelles de leur comportement. Dans [113], l'auteur propose ainsi trois règles d'agencement d'un individu avec ses voisins :

- la séparation, qui veille à ce que les individus ne soient pas trop près les uns des autres ;
- la cohésion, qui veille à ce qu'un individu ne s'isole pas du reste du groupe ;
- l'alignement, qui veille à respecter une direction identique au sein du groupe ;

Ces règles sont illustrées en figure 3.7, et sont basées sur des conditions booléennes d'ajustement de la vitesse. Ce modèle suppose ainsi sur l'existence d'un leader sans quoi aucun mouvement global ne ressortirait.

### 3.1.4 Analogie avec des modèles physiques

Une autre stratégie de modélisation de la foule consiste à reconnaître dans son comportement des analogies avec d'autres phénomènes physiques ou mécaniques. Cette stratégie présente l'avantage de s'appuyer sur des mécanismes théoriques éprouvés comparé à la compréhension partielle qu'il est possible d'avoir de la foule.

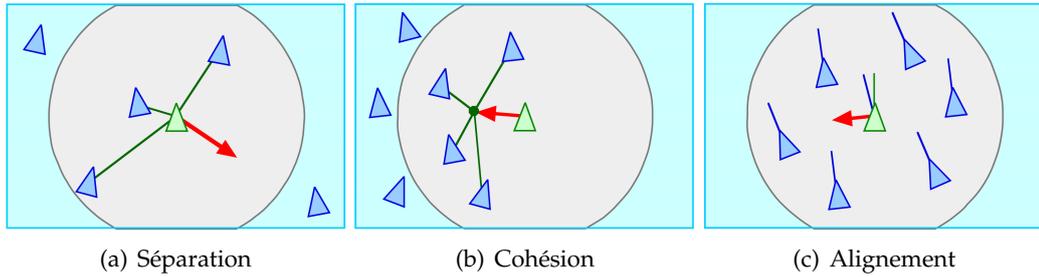


FIGURE 3.7 – Règles de conduite de Reynolds. Le triangle vert voit sa vitesse modifiée par le vecteur rouge. Figures extraites de [114].

### 3.1.4.1 Modèles gazeux

Les premiers modèles proposés dans ce sens furent inspirés de la théorie de Maxwell-Boltzmann traitant de la cinétique des gaz [51]. L'auteur fait l'analogie entre l'état des particules d'un gaz et des piétons, en s'appuyant sur les ressemblances de comportement qui existent sur la densité et l'énergie. De cette comparaison découle l'idée que position et vitesse des piétons sont décorréelées ce qui constitue une simplification importante. D'autres auteurs ont exploré cette voie notamment dans [47].

### 3.1.4.2 Modèles fluides

Quelques modèles reconnaissent dans la foule l'écoulement d'un fluide plus ou moins compressible. Dans [54], l'auteur propose trois hypothèses sur lesquelles sont bâties des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces hypothèses sont que :

- la vitesse à laquelle évolue un piéton dépend uniquement de la densité de piétons l'entourant, de ses caractéristiques comportementales et du sol sur lequel il chemine;
- les piétons ont la même destination;
- les piétons cherchent à minimiser le temps qui les sépare de leur destination à travers une fonction reliant la densité au ralentissement.

Elles mènent à l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho g(\rho) f^2(\rho) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho g(\rho) f^2(\rho) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, & (3.2a) \\ g(\rho) f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}}, & (3.2b) \end{cases}$$

où  $\rho$  est la densité de piétons,  $\phi$  le temps de trajet restant,  $f$  la vitesse des piétons,  $g$  un facteur d'inconfort et  $x$  et  $y$  sont ici les coordonnées spatiales du domaine en 2 dimensions :  $d = 2$ . Il est à noter que la variation de la densité distingue ce modèle des modèles hydrauliques incompressibles.

### 3.1.5 Modèles comportementaux

Certains auteurs ont cherché plus en amont des heuristiques de modélisation. L'idée est alors de s'inspirer au maximum du comportement cognitif ou physique d'un individu.

Nous en détaillons quelques uns dans les paragraphes suivants.

### 3.1.5.1 Modèles sociaux

L'un des modèles les plus connus en la matière est le modèle de Dirk Helbing qui introduit le concept de *forces sociales*. Dans [50], il présente un modèle agent et dynamique caractérisant l'évolution d'un individu par rapport aux autres et dont l'agencement est régi par des fonctions de normes sociales sur la répulsion ainsi que de capacité sensorielles dépendant de l'orientation de l'individu. Dans [46], les auteurs enrichissent ce modèle en l'accordant avec la loi de Newton des corps en mouvements, lui conférant une dimension analogique. Le modèle s'écrit alors pour chaque individu  $i$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} &= u_i, & (3.3a) \\ m_i \frac{\partial u_i}{\partial t} &= m_i \frac{\alpha_i W_i - u_i}{\tau_i} + \sum_{j \neq i} \mathbb{F}_{\text{interaction},ij} + \sum_{\mathcal{W}} \mathbb{F}_{i\mathcal{W}}, & (3.3b) \end{cases}$$

où  $y$  est la position de l'individu,  $u$  sa vitesse,  $m$  sa masse,  $W$  sa direction préférentielle, et  $\tau$  son temps de réactivité caractéristique. Les forces d'interaction entre individus sont unifiées sous le terme  $\mathbb{F}_{\text{interaction},ij}$ , et sont à la fois psychologiques et physiques. En introduisant  $r$  le rayon du disque représentant un individu, ce terme s'écrit :

$$\mathbb{F}_{\text{interaction},ij} = \left( \underbrace{a_i e^{-\frac{r_{ij}-D_{ij}}{b_i}}}_{\text{répulsion sociale}} + \underbrace{\kappa g(r_{ij} - D_{ij})}_{\text{répulsion mécanique}} \right) n_{ij} + \underbrace{\nu g(r_{ij} - D_{ij}) \Delta u_{ij}^t t_{ij}}_{\text{friction mécanique}} \quad (3.4)$$

avec :

$$D_{ij} = \|y_j - y_i\|, \quad (3.5)$$

$$n_{ij} = \frac{y_j - y_i}{\|y_j - y_i\|}, \quad (3.6)$$

$$t_{ij} = [-n_{ij} \cdot e_1 \quad n_{ij} \cdot e_2]^T, \quad (3.7)$$

$$r_{ij} = r_i + r_j, \quad (3.8)$$

$$\Delta u_{ij}^t = (u_j - u_i) \cdot t_{ij}, \quad (3.9)$$

$$g(r_{ij} - D_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_{ij} < D_{ij}, \\ r_{ij} - D_{ij} & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Le terme de répulsion sociale est une fonction exponentielle décroissante avec la distance « de toucher »  $D_{ij} - r_{ij}$  et s'inscrit dans une démarche psychologique de l'appréciation de son entourage. Le coefficient  $b_i$  représente ici la distance significative que le piéton  $i$  considère comme sociologiquement respectueuse de ses semblables. Le terme de répulsion mécanique modélise lui la réaction produite par la collision de deux individus qui peut s'apparenter à une quelconque modélisation de collision entre corps semi-rigides. Le terme de friction mécanique modélise lui la friction tangentielle générée par la collision de deux individus. Pour finir, les paramètres  $a$ ,  $\kappa$  et  $\nu$  déterminent chacun l'intensité des forces d'interactions ici mises en jeu.

Les auteurs proposent aussi de modéliser la gestion des murs et obstacles par la même force que celle générée par l'interaction entre individus, soit  $\mathbb{F}_{i\mathcal{W}} = \mathbb{F}_{ij}$  où le point  $y_{\mathcal{W}}$  représente alors le point d'obstacle le plus proche de  $y_i$ .

Ce modèle a depuis largement été visité et enrichi, notamment dans [13], ou encore [82], où les auteurs y ajoutent une force d'interaction sociale dite de *groupe*. L'idée est que la répulsion sociale n'est en fait pas une interaction sociale à proprement parler puisqu'elle se définit comme une affinité avec d'autres individus, contrairement au premier terme qui modélise lui une respectueuse ignorance. Cette démarche se fonde sur l'observation selon laquelle environ 70% des individus au sein d'une foule ont une affinité avec au moins une autre personne. Ce terme de groupe vient s'ajouter à l'équation 3.3b et consiste en une force d'attraction dirigée vers le centre du groupe auquel le piéton appartient. Cette force est paramétrée de telle sorte qu'en dessous d'une certaine distance au centre, le piéton se considère comme étant dans le groupe et qu'ainsi son intensité soit nulle.

### 3.1.6 Modèles par minimisation de fonctionnelle

Certains auteurs ont proposé de considérer les individus comme de (plus ou moins) simples contrôleurs dont la consigne principale est de minimiser le coût du cheminement. Ce principe provient de [156] dont l'auteur observe que tout organisme dépense le minimum d'énergie qu'il considère comme probable à dépenser. Dans [52], les auteurs introduisent la notion de ce coût en le considérant comme dépendant de :

- l'écart entre la vitesse souhaitée d'un piéton et sa vitesse réelle,
- la proximité d'un piéton à d'autres,
- la quantité d'accélération à fournir.

Dans [139], les auteurs prennent ce principe de minimisation de coût de cheminement en exprimant ce dernier de façon continue sur le domaine de l'environnement. Il est alors défini tel que :

$$\underbrace{a \int 1 ds}_{\text{longueur du trajet}} + \underbrace{b \int 1 dt}_{\text{durée du trajet}} + \underbrace{c \int g dt}_{\text{inconfort ressenti sur le trajet}}, \quad (3.11)$$

où  $g(\mathbf{x})$  représente une carte d'inconfort exprimée sur le domaine, et les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  pondèrent la pénalisation de chacun des termes en définissant ainsi un type de stratégie de déplacement. Si par exemple  $b$  et  $c$  sont nuls, cela décrit un comportement forcené de la foule cherchant uniquement et à tout prix à parcourir le trajet le plus court possible. L'application de cette méthode se fait de façon analogue à la méthode de navigation vue en section 3.1.2.3. Le terme  $F$  de l'équation 3.1, caractéristique de la célérité admise dans le domaine, est enrichi de la carte  $g(\mathbf{x})$ . Ce dernier terme inclut notamment comme critère d'inconfort la densité de personnes. Cette méthode s'avère très puissante puisqu'elle autorise l'implémentation de toute une panoplie de comportements stratégiques, mécaniques ou sociaux à travers l'édition d'une carte d'inconfort. Dans un cadre urbain par exemple, il est ainsi possible de simplement marquer la route comme pénalisante, sauf aux zones de passages piétons. Les individus auront ainsi pour comportement de rechercher le passage piéton le plus proche, tout en éventuellement marchant quelque peu sur la route si ils sont pressés ou s'il y a saturation de la densité sur le trottoir. Cette approche, bien que qualifiée de continue, ne s'affranchit cependant pas d'une modélisation agent minimale à

la prévention de collision. La prise en compte de la densité dans le déplacement relève de la pure stratégie et ne suffit pas à la modélisation de l'existence mécanique des individus. Ces derniers se voient alors soumis à une force de répulsion. La méthode a par la suite été enrichie [101] par la prise en compte de flux, mais en laissant cette fois-ci de côté la mise à jour continue du potentiel de coût.

D'autres approches proposent d'aller plus loin dans la définition du coût de cheminement. Dans [41], les auteurs y ajoutent des propriétés métaboliques et proposent de minimiser la fonction d'énergie dépensée sur un trajet par consommation d'oxygène :

$$E = m \int (c_s + c_w u^2) dt, \quad (3.12)$$

où  $c_s$  et  $c_w$  sont des constantes métaboliques issues de [146].

### 3.1.7 Stratégies d'évitement

Les modèles les plus microscopiques se concentrent sur les stratégies d'évitement entre individus et de prédiction de collision. Ils se basent essentiellement sur des considérations géométriques formées par la vitesse des individus environnants. On citera notamment [99], ou plus récemment la méthode *Reciprocal Velocity Obstacle* (RVO), que l'on peut traduire par « Obstacle par Vitesses Réciproques », proposée dans [141]. Ces méthodes offrent des comportements d'interaction et d'anticipation très fins, et permettent de créer une grande variabilité décisionnelle des individus composant une foule. Dans [102], les auteurs proposent en outre d'inclure dans ces stratégies l'adaptation du comportement des individus à la dynamique de leurs voisins pour des foules de forte densité.

### 3.1.8 Modèles basés données ou *data-driven*

Nous avons pu voir jusqu'ici que l'essentiel des modèles de foules se basent sur un ensemble de lois mathématiques issues de considérations diverses. Cependant les lois ne permettent pas d'atteindre un degré de variété, complexité et spontanéité suffisant pour créer l'illusion de l'existence de vie. Certains auteurs ont alors cherché à augmenter la modélisation par des données issues d'observations réelles de foule. Dans [99], les auteurs arrivent à bâtir un modèle d'évitement en s'appuyant sur le comportement réel d'individus suivis par capture de mouvements. Une approche similaire est aussi proposée dans [105]. Dans [71], les auteurs construisent une base de données constituée d'exemples spatio-temporels détectés par suivi dans des vidéos. Lors de la simulation, la base est alors interrogée pour déterminer l'évènement qui s'en rapproche le plus et l'intégrer à la simulation sans discontinuité temporelle. Dans [68], les auteurs se servent du suivi d'individu dans des vidéos pour l'apprentissage d'un modèle agent paramétré selon l'environnement considéré. Une fois acquis, ce modèle peut alors être simulé dans des conditions similaires. Les méthodes de suivi présentent néanmoins des limites quant à leur capacité à gérer un nombre important de personnes. Il a ainsi été proposé [22] de faire l'acquisition globale et continue de champs de vitesse estimés à partir de vidéos de foule pour ensuite transporter des agents par ce flux, comme le montre la figure 3.8. Dans [83], des champs de vitesses sont construits à partir de trajectoires réelles d'individus suivis au

cours du temps. Ces champs servent ensuite, au moyen d'une méthode d'extrapolation, de vitesse souhaitée par les individus dans le modèle proposé par Helbing [46].

Dans un autre registre, ces données peuvent être issues du souhait d'un utilisateur [140]. Une modélisation simple de la non collision entre individus y gère automatiquement l'interaction entre les agents, alors que diverses contraintes manuellement définies via une interface dédiée permettent de constituer des scènes de foule.



(a) Capture des champs de vitesse de la scène réelle (b) Simulation par transport des individus par ces champs

FIGURE 3.8 – Modélisation basée données selon [22].

#### 3.1.9 Conclusion

Dans cette section, nous avons pu constater que la foule est représentée de manières aussi variées qu'hétéroclites. A l'exception des modèles basés données, ces représentations se basent le plus souvent sur l'observation empirique et sur une approche subjective de leur comportement en y attribuant des heuristiques se traduisant par des lois mathématiques. Le formalisme attaché à ces modélisations est par conséquent spécifique à chaque approche et chaque méthode. Notons que cet état de l'art est loin d'être exhaustif. Nous pouvons notamment citer [137] dans lequel un inventaire des diverses méthodes nécessaires à la synthèse de foules humaines est présenté.

Ajoutons encore que d'autres approches cherchent à allier des modélisations continues et agents cumulant ainsi la possibilité de simuler des foules à très grand échelle, tout en respectant des contraintes locales de répulsion entre individus. Dans [86], cette combinaison se base sur l'hypothèse d'incompressibilité de la foule à partir d'un certain niveau de densité.

Les approches mixtes Eulériennes Lagrangiennes proposent ainsi la prise en compte d'une grande variété de comportements, à la fois globaux et locaux, et constituent un noeud de raccordement entre des approches dont le formalisme diffère pourtant fortement. Dans la suite, nous proposerons de re-formaliser cette mixité, en s'appuyant sur le caractère Lagrangien des individus de la foule, indissociable de sa simulation. En considérant la foule comme un graphe, nous verrons qu'il est possible d'exprimer un large éventail de modélisations par les opérateurs dédiés à cette théorie, y compris par l'introduction d'opérateurs formalisant le lien entre des données Eulériennes, supposées continues, et des données Lagrangiennes, spécifiques aux agents. Ces opérateurs permettent de plus

une manipulation aisée de différents modèles comportementaux en vue de leur utilisation pour les techniques d'estimation et de contrôle, et plus particulièrement d'assimilation, vues au chapitre précédent. Dans cette optique justement, nous serons amenés à étudier la méthode d'assimilation variationnelle dans le contexte continu de la foule, *a priori* plus facilement validable. C'est pourquoi dans la section suivante nous proposons un modèle original de foule y étant dédié.

## 3.2 Modèle dynamique proposé pour l'analyse du comportement continu de la foule

Le but de cette partie est de concevoir un modèle dynamique *continu* de foules qui soit simple et générique, et ayant vocation à être utilisé par des techniques de simulation et d'analyses. Pour cela, nous proposons de représenter la foule par un *potentiel d'inconfort*  $D(\mathbf{x}, t)$  à description Eulérienne, existant dans un flux représenté par un champ de vitesses  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Ce potentiel caractérise l'ensemble des forces de répulsion entre individus dues à un différentiel d'inconfort et décrites dans la section précédente. Autrement dit, les zones d'inconfort supérieur tendent à créer un flux vers les zones d'inconfort inférieur. Un tel potentiel peut incarner plusieurs quantités physiques comme la densité ou la pression, mais aussi des quantités psychologiques telles que la pudeur, la cohésion de groupe, ou autres.

A l'image de la densité qu'il peut donc caractériser, nous supposons simplement que ce potentiel d'inconfort, en tant que scalaire existant dans le flux, est transporté par le champ de vitesse et se diffuse aussi au cours du temps. Ceci correspond donc à la simple équation de transport d'un scalaire, lequel obéit alors à la relation classique d'advection par le flux  $\mathbf{u}$  et diffusion :

$$\frac{\partial D(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \nabla D(\mathbf{x}, t) = \delta \Delta D(\mathbf{x}, t). \quad (3.13)$$

Cette équation constitue en théorie l'essentiel du modèle dans la mesure où nous proposons l'espace d'état défini par :  $\mathbf{X} = D$ . La foule est donc ici supposée uniquement représentée par son niveau d'inconfort. Le flux  $\mathbf{u}$  est considéré comme une variable du modèle permettant d'inclure des heuristiques diverses sur la foule. Cette variable, agissant comme une contrainte sur l'évolution de  $D$ , est censée dépendre entre autres de l'état de la foule, à savoir  $D$ .

Cette modélisation permet en outre de modéliser, en plus du flux de la foule, les agents qui la composent. Après apposition des heuristiques jugées pertinentes sur l'expression de la vitesse, il est possible d'utiliser le champ de vitesse  $\mathbf{u}(D, \mathbf{x}, t)$  pour transporter les particules Lagrangiennes associées aux individus. Plus précisément, à partir d'une certaine configuration de piétons à l'instant  $t$  il est possible d'en déduire une carte d'inconfort  $D(\mathbf{x}, t)$ . Le calcul du champ  $\mathbf{u}(D, \mathbf{x}, t)$  permet ensuite de transporter les individus moyennant certaines règles Lagrangiennes d'évitement et de prévention de collision. Cette procédure est décrite en figure 3.9. Revenons maintenant à la modélisation continue et penchons nous sur les heuristiques de vitesse.

### 3.2.1 Heuristiques de vitesse

En supposant raisonnablement que chaque individu vise à minimiser le temps de trajet qui le sépare de son objectif, le chemin optimal à emprunter depuis une certaine position peut être conçu comme le gradient d'une fonction potentielle  $\Phi(\mathbf{x})$  définie sur tout le domaine  $\Omega$ . Ce potentiel est solution de l'équation eikonale qui a été largement utilisée dans le contexte de planification de chemin, comme introduit en section 3.1.2.3. Pour un environnement et un objectif donnés, nous sommes donc en mesure d'obtenir un champ directionnel optimal  $W(\mathbf{x}) = \frac{\nabla \Phi(\mathbf{x})}{\|\nabla \Phi(\mathbf{x})\|}$  des piétons qui correspond à la direction

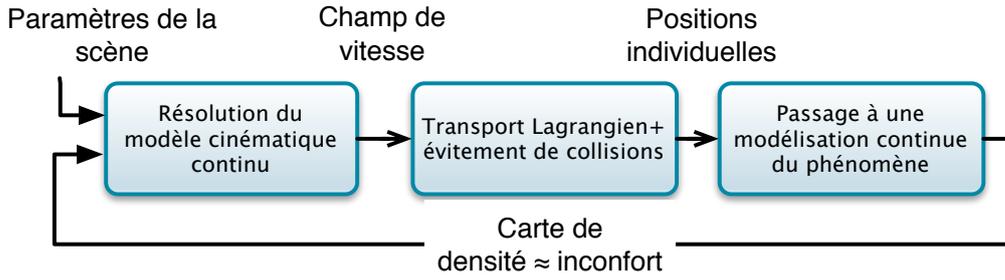


FIGURE 3.9 – Intégration schématisée du modèle de foule Eulérien-Lagrangien.

de déplacement théorique des individus lorsque non contraints par leur voisinage. Ce terme suppose que le flux de la foule soit unique, c'est à dire que les individus partagent un objectif commun.

Le voisinage intervient à travers le potentiel d'inconfort. En supposant raisonnablement que le flux de la foule tend à minimiser l'inconfort de celle-ci, nous supposons que les individus, incarnés par  $D$ , tendent à dévier de la trajectoire optimale  $W$  selon le gradient de l'inconfort. L'heuristique de vitesse ainsi proposée est :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \alpha \left( W(\mathbf{x}) \quad \underbrace{-\beta \nabla D(\mathbf{x}, t)}_{\text{répulsion due à l'inconfort}} \right) \quad (3.14)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R} > 0 m.s^{-1}$  et  $\beta \in \mathbb{R} > 0 m^3.ped^{-1}$  sont deux variables pilotant la dynamique du flux. Nous nous penchons maintenant sur les paramétrisations proposées de ces variables, essentiellement basées sur le niveau d'inconfort. En prenant dans la suite le cas de figure le plus simple de la caractérisation de l'inconfort, il est instinctif de faire l'hypothèse que cet inconfort est directement et uniquement lié à la densité  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Autrement dit, nous avons :  $D(\mathbf{x}, t) = a \rho(\mathbf{x}, t)$ , avec  $a$  le coefficient d'inconfort dû à la densité supposé tel que  $a = 1 inc.m^2.ped^{-1}$ , où  $inc$  est l'unité d'inconfort et  $ped$  l'unité d'individu. C'est pourquoi dans la suite nous supposons  $\alpha(\rho)$  et  $\beta(\rho)$  dépendants de la densité.

### 3.2.1.1 Paramétrisation intuitive

Afin de piloter les niveaux d'influence sur la dynamique de l'objectif et de l'inconfort, une paramétrisation intuitive des fonctions  $\alpha(\rho)$  et  $\beta(\rho)$  est proposée.

**Définition de la fonction  $\alpha$**  La fonction  $\alpha$  représente essentiellement l'intensité de la vitesse totale  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , que nous supposons dépendante de l'inconfort. Ainsi, la fonction  $\alpha$  dépend de la densité et l'expression suivante est proposée :

$$\begin{cases} \alpha(\rho) = \alpha_{max} \frac{\rho_{ref}}{\rho} & \text{si } \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \\ \alpha(\rho) = \alpha_{max} & \text{si } \rho < \rho_{min} \\ \alpha(\rho) = \alpha_{max} \frac{\rho_{ref}}{\rho_{max}} & \text{si } \rho_{max} < \rho. \end{cases} \quad (3.15)$$

Les paramètres  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  représentent les valeurs limites de densité entre lesquelles  $\alpha$  dépend de  $\rho$ , et  $\rho_{ref}$  est une densité de référence de la foule prise ici comme étant de  $1\text{ ped.m}^{-2}$ . Intuitivement, la magnitude de la vitesse décroît avec l'augmentation de la densité. Si la densité est inférieure à  $\rho_{min}$ , les piétons évoluent dans la direction  $W$  avec une intensité libre  $\alpha_{max}$ . A l'inverse, la valeur minimale de  $\alpha$  est bornée lorsque la densité de personne dépasse  $\rho_{max}$ .

**Définition de la fonction  $\beta$**  La fonction  $\beta$  représente elle l'influence de la densité sur la déviation de la direction optimale  $W$ . On considère que les piétons situés dans les zones de densités les plus faibles ne cherchent pas à minimiser l'inconfort du flux. Inversement les zone les plus denses engendrent une minimisation plus importante de l'inconfort. Sous ces conditions,  $\beta(\rho)$  est défini par :

$$\begin{cases} \beta(\rho) = \beta_{max} \frac{\rho - \rho_{min}}{\rho_{max} - \rho_{min}} & \text{si } \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \\ \beta(\rho) = 0 & \text{si } \rho < \rho_{min} \\ \beta(\rho) = \beta_{max} & \text{si } \rho_{max} < \rho. \end{cases} \quad (3.16)$$

Par le biais de la fonction  $\beta$ , l'influence du différentiel d'inconfort croît linéairement avec l'augmentation de la densité entre  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . On suppose ici qu'en dessous d'une certaine densité  $\rho_{min}$ , la foule ne cherche plus à minimiser son inconfort. Inversement, au dessus de  $\rho_{max}$ , le niveau d'influence du différentiel d'inconfort est limité. Le paramètre  $\beta_{max}$  constitue le taux de croissance global de  $\beta$ .

**Discussion** La paramétrisation de l'heuristique sur la vitesse engendre la manipulation de quatre paramètres que sont :  $\alpha_{max}$ ,  $\beta_{max}$ ,  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . La calibration de ces valeurs selon le type de foule souhaité peut être fastidieuse dans la mesure où leur impact sur la scène est difficilement évaluable. C'est pourquoi une paramétrisation unifiée de l'heuristique de vitesse est proposée ci-après.

### 3.2.1.2 Paramétrisation unifiée par l'allure

Ici nous proposons d'introduire le paramètre d'allure, ou de « stress », des piétons  $P \in \mathbb{R} > 0\text{ m.s}^{-1}$ . Ce paramètre permet à un utilisateur du modèle de caractériser de manière simple et unique le flux de la foule. Par exemple, il est généralement admis que la vitesse moyenne d'un piéton non stressé est approximativement de  $1\text{ m.s}^{-1} = P_{ref}$ . Si  $P$  est supérieur à cette valeur, une situation tendant vers l'urgence est produite. Nous nous penchons par la suite sur l'intégration de ce paramètre dans l'heuristique de vitesse proposée précédemment en équation 3.14, et nous proposons une paramétrisation plus avancée de  $\alpha(\rho)$  et  $\beta(\rho)$ , bien que restant empirique.

**Définition de la fonction  $\alpha$**  Par rapport à la paramétrisation intuitive précédente,  $\alpha_{max}$  est naturellement remplacé par l'allure  $P$ . La décroissance de  $\alpha$  est aussi modifiée :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(\rho) = \frac{P}{\left(\frac{\rho - \rho_{min}}{\rho_{ref}}\right)^m + 1} & \text{si } \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \\ \alpha(\rho) = P & \text{si } \rho < \rho_{min} \\ \alpha(\rho) = \frac{P}{\left(\frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{ref}}\right)^m + 1} & \text{si } \rho_{max} < \rho. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

L'exposant  $m$  est considéré de valeur 4 afin d'assurer une décroissance rapide lorsque la densité augmente.

**Définition de la fonction  $\beta$**  On considère cette fois-ci que les piétons situés dans les zones de densités les plus faibles sont les plus susceptibles de changer leur direction (puisqu'ils en ont la liberté), et inversement. Sous ces conditions,  $\beta(\rho)$  est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta(\rho) = \beta_{max} \left(\frac{P_{ref}}{P}\right)^n \left(1 - \frac{\rho - \rho_{min}}{\rho_{max} - \rho_{min}}\right) & \text{si } \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \\ \beta(\rho) = \beta_{max} \left(\frac{P_{ref}}{P}\right)^n & \text{si } \rho < \rho_{min} \\ \beta(\rho) = 0 & \text{si } \rho_{max} < \rho \end{array} \right. \quad (3.18)$$

L'influence de  $\beta$  décroît avec l'augmentation de la densité entre  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . La dépendance à l'allure  $P$  exprime l'idée selon laquelle pour des situations d'urgence ( $P > P_{ref}$ ), l'influence des individus voisins diminue avec  $P$  et donc  $\beta$  diminue. Les piétons sont en fait principalement concentrés sur leur chemin  $W$  et s'occupent peu de leur voisinage. À l'inverse, si l'allure souhaitée est plutôt faible, les piétons ont tendance à plus facilement accepter la déviation de leur chemin optimal, et donc  $\beta$  augmente. Le paramètre  $\beta_{max}$  est ici fixé et pris égal à  $4m^3 \cdot ped^{-1}$ . L'exposant  $n$  est lui considéré de valeur 2.

**Plage de densité  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$**  Ces limites représentent les niveaux de tolérance d'encombrement des piétons. En dessous de  $\rho_{min}$ , le piéton considère la densité environnante comme non contraignante. Au dessus de  $\rho_{max}$ , il la considère comme totalement contraignante. Entre ces deux valeurs, le piéton doit prendre en compte à la fois son voisinage et la direction optimale. Nous proposons une paramétrisation automatique de ces plages en fonction de l'allure  $P$ . Ces limites sont calculées avec les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{min} = \max \left\{ 0, \rho_{min_{ref}} + \gamma \frac{P - P_{ref}}{P_{ref}} \right\} \\ \rho_{max} = \max \left\{ 0, \rho_{max_{ref}} + \gamma \frac{P - P_{ref}}{P_{ref}} \right\} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

où  $\gamma$  est un paramètre à fixer. Ces expressions signifient que plus  $P$  est important, plus les valeurs de  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  sont importantes, et donc plus la plage de densité est située à un niveau important. Pour illustrer cette supposition, considérons une évacuation d'urgence. Dans une telle situation, l'allure  $P$  des individus est rapide. Par conséquent, les niveaux de densité  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  sont importants. Ceci est plutôt naturel : dans une situation d'urgence,

les gens tolèrent beaucoup plus facilement la densité que dans une situation normale, et n'ont que peu d'égard vis-à-vis de leur congénères. Les valeurs limites de densité sont fixées par :  $\rho_{min_{ref}} = 0.1 \text{ ped.m}^{-2}$  et  $\rho_{max_{ref}} = 3 \text{ ped.m}^{-2}$ , et l'on fixe  $\gamma = 0.5 \text{ ped.m}^{-2}$ .

**Discussion** Finalement, pour un environnement donné, le modèle peut être quasiment entièrement paramétré par  $P$  qui permet un large panel de comportements de foule. Ce point se révèle déterminant dans certains cas de figure que sommes amenés à aborder dans la suite du document.

### 3.2.2 Bilan

Dans cette section nous avons proposé certains *a priori* sur la dynamique continue de la foule en s'appuyant sur la possibilité de contraindre une simple modélisation par advection-diffusion par une heuristique explicite sur la vitesse. Ceci donne lieu à une modélisation dynamique à une équation qu'il est possible de qualifier d'« advection-diffusion-considération », puisque  $D$  doit implicitement considérer une certaine heuristique sur la vitesse  $\mathbf{u}(D)$  dont elle même dépend. Nous notons dans notre cas ce type de modèle par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(D, \mathbf{x}, t) \nabla D(\mathbf{x}, t) = \delta \Delta D(\mathbf{x}, t), \\ \models \mathbf{u}(D, \mathbf{x}, t) = \alpha \left( W(\mathbf{x}) - \beta \nabla D(\mathbf{x}, t) \right). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.20a) \\ (3.20b) \end{array}$$

Le modèle continu défini aux équation 3.13 et 3.14, et apparaissant ci-dessus permet le calcul, à chaque pas de temps, d'un champ de vitesses (voir le premier bloc de la figure 3.9) qui est utilisé pour le transport Lagrangien des piétons. Puisque les collisions entre individus ne sont pas autorisées, une étape additionnelle, de répulsion analogue à celle présentée dans [49] est introduite (voir le second bloc de la figure 3.9). A partir de la nouvelle position des piétons, la densité est exprimée sur une grille Eulérienne grâce à un noyau Gaussien (voir le troisième bloc de la figure 3.9). La déviation standard du noyau est basée sur l'espace qu'un humain occupe horizontalement. La nouvelle densité continue est ainsi disponible pour le pas de temps suivant.

Néanmoins la décorrélation de la modélisation par descriptions Eulérienne et Lagrangienne brise l'homogénéité du modèle au sens défini en section 2.1.1 et utilisé plus généralement dans les techniques d'analyses abordées dans le chapitre 2. La fusion au sein d'un même modèle d'une phénoménologie de flux, avec des impératifs inhérents aux agents tels que la collision, entraîne une écriture potentiellement lourde. Pour atteindre une clarté acceptable, elle nécessite un formalisme compact apte à décrire des phénomènes aussi bien Eulériens que Lagrangiens, ainsi que les liens pouvant exister entre ces deux descriptions.

### 3.3 Représentation par graphes

Dans la perspective de soumettre un modèle de foule aux techniques d'analyse vues dans les sections 2.2 et 2.3, un formalisme est ici proposé afin d'unifier les différentes descriptions et représentations mises en jeu par la foule. Ce formalisme se base sur la théorie des graphes, dont l'écriture est ici construite pour satisfaire des contraintes de précision, compacité et dans une moindre mesure clarté, que demande la rencontre de méthodes d'analyses à l'écriture riche avec des modèles aux propriétés variées.

Nous représentons donc ici la foule par un graphe, dont chaque sommet constitue un individu de la foule. Nous verrons dans la section 3.3.1 suivante que chacun des sommets comprend ainsi la propriété de position, presque indispensable à la représentation des individus. Après avoir décrit la connectivité de ce graphe, nous nous pencherons sur le formalisme nécessaire à l'expression de la transition des diverses propriétés des individus vers des données continues, ainsi que sur celui de la transition inverse section 3.3.4. Nous finirons par montrer comment dériver les opérateurs ainsi introduits, dans l'optique de leur intégration au formalisme de l'assimilation variationnelle.

#### 3.3.1 Généralités

Nous considérons la population d'individus, ou dans un contexte plus général l'essaim, comme un ensemble de  $N$  particules, vues comme des sommets. La population, décrite par ses sommets  $\mathcal{V} = \{p_1, \dots, p_N\} \in \mathbb{V}^N$ , possède des connexions intrinsèques, vues comme des arêtes  $\mathcal{E} \in \mathbb{E}^Z$ , où  $Z$  est le nombre d'arêtes connectant deux sommets de  $\mathcal{V}$ . On peut aisément comprendre qu'il n'est en général pas intéressant de connecter toutes les particules entre elles puisque de cette connectivité découle la complexité algorithmique. De même, du point de vue de la modélisation, les piétons d'une foule ne dépendent évidemment pas tous les uns des autres. Par conséquent on vise le plus souvent à avoir  $Z \ll N^2$ . Nous obtenons finalement la définition du graphe  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$  caractérisant les particules et leur interactions. Il est aussi à noter que chaque sommet du graphe comporte différentes propriétés, ou quantités, usuellement écrites :

$$\mathbf{f} : \mathbb{V}^N \rightarrow \mathbb{F}^N$$

$$\mathcal{V} \mapsto \mathbf{f}(\mathcal{V})'$$

avec  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  dans le cas d'une propriété scalaire, et  $\mathbb{F} = \mathbb{R}^{\dim}$  dans le cas d'une propriété vectorielle. A titre d'exemple, la position des particules, aussi appelée configuration, peut s'écrire :

$$\mathbf{y}(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} y(p_1) \\ \dots \\ y(p_i) \\ \dots \\ y(p_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Afin d'être en mesure d'écrire des termes et expressions en exploitant le formalisme des graphes, nous introduisons l'opérateur de *diagonalisation* qui crée une matrice diagonale pure à partir d'un vecteur. Par exemple, en considérant  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  une propriété scalaire quelconque du graphe, la matrice diagonale associée  $\underline{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  permet de combiner différentes propriétés comme le produit  $\underline{\mathbf{f}}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{dN}$  pour en créer de nouvelles. L'énergie cinétique des sommets du graphe peut notamment s'écrire :  $\mathbf{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{m}}\mathbf{u}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ . Notons que dans le cas où  $Z = N^2$  on parle alors de graphe complet.

### 3.3.2 Connectivité

La connectivité  $\mathcal{E}$  des sommets  $\mathcal{V}$  est définie par la matrice d'adjacence  $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{N \times N}$  qui intègre la structure du graphe  $\mathcal{G}$ . Cette matrice est définie telle que :

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}_{ij} = 1 & \text{s'il existe une connexion entre les sommets } p_i \text{ and } p_j, \\ \mathbf{A}_{ij} = 0 & \text{s'il n'existe pas de connexion.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Dans la plupart des cas, le degré de relation entre particules diminue avec la distance qui les sépare : la connectivité dépend alors de la proximité. Il existe différentes façons de fixer la connectivité en fonction de la distance, comme notamment connecter des sommets du graphe dont la distance est inférieure à un certain seuil (i.e. périmètre de connexion), ou connecter les  $k$  plus proches voisins. De par le nombre potentiellement important de particules considérées, la solution retenue est ici de fixer la connectivité selon une méthode de voisinage sur une grille Eulérienne, qui permet d'effectuer plus efficacement le suivi d'un sous ensemble de particules voisines. La matrice d'adjacence s'accompagne souvent de la matrice de degré  $\mathbf{D} \in \mathbb{Z}^{N \times N}$ , qui correspond à la somme des connexions de chaque sommet avec les autres. Cette matrice est purement diagonale et est définie telle que :

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \mathbf{D}_{ii} = \sum_j \mathbf{A}_{ij} \\ \mathbf{D}_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Prenons un exemple en dimension  $d = 2$  d'une configuration donnée de sommets d'un graphe pour lequel une condition de voisinage d'ordre 1 est fixée, comme illustré en figure 3.10.

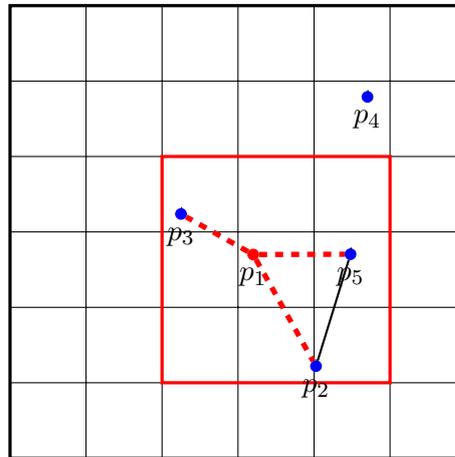


FIGURE 3.10 – **Exemple de graphe.** Seuls les sommets voisins d'une maille sont connectés, comme l'illustre le périmètre rouge de norme infinie autour de  $p_1$ .

Dans ce cas, les matrices d'adjacence et de degré du graphe  $\mathcal{G}$  sont :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Afin d'exprimer explicitement l'adjacence établie sur la base d'une grille Eulérienne, on introduit la matrice de présence de sommets dans les mailles (PSM)  $\mathcal{P}(\mathcal{V}) \in \mathbb{Z}^{N \times M}$ , où  $M$  est le nombre de mailles  $c$  de la grille  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{P}$  caractérise alors la présence d'un sommet dans une maille. On définit :

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \mathcal{P}_{im} = 1 & \text{si } y_i \text{ est dans } c_m \\ \mathcal{P}_{im} = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.25)$$

Dans le même temps, on introduit la matrice d'adjacence de la grille  $\mathcal{M}_o \in \mathbb{Z}^{M \times M}$  caractérisant la connectivité des mailles à l'ordre  $o$ . On définit :

$$\mathcal{M}_{o,ml} = \begin{cases} 1 & \text{si } \|c_m - c_l\|_\infty \leq o \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.26)$$

avec  $c_m - c_l$  le vecteur d'indices de mailles d'une grille régulière allant de la maille  $c_l$  à la maille  $c_m$ . La combinaison de ces deux matrices nous donne l'expression précise et explicite de l'adjacence :

$$\mathbf{A} = \mathcal{P} \mathcal{M}_o \mathcal{P}^T \quad (3.27)$$

En considérant l'exemple illustré en figure 3.10, on peut aisément constater que  $\mathcal{P}^T$  donne la maille à laquelle  $p_1$  appartient,  $\mathcal{M}_1$  en donne les mailles voisines au premier ordre, et finalement  $\mathcal{P}$  collecte les sommets se situant dans ces mailles.

### 3.3.3 Relations pondérées

Si les conditions de la connectivité sont désormais connues, il reste à définir leur intensité, puisque les fonctionnelles d'interactions entre particules dépendent des sommets. Ainsi, la matrice d'adjacence peut être augmentée par des poids. Ces poids, notés  $w(f(p_i), f(p_j)) \in \mathbb{W}$ , ou  $w_{ij}^f$ , créent la matrice  $[w_{ij}^f] \in \mathbb{W}^{N \times N}$ . En combinant des poids à la matrice d'adjacence nous obtenons l'expression de la matrice d'adjacence pondérée :

$$\mathbf{A}_{w^f} = [w_{ij}^f] \circ \mathbf{A}, \quad (3.28)$$

$\circ$  représentant le produit d'Hadamard. En pratique, la propriété de graphe de laquelle dépend la fonction de poids est souvent la position  $\mathbf{y}$  et l'écart de  $y_i$  à  $y_j$  associé, se traduisant par  $w_{ij}^y = w(y(p_j) - y(p_i))$ . A titre d'exemple, si l'on considère la fonction de poids comme un noyau Gaussien  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}_{ij}^y = \left( \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^d e^{-\frac{1}{2} \frac{\|y_j - y_i\|^2}{\sigma^2}}, \quad (3.29)$$

il est possible d'exprimer de manière compacte la concentration de la quantité  $\mathbf{q}$  des sommets de  $\mathcal{G}$ , autrement dit la densité de particules, par :

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}_{\mathbf{G}^y} \mathbf{q}, \quad (3.30)$$

avec  $q(\mathcal{V})$  le plus souvent fixé à  $\vec{1}$ , signifiant que chaque particule compte pour 1 *ptl*. En conséquence, la dimension quantitative de la concentration est  $[\boldsymbol{\rho}] = \text{ptl} \cdot m^{-d}$ .

### 3.3.4 Projection dans l'espace Eulérien

En plus des conditions de voisinage par grille, il peut s'avérer utile d'évaluer des données Lagrangiennes dans l'espace Eulérien [139, 86]. Si nous disposons des propriétés des sommets du graphe (à leur position), on ne peut présumer de leur valeur ailleurs, par exemple sur la grille  $\mathcal{C}$ . Il est alors possible d'évaluer la concentration de la propriété, ou encore son extrapolation. Bien évidemment, tous les sommets ne sont pas nécessaires à cette évaluation, et on pourra utiliser l'opération  $\mathcal{M}_o\mathcal{P}^T$  pour déterminer les sommets qui sont localement concernés. L'expression des poids est en revanche légèrement modifiée par rapport à celle présentée pour l'adjacence de graphe, puisque la propriété dont ils dépendent s'appuie alors non seulement sur les sommets du graphe mais aussi sur les mailles de la grille. En définissant  $\left[w_{mj}^f\right]_{\mathcal{CG}} \in \mathbb{W}^{M \times N}$  la matrice des poids, avec  $w_{mj}^f = w(f(p_j) - f(c_m))$ , on peut alors exprimer la convolution, ou concentration, de  $\mathbf{q}$ , la densité de particules sur  $\mathcal{C}$  comme suit :

$$\rho_{\mathcal{C}} = \left[G_{mj}^y\right]_{\mathcal{CG}} \circ \mathcal{M}_o\mathcal{P}^T \mathbf{q}, \quad (3.31)$$

étant entendu que la position de la maille  $c_m$ ,  $y(c_m)$ , est son centre et se traduit par la relation  $y(c_m) = \mathbf{x}_{c_m}$ . Précisons que dans le cas où l'on cherche à évaluer une concentration de la propriété concernée, le poids doit impérativement être une fonction noyau<sup>1</sup>. Cette expression peut être simplifiée comme suit, en introduisant la matrice d'adjacence Eulérienne  $\mathcal{A}_{w^f} \in \mathbb{W}^{M \times N}$  :

$$\rho_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q}. \quad (3.32)$$

Un exemple d'évaluation de la concentration de  $\mathbf{q}$  en dimension  $d = 1$  est présenté en figure 3.11.

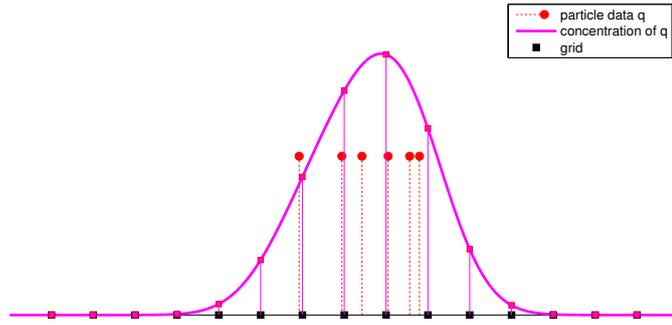


FIGURE 3.11 – Exemple d'évaluation de la concentration d'une propriété de graphe sur une grille Eulérienne. Concentration de  $\mathbf{q}$  sur la grille  $\mathcal{C}$  obtenue par  $\mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q}$ . Ici  $N = 6$ ,  $M = 16$ ,  $o = M$ , et la déviation standard de  $G$  est égale à la taille des mailles de  $\mathcal{C}$ .

Pour évaluer non plus la concentration de la propriété, mais son extrapolation, on utilise les poids d'adjacence Eulérienne comme des poids d'interpolation. Pour chaque  $p_i$ , la convolution obtenue est divisée par la somme des poids qui lui ont été appliqués.

1. L'intégrale d'une fonction noyau sur son domaine de définition est égal à 1.

Cette normalisation peut être exprimée simplement en introduisant la matrice de degré Eulérienne  $\mathcal{D} \in \mathbb{W}^{M \times M}$ , définie telle que :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \mathcal{D}_{mm} = \sum_j \mathcal{A}_{mj} \\ \mathcal{D}_{ml} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Finalement, en prenant pour exemple la vitesse Eulérienne exprimée sur la grille  $\mathcal{C}$  notée  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{dM}$ , nous obtenons l'expression :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u} \quad (3.34)$$

Cette expression s'apparente à une interpolation par pondération inverse à la distance où le nombre d'échantillons utilisés est égal à  $\mathcal{M}_o \mathcal{P}^T \mathbf{1}$ , et sous condition que  $w_{mj}^y$  décroît lorsque  $\|y_j - \mathbf{x}_{c_m}\|$  augmente.

**Discussion sur la fonction d'interpolation** En pratique, le choix de  $w$  est critique et peut conduire à des résultats très différents selon son type. La sélection et la paramétrisation de la fonction poids doit être faite selon le niveau de lissage attendu, et le type d'extrapolation souhaité pour une position éloignée de l'essaim. Idéalement, la fonction poids parfaite doit remplir les conditions suivantes :

- précision : l'évaluation de l'extrapolation de la propriété en un sommet du graphe doit être égale à la valeur de la propriété pour ce sommet. Ce qui se traduit par :  $(y_j = \mathbf{x}_{c_m} \Rightarrow u_j = u_{c_m}) \Leftrightarrow w(0) = \infty$ ,
- pertinence du vide et stabilité globale : pour une position éloignée de l'information disponible, c'est à dire loin de l'essaim), l'extrapolation de la propriété doit correspondre à la moyenne des données disponibles.
- continuité spatiale : dans la mesure où l'on considère une donnée continue, l'expression de la propriété sur la grille doit être suffisamment lisse.
- des dérivations mathématiques simples pour permettre des calculs simples.

La fonction poids  $w^y = \frac{1}{\|y_j - \mathbf{x}_{c_m}\|}$ , en dépit de sa précision et du fait qu'elle apparaisse comme un choix rationnel, est susceptible de générer de fortes variations autour des sommets du graphe, c'est à dire lorsque sa valeur tend vers l'infini. Pour améliorer la robustesse, il est préférable d'utiliser un noyau Gaussien  $G$ , malgré la perte de précision que cette fonction poids induit par lissage. Cela revient à limiter l'interpolation à une zone dépendant de la distance des particules aux mailles de la grille. De plus, cette fonction poids se révèle intéressante si la densité de particules est utilisée pour le calcul de la déviation standard à chaque position  $\mathbf{x}_{c_m}$ . Nous avons en effet vu que cette fonction noyau permet de calculer la concentration de particule sur cette même grille. Cette concentration donne une indication sur la taille *a priori* pertinente de la zone significative d'interpolation, c'est à dire la déviation standard de  $G$ . Pour illustrer ce propos, la figure 3.12 présente un exemple de l'évaluation de  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}$  en comparant cette dernière méthode, basée sur une déviation standard auto-adaptative, avec une déviation standard homogène. Cet exemple montre comment la méthode basée sur la densité fournit une évaluation plus robuste par rapport à l'interprétation naturelle que l'on peut se faire de l'existence continue d'une propriété de graphe donnée. Par contre, une telle fonction Gaussienne paramétrée par (et donc dépendante de) la densité rend la dérivation  $w'$  plus compliquée.

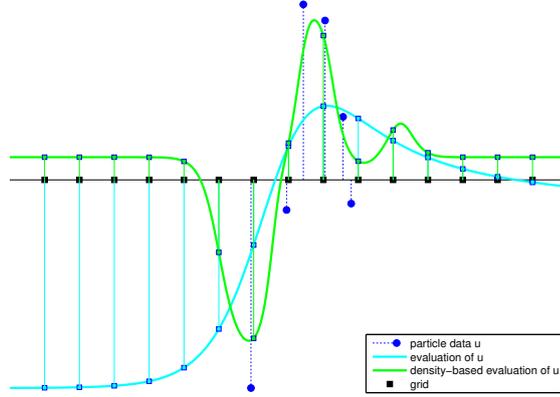


FIGURE 3.12 – Exemple d'évaluation d'une propriété de graphe sur une grille Eulérienne. Evaluation de  $\mathbf{u}$  sur la grille  $\mathcal{C}$  obtenue par  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}^y}^{-1} \mathcal{A}_{\mathcal{G}^y} \mathbf{u}$ . Ici  $N = 6$ ,  $M = 16$ ,  $o = M$ . La déviation standard de  $\mathcal{G}$  est égale à la taille des mailles de  $\mathcal{C}$  pour l'évaluation simple, et comme l'inverse du double de la densité ( $2\mathcal{A}_{\mathcal{G}^y} \vec{1}$ ) pour l'évaluation basée sur la densité.

### 3.3.4.1 Projection inverse

Un tel formalisme nous amène aussi à exprimer sur les sommets du graphe une quantité continue de la grille Eulérienne. En considérant la propriété de vitesse, dont on suppose ici qu'elle n'est pas une propriété des sommets du graphe, il est possible d'évaluer la valeur de  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}$  sur le graphe  $\mathcal{G}$  :

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathbf{u}_{\mathcal{C}}. \quad (3.35)$$

A supposer qu'on dispose d'un champs de vitesse Eulérien, mais pas de la vitesse des particules, cette équation permet d'obtenir une évaluation de la vitesse Lagangienne.

### 3.3.4.2 Remarques

Si nous nous sommes placés ici dans un contexte particulier, qui est la transition entre espaces Lagrangien et Eulérien, il est aussi possible d'y voir à travers ce formalisme une approche plus générique de transition entre graphes quelconques. Si l'on considère le graphe  $\mathcal{G}_2$  dont les sommets sont les mailles de la grille, sa matrice d'adjacence est alors  $\mathcal{A}^{\mathcal{G}_2} = \mathcal{M}_o$ . La matrice  $\mathcal{P}$  est alors une matrice d'interadjacence entre deux graphes quelconques.

### 3.3.5 Différenciation

Afin de faire face aux techniques d'analyse vues dans les sections 2.2 et 2.3, nous présentons ici les opérations de dérivation, par rapport à certaines propriétés  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  définies sur les sommets du graphe, écrites sur la base du même formalisme. Tout d'abord, nous rappelons que l'équation 3.30 a permis de montrer comment l'adjacence peut être utilisée pour évaluer de nouvelles propriétés des sommets. Afin d'aider à la différenciation des équations de graphe, cette notation est légèrement modifiée pour inclure la propriété

des sommets concernée dans l'opérateur d'adjacence. Si l'on considère  $\psi$  et  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$  comme d'autres propriétés scalaires, on écrit :

$$\psi = \mathbf{A}_{w^f, \mathbf{d}} \mathbf{d} = \mathbf{A}_{w^f, \mathbf{d}} \vec{1}, \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{A}_{w^f, \mathbf{d}} = \left[ w_{ij}^f d_j \right] \circ \mathbf{A}$ . Le nouveau poids représenté par  $w^f \cdot \mathbf{d}$  se détaille ainsi :

$$(w^f \cdot \mathbf{d})_{ij} = w(f_i, f_j) d_j. \quad (3.37)$$

On notera la dérivée des poids :  $w_{ij}^f = \frac{\partial w_{ij}^f}{\partial f_j} = -\frac{\partial w_{ij}^f}{\partial f_i} \in \mathbb{W}^d$ .

La dérivation  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{f}} \in \mathbb{W}^{d \times N \times N}$  se traduit finalement par<sup>2</sup> :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{f}} = -\mathbf{D}_{w^f \cdot \mathbf{d}} + \mathbf{A}_{w^f \cdot \mathbf{d}}, \quad (3.38)$$

En utilisant la matrice Laplacienne du graphe  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{f}} = -\mathbf{L}_{w^f \cdot \mathbf{d}}. \quad (3.39)$$

Il est ainsi possible d'écrire simplement des équations d'évolution et leur dérivation. Dans le cas où  $\mathbf{d} = \vec{1}$ , on peut remarquer que  $\mathbf{L}_{w^f \cdot \mathbf{d}}$  est symétrique. Dans le cas où  $\mathbf{d}$  est quelconque, la transposée de  $\mathbf{L}_{w^f \cdot \mathbf{d}}$  s'écrit :

$$\mathbf{L}_{w^f \cdot \mathbf{d}}^T = \mathbf{D}_{(w^f \cdot \mathbf{d})^T} - \underline{\mathbf{d}} \mathbf{A}_{w^f}^T. \quad (3.40)$$

La dérivation de quantités Eulériennes  $\psi_{\mathcal{C}}$  est différente puisque la fonction de poids n'est plus doublement dépendante aux sommets du graphe comme pour la formulation vue ci-dessus. Par conséquent, la matrice de degré ne fait pas son apparition, et la dérivation par  $\mathbf{f}$  de la convolution de  $\mathbf{d}$  sur  $\mathcal{C}$  (dont un exemple se trouve à l'équation 3.32) s'écrit simplement :

$$\frac{\partial \psi_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{A}_{w^f \cdot \mathbf{d}}. \quad (3.41)$$

2. En considérant  $\mathbf{A}$  indépendante de  $\mathbf{f}$ , ce qui est une approximation dans le cas où  $\mathbf{f} = \mathbf{y}$  comme vu à l'équation 3.27, où  $\mathbf{A}$  dépend la matrice de présence des sommets sur les mailles  $\mathcal{P}$ .

### 3.4 Modélisation de la dynamique de la foule retenue et contribution

Nous avons vu en section 3.1 que l'évolution de la foule et des piétons est gouvernée, en plus de la poursuite d'objectifs, par des propriétés métaboliques, des comportements psychologiques et des stratégies de groupe. La contribution apportée dans ce document à la modélisation de la foule s'appuie sur les modèles agents analogues à la loi de Newton des corps en mouvement, tout comme dans [46]. Nous nous basons donc sur le système d'évolution suivant pour chaque individu  $p_i$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} & = u_i, \\ m_i \frac{\partial u_i}{\partial t} & = \mathbb{F}_i. \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\quad (3.43)$$

La force totale appliquée aux piétons,  $\mathbb{F}$ , rassemble les contraintes qui lui sont appliquées. On propose ici de décomposer cette force en cinq composantes majeures :

$$\mathbb{F} = \underbrace{\mathbb{F}_{\text{will}}}_{\text{source}} + \underbrace{\mathbb{F}_{\text{fatigue}}}_{\text{friction}} + \mathbb{F}_{\text{obstacle}} + \underbrace{\mathbb{F}_{\text{body}} + \mathbb{F}_{\text{sociologique}}}_{\text{interactions}}. \quad (3.44)$$

Dans un premier temps, les individus cherchent à atteindre une certaine position avec un niveau de détermination donné. Ils vont développer une certaine puissance correspondant à ce niveau de détermination. La direction pour atteindre l'objectif est exprimée par un vecteur unitaire  $\mathbf{W}$ , et le niveau de détermination par  $\alpha$ , amenant à l'expression de la force source du modèle :  $\mathbb{F}_{\text{will},i} = \alpha_i W_i$ , ce qui donne dans l'espace de la foule :

$$\mathbb{F}_{\text{will}} = \underline{\alpha} \mathbf{W}. \quad (3.45)$$

Un piéton peut cependant être ralenti par des propriétés métaboliques puisque tout déplacement consomme de l'énergie<sup>3</sup>. Ceci peut être exprimée par  $\mathbb{F}_{\text{fatigue},i} = -k_i u_i$ , ce qui donne dans l'espace de la foule :

$$\mathbb{F}_{\text{fatigue}} = -\underline{k} \mathbf{u}, \quad (3.46)$$

où  $k$  est le coefficient de friction de la foule. Notons tout de même que cette consommation d'énergie liée au déplacement peut aussi être d'ordre psychologique. Selon les normes sociales ayant cours, la différence entre la vitesse réelle et une certaine vitesse considérée comme « normale » peut aussi entraîner une consommation énergétique relative à la « timidité » du piéton.

Cette modélisation existe dans la littérature (voir section 3.1.5.1, équation 3.3). Le plus souvent, les termes  $\mathbb{F}_{\text{will}}$  et  $\mathbb{F}_{\text{fatigue}}$  sont unifiés en un seul terme :

$$\mathbb{F}_{\text{intrinsèque}} = \underline{m\tau}^{-1} (\underline{\mathbf{u}}^0 \mathbf{W} - \mathbf{u}), \quad (3.47)$$

où  $\tau \in \mathbb{R}^N$  est le temps caractéristique de réactivité de la foule, et  $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^N$  un scalaire indiquant la valeur de vitesse souhaitée par l'individu.

3. On suppose naturellement que la foule est un système entropique.

### 3.4.1 Forces corporelles

Lorsque des individus, modélisés comme des disques, entrent en collision, ils génèrent une pression sur leur surface de contact résultant en une force de répulsion. Cette force est ainsi purement mécanique. Nous reprenons la formulation introduite dans [46] de répulsion mécanique entre deux piétons se situant aux positions  $y_i$  et  $y_j$ , aussi vue à l'équation 3.4. En notant :

$$\mathbf{b}_{ij}(y_i, y_j) = g(r_{ij} - D_{ij})n_{ij}, \quad (3.48)$$

où on rappelle que  $r_{ij}$  est la somme des rayons des deux individus,  $D_{ij}$  est la distance les séparant,  $n_{ij}$  est leur vecteur unitaire relatif, et enfin que  $g$  est une fonction identité lorsque son argument est positif, et est nulle si l'argument est négatif. La force de répulsion mécanique s'écrit ainsi dans l'espace de la foule :

$$\mathbb{F}_{\text{body repulsion}} = \mathbf{A}_{\mathbf{b}^\nu} \boldsymbol{\kappa} \quad (3.49)$$

Une caractéristique mécanique intéressante des individus est que, contrairement à des corps élastiques, leur collision est fortement non conservative. Lorsqu'ils se percutent, il est facile d'observer que les piétons ont tendance à marquer un temps d'arrêt pour reconnaître l'évènement. Ceci se traduit par une limitation de la vitesse tangentielle des individus [46]. Cet aspect est pris en compte dans le terme de friction mécanique de l'équation 3.4.

$$\mathbf{b}_{\text{slow},ij}(y_i, y_j, u_i, u_j) = g(r_{ij} - D_{ij})((u_j - u_i) \cdot t_{ij})t_{ij}. \quad (3.50)$$

où on rappelle que  $u_i$  et  $u_j$  sont les vitesses des individus considérés, et que  $t_{ij}$  est leur vecteur relatif tangentiel unitaire ( $t_{ij}n_{ij} = 0$ ).

Nous obtenons donc la force corporelle de dissipation suivante dans l'espace de la foule :

$$\mathbb{F}_{\text{body slow}} = \mathbf{A}_{\mathbf{b}_{\text{slow}}^{\nu, \mathbf{u}}} \boldsymbol{\nu}, \quad (3.51)$$

où  $\nu \in \mathbb{R}$  est un coefficient de friction dont la valeur est supérieure à  $k$ . La force corporelle totale est alors :

$$\mathbb{F}_{\text{body}} = \mathbf{A}_{\mathbf{b}^\nu} \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}_{\mathbf{b}_{\text{slow}}^{\nu, \mathbf{u}}} \boldsymbol{\nu}. \quad (3.52)$$

### 3.4.2 Force d'obstacle

Les murs et obstacles rencontrés sur un parcours génèrent, en plus de l'impact sur la planification de chemin, une certaine répulsion. Cette répulsion a, tout comme la répulsion entre individus, deux causes : l'une de précaution, l'autre mécanique. Dans [46], l'auteur propose une formulation de cette force identique à celle qui gouverne l'interaction entre individus. Nous réutilisons cette force en exprimant la fonction :

$$\mathcal{O}_i(y_i) = (a_i e^{\frac{r_i - D_{i\mathcal{W}}}{b_i}} + \kappa g(r_i - D_{i\mathcal{W}}))n_{i\mathcal{W}} + \nu g(r_i - D_{i\mathcal{W}})(u_i \cdot t_{i\mathcal{W}})t_{i\mathcal{W}}, \quad (3.53)$$

où l'indice  $\mathcal{W}$  vient remplacer l'indice  $j$ , signifiant que le point d'obstacle le plus proche est considéré en lieu et place de  $y_j$ . Cette fonction devient dans l'espace de la foule la force individuelle de répulsions aux obstacles suivante :

$$\mathbb{F}_{\text{obstacle},i} = \mathcal{O}_i. \quad (3.54)$$

Dans l'espace de la foule, cette force devient :

$$\mathbb{F}_{\text{obstacle}} = \mathcal{O}. \quad (3.55)$$

Le point le plus critique de cette approche est de pouvoir disposer de  $D_{i\mathcal{W}}$ ,  $n_{i\mathcal{W}}$  et  $t_{i\mathcal{W}}$  pour tout  $y_i$ . Nous suggérons ici qu'un individu prend en compte uniquement l'obstacle qui lui est le plus proche. Cette proximité peut être pris en compte en utilisant la méthode de résolution de l'équation eikonale vue en section 3.1.2.3 et plus spécifiquement à l'équation 3.1. En effet, la distance  $\mathbf{D}_{\mathcal{W},\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^M$  est calculée sur  $\mathcal{C}$  en spécifiant  $t(\mathbf{x}_{c_{\mathcal{W}}}) = 0$  s ( $c_{\mathcal{W}}$  étant l'ensemble des mailles marquées comme obstacle) et  $F$  homogène. De cette façon, on dispose en tout point de la grille de la distance, et par le biais à son gradient, de la direction au mur le plus proche  $\mathbf{n}_{\mathcal{W},\mathcal{C}}$ . Une fois obtenues ces données dans l'espace Eulérien, on les traduit dans l'espace Lagrangien grâce à l'équation 3.35 :

$$\mathbf{D}_{\mathcal{W}} = \mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathbf{D}_{\mathcal{W},\mathcal{C}}, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{n}_{\mathcal{W}} = \mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathbf{n}_{\mathcal{W},\mathcal{C}}, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{t}_{\mathcal{W}} = \mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathbf{t}_{\mathcal{W},\mathcal{C}}. \quad (3.58)$$

avec  $w$  une fonction poids quelconque dans la mesure où  $D_{\mathcal{W}}(\mathbf{x})$  est quasi linéaire et donc peu soumise aux problèmes d'évaluation vus précédemment en section 3.3.4.

Une illustration de cette modélisation est proposée en figure 3.13. Dans cette simulation, les propriétés des  $N = 100$  individus  $p_i$  sont :  $m_i = 70$  kg,  $\alpha_i = 140$  N,  $k_i = 140$  kg.s<sup>-1</sup>,  $a_i = 2000$  N,  $b_i = 0.08$  m,  $\kappa_i = 2000$  N.m<sup>-1</sup>,  $\nu_i = 2000$  N.s.m<sup>-2</sup>, et  $0.25$  m <  $r_i$  <  $0.35$  m.

### 3.4.3 Contribution à la modélisation du continuum social

Plusieurs auteurs [54, 139] se sont penchés sur la caractéristique continue de la foule. Les travaux qui en ont découlé n'ont cependant considéré cette continuité qu'au sein d'une description Eulérienne. Nous proposons ici d'étendre le concept de continuité à la description Lagrangienne.

#### 3.4.3.1 Minimisation de la densité

Les foules humaines laissent apparaître des comportements continus à travers, notamment, des lois sociologiques. Les piétons tendent à prévenir les collisions et respecter des normes sociales en minimisant une certaine distribution de présence. Cette fonction de présence peut être vue comme la densité d'individu  $\rho(\mathbf{x})$ , qui correspond à une estimation continue de la quantité de personnes. La minimisation de la présence au cours du temps selon la position  $\mathbf{x}$  entraîne une descente de gradient qui se traduit par une attraction selon  $-\nabla\rho(\mathbf{x})$ . De façon directe ou indirecte, le gradient de densité est le terme qui apparaît le plus souvent dans les modèles continus de foule, notamment dans celui de [54] que nous avons vu en 3.2. Pour obtenir une description Lagrangienne de ce gradient, nous nous appuyons sur le formalisme de graphe présenté précédemment.

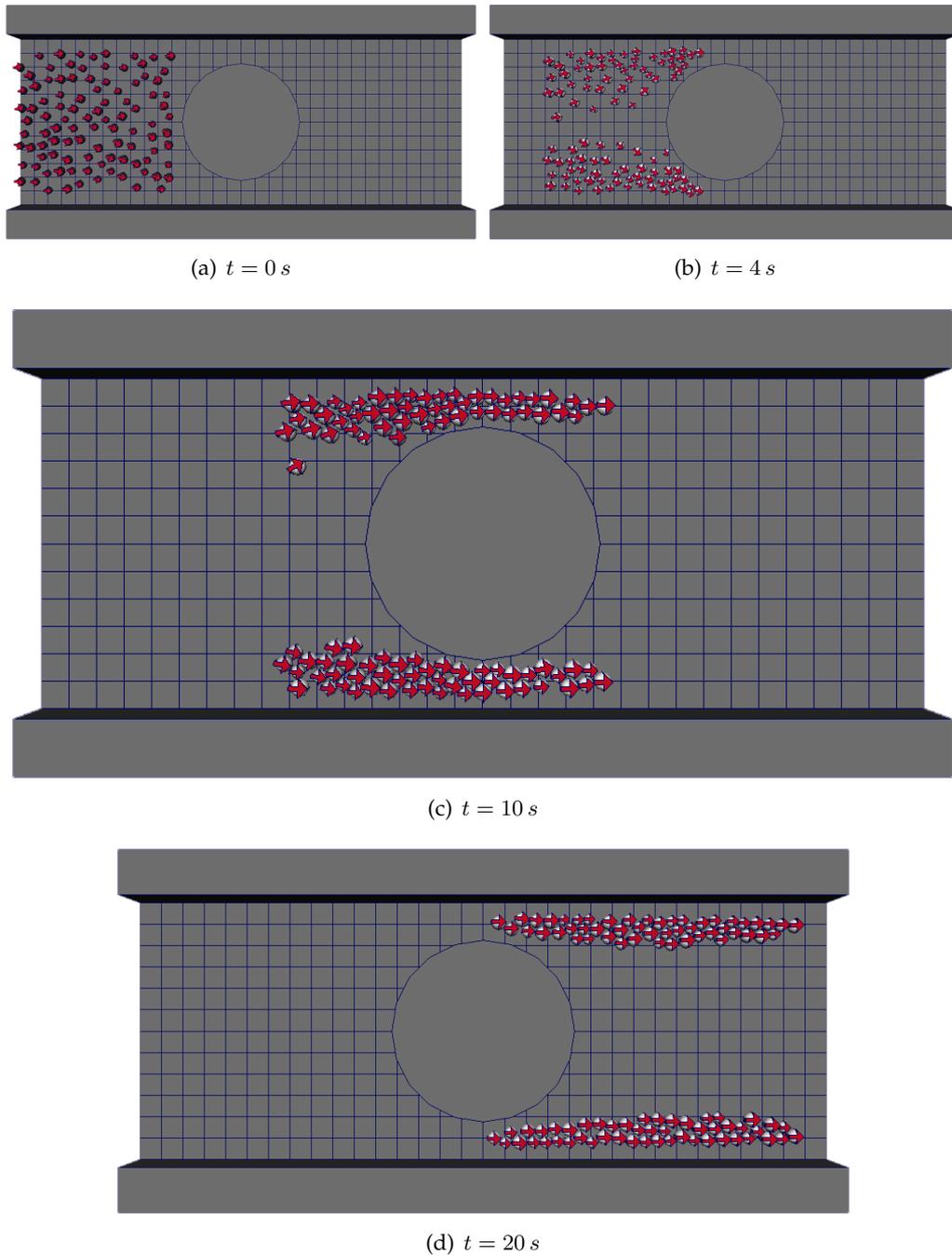


FIGURE 3.13 – **Simulation de la modélisation agent purement mécanique.** Intégration numérique du modèle dirigé par la force totale :  $\mathbb{F}_{\text{will}} + \mathbb{F}_{\text{fatigue}} + \mathbb{F}_{\text{obstacle}} + \mathbb{F}_{\text{body}}$ . La planification de chemin permet de diviser la foule en deux groupes homogènes. L'absence de considérations sociales s'apparente à la simulation de « billes » semi-rigides, limitant ainsi l'apparition de congestion.

### 3.4. Modélisation de la dynamique de la foule retenue et contribution

En exploitant le fait que la densité peut s'exprimer  $\rho = \mathbf{A}_{G^y} \mathbf{q}$ , et en définissant le gradient d'une propriété Lagrangienne comme étant :

$$\nabla \cdot = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (3.59)$$

nous obtenons l'expression :

$$\nabla \rho = \mathbf{A}_{G^y} \mathbf{q}. \quad (3.60)$$

Le terme de répulsion sociale continue s'écrit alors simplement dans l'espace Lagrangien :

$$\mathbb{F}_{\text{sociologique}} = -\underline{\beta} \mathbf{A}_{G^y} \mathbf{q}. \quad (3.61)$$

Il est important de souligner ici que nous obtenons une modélisation quasiment indépendante de la description de la foule. Qu'elle soit représentée par des agents ou de manière continue, la même relation peut s'appliquer. S'il est possible d'utiliser l'expression isotrope de la fonction gaussienne présentée à l'équation 3.29, nous préférons utiliser ici une formulation différente. Les individus ne se perçoivent en effet pas comme des entités isotropes. Leur présence est étendue selon leur orientation, ce qui se traduit dans les faits par une présence frontale à l'individu plus importante que sa présence latérale. Nous préférons ainsi une formulation anisotrope du noyau Gaussien par l'expression :

$$\mathbf{G}_{ij}^y = \frac{1}{\sigma_{f,i} \sigma_{l,i} 2\pi} e^{-\frac{1}{2} \|y_j - y_i\|_{R_{\theta_i}^T \underline{\sigma}_i}^{-2} R_{\theta_i}}, \quad (3.62)$$

avec :

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{f,i} & 0 \\ 0 & \sigma_{l,i} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

où  $\theta$  est l'orientation de l'individu,  $\sigma_f$  la déviation standard frontale du noyau Gaussien, et  $\sigma_l$  sa déviation standard latérale. Si l'on considère un individu dont la présence est modélisée de manière isotrope, nous obtenons sa densité associée illustrée en figure 3.14. L'anisotropie de la présence d'un individu consiste alors à étendre cette gaussienne dans le

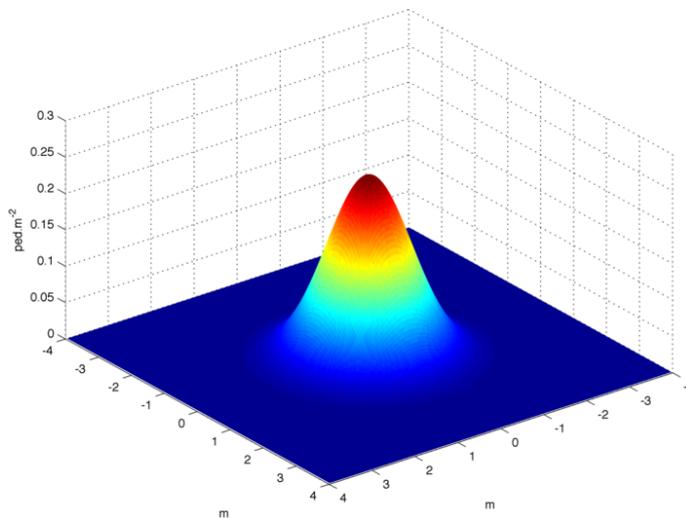


FIGURE 3.14 – Densité associée à un individu à la présence isotrope.  $\sigma = 0.8m$ .

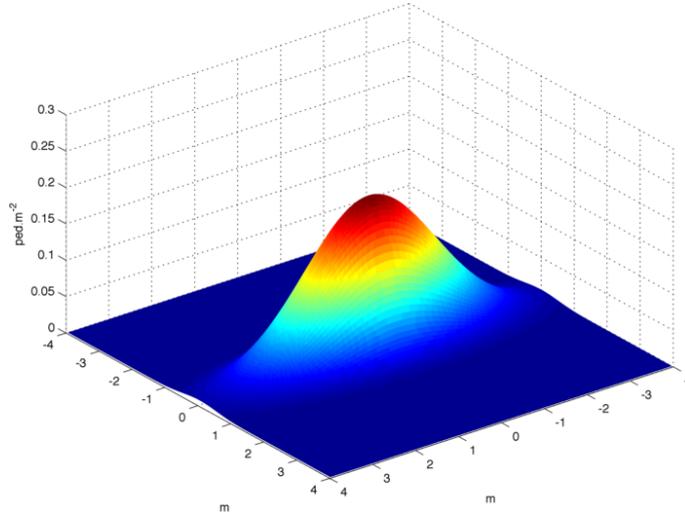


FIGURE 3.15 – Densité associée à un individu à la présence anisotrope.  $\sigma_f = 1.5m$ ,  $\sigma_l = 0.5m$  et  $\theta = 0 \text{ rad}$ .

sens frontal, comme illustré en figure 3.15. Les valeurs de  $\sigma_{f,i}$  et  $\sigma_{l,i}$  peuvent être constantes, en donnant ainsi une forme arbitraire à la distribution de présence. Mais on peut aussi considérer que l'ellipse de présence significative dépend de la vitesse à laquelle évolue l'individu  $p_i$ . Le fait d'avancer dans une certaine direction entraîne une anticipation de la présence frontale. Concrètement, plus vite un piéton marche, plus il prend de précautions vis-à-vis de ce qui lui fait face en fonction de sa vitesse  $u_i$  et de sa capacité de réaction  $\tau_i$ . La déviation standard anisotrope peut alors s'écrire :

$$\underline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_{f,i} + a_i \|u_i\| \tau_i & 0 \\ 0 & \sigma_{l,i} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

où  $a_i \in \mathbb{R}$  est un coefficient d'anticipation propre à l'individu et  $\|u_i\|$  est la norme de sa vitesse.

Nous illustrons la modélisation par gradient de densité anisotrope en comparant sa simulation illustrée en figure 3.17 avec la modélisation proposée par [46] dont un aperçu de la simulation se trouve en figure 3.16. Pour la simulation par gradient de densité, la déviation standard des individus  $p_i$  est paramétrée par :  $\underline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.8 m & 0 \\ 0 & 0.4 m \end{bmatrix}$  et l'intensité de cette force par :  $\beta_i = 70 \text{ N.m}^{-3}.\text{ped}^{-1}$ .

### 3.4.3.2 Approche spectrale

La stratégie de répartition de la foule ne peut évidemment pas se réduire à un unique paramètre  $\underline{\sigma}$  caractérisant un seul champ de vision de la densité d'individus. Un piéton cherche en réalité à minimiser la distribution de personnes selon différentes échelles représentées chacune par les paramètres  $\sigma_f$  et  $\sigma_l$ . Autrement dit, nous faisons l'hypothèse qu'un piéton a une perception multi-résolution de son environnement, et que chacune d'elle est associée à une valeur d'énergie correspondant à  $\beta$ . En considérant chacune de ces résolutions comme étant indicée par  $k$ , on note  $\beta_k$  le coefficient de minimisation de la

### 3.4. Modélisation de la dynamique de la foule retenue et contribution

---

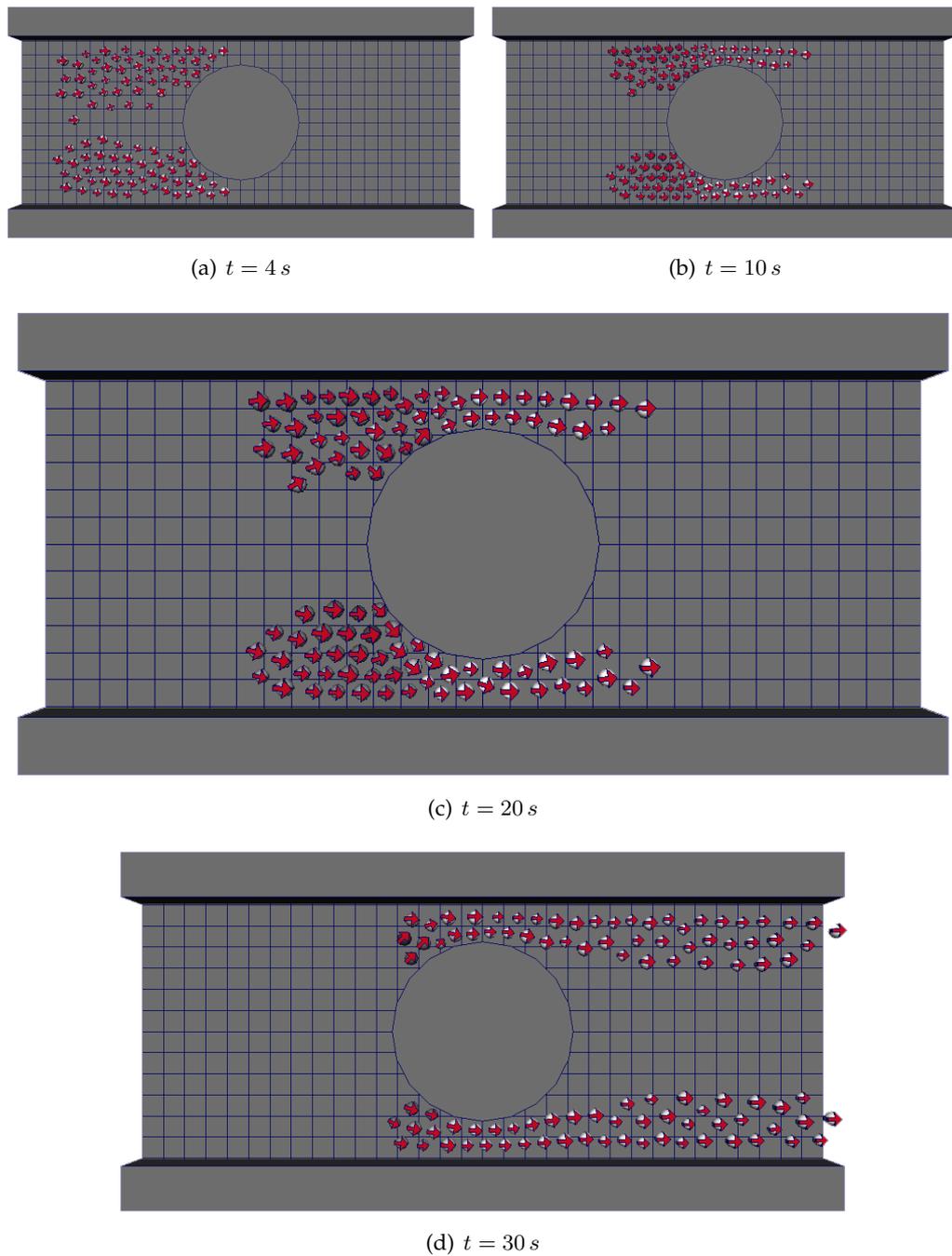


FIGURE 3.16 – Simulation du modèle proposé par [46]. La force sociale crée une congestion *respectueuse*, puisqu'aucun état de panique n'est ici simulé.

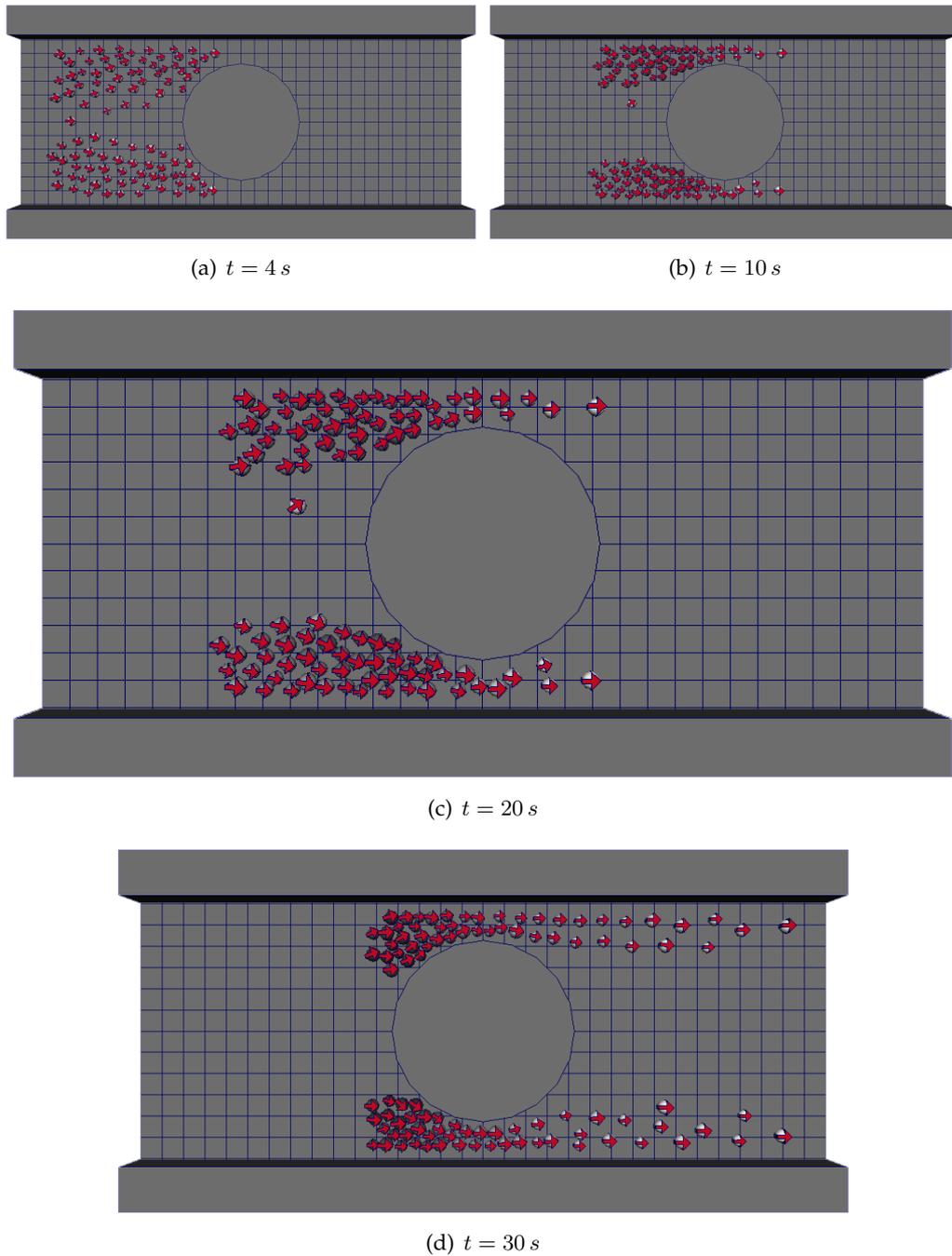


FIGURE 3.17 – Simulation de la modélisation agent par minimisation de densité anisotrope. Intégration numérique du modèle dirigé par la force totale :  $\mathbb{F}_{\text{will}} + \mathbb{F}_{\text{fatigue}} + \mathbb{F}_{\text{obstacle}} + \mathbb{F}_{\text{body}} - \underline{\beta} \mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q}$ . Par rapport à la simulation de la figure 3.16, le niveau de congestion est à peu près identique, mais on observe une plus grande variabilité sociale.

densité associé à la résolution spatiale :

$$\underline{\sigma}_i^k = \begin{bmatrix} \sigma_{f,i}^k & 0 \\ 0 & \sigma_{l,i}^k \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Avec  $\mathbf{G}_k$  le noyau gaussien de déviation standard  $\underline{\sigma}_i^k$ , la force de continuum sociologique s'écrit alors :

$$\mathbb{F}_{\text{sociologique}} = - \sum_k \beta_k \mathbf{A}_{\mathbf{G}_k^{\prime y}} \mathbf{q}. \quad (3.66)$$

### 3.4.3.3 Discussion

Cette modélisation de la stratégie de répartition de la foule offre plusieurs avantages méthodologiques. En premier lieu, elle permet d'insuffler facilement plusieurs échelles (définies par  $\underline{\sigma}_i^k$ ) de dynamique dont l'importance est paramétrée par  $\beta_k$ . La plus petite échelle supposée, microscopique, est de l'ordre de l'envergure du piéton  $\sigma_{f,i} \sim \sigma_{l,i} \sim r_i$ . La plus grande est elle de l'ordre des dimensions de l'environnement dans lequel il évolue. Du point de vue de l'analyse, cette modélisation offre plus de souplesse. Dans le cas de l'estimation de paramètres notamment, il est alors possible de s'appuyer sur une répartition plus fine de l'énergie dédiée à l'espacement puisque étant distribuée sur différentes échelles. En outre, cette formulation est robuste au type de descripteur choisi et permet l'utilisation de ce modèle de façon transparente selon la description utilisée. Dans le cas isotrope notamment ( $\sigma = \sigma_i = \sigma_{f,i} = \sigma_{l,i}$ ), il est ainsi aisé d'intégrer ce terme sur plusieurs grilles Eulériennes  $\mathcal{C}^k$ , de dimension  $\Delta \mathbf{x}^k = \sigma^k$ . Ce point s'avère intéressant dans l'optique de confronter des modélisation agents ou continue de la foule.

### 3.4.3.4 Sensitivité des agents

La force sociale proposée consiste à minimiser la densité entourant les piétons. Seulement, les individus ne sont pas forcément sensibles à tout ce qui les entoure vis-à-vis de leur stratégie de déplacement [50]. En se basant sur le fait que la vision et l'ouïe sont les principaux sens utilisés pour le déplacement, il convient de prendre en compte que le cumul de ces sens n'est pas pleinement opérationnel tout azimut. Un angle limite d'interaction  $\phi$  est ainsi défini, qui délimite la zone sensitive d'un piéton. Cette zone est illustrée en figure 3.18. En conséquence, le gradient du noyau gaussien de l'équation 3.66 ne s'exprime pas en toute circonstance. Si un individu se situe dans l'angle mort d'un piéton, celui-ci ne sera pas pris en compte puisque non senti, et la valeur de la fonction poids de la matrice d'adjacence est alors nulle :

$$\mathbf{G}_{ij}^{\prime y} = \begin{cases} \mathbf{G}_{ij}^{\prime y} & \text{si } n_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} < \sin \phi_i \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.67)$$

Cet angle revient en quelque sorte à considérer la densité de l'individu comme illustré en figure 3.19. L'angle  $\theta$  d'orientation de l'individu peut être considéré de plusieurs manières. En supposant qu'un individu est orienté selon sa vitesse, on peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} = \frac{u_i}{\|u_i\|}. \quad (3.68)$$

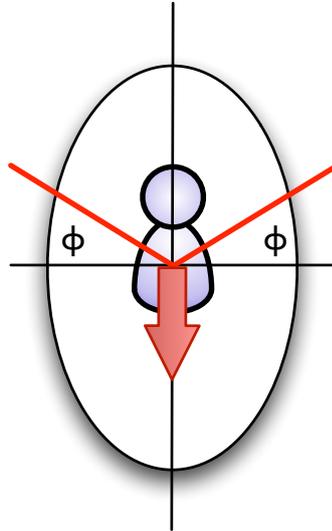


FIGURE 3.18 – Zone sensitive d'un piéton. Les azimuts limites sont présentés en rouge.

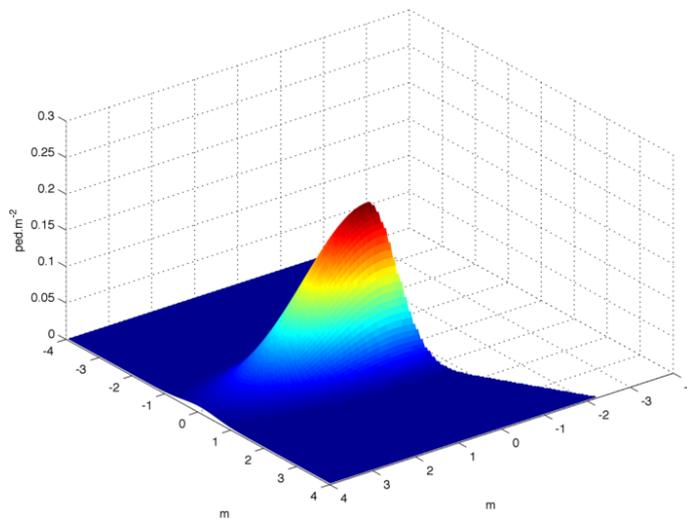


FIGURE 3.19 – Densité associée à un individu à la présence anisotrope.  $\sigma_f = 1.5m$ ,  $\sigma_l = 0.5m$ ,  $\theta = 0 rad$ , et  $\gamma = 30 \frac{2\pi}{360} rad$ .

Mais si l'on considère qu'un individu est essentiellement concentré sur son objectif, et donc orienté vers celui-ci, on écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} = W_i. \quad (3.69)$$

#### 3.4.4 Conclusion

Nous avons proposé dans cette partie une modélisation Lagrangienne non linéaire de la foule s'appuyant sur des mécanismes propres aux agents et une dynamique comportementale quasi-invariante de la description de la foule. Elle permet de prendre ainsi en compte un large panel d'agissements observables aussi bien par une foule dense qu'un ensemble plus restreint d'individus. Le modèle est en outre dérivable puisque non soumis à des règles conditionnelles, le rendant apte à être utilisé pour diverses techniques d'analyse.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la problématique de la modélisation de la foule sous des angles divers. L'état de l'art des méthodes existantes montre qu'il existe une grande variété dans les approches de description, représentation et évolution de la foule. L'idée de disposer d'une modélisation *idéale* de ce phénomène, capable de répondre à tout type de circonstances ou de dynamiques reste encore peu vraisemblable. La plupart des modèles existants sont conçus pour répondre à des besoins spécifiques de simulation, et aucun d'entre eux n'a l'ambition ni le pouvoir de modéliser la « Foule » au sens total du terme. La synthèse de mouvements de foules est donc sujette à certaines réserves dépendant des hypothèses sur lesquelles se fonde sa modélisation, et dont la validité est plus ou moins correcte selon les scènes souhaitées.

Les approches basées données permettent ainsi de soulager le poids de la mission confiée à la modélisation et de ses hypothèses sous-jacentes. L'apprentissage qui peut être fait de la foule sur la base de supports divers (capture de mouvements, vidéos, statistiques), permet de guider ou calibrer certains modèles conçus justement pour réserver un degré de liberté sur leur vraisemblance selon les situations. La pertinence du modèle vis-à-vis du type de données réelles reste toutefois un point critique. La question de savoir si celui-ci est apte à se conformer à certaines observations de la foule constitue l'enjeu principal de la problématique d'estimation et de contrôle vues dans le chapitre précédent. Ces deux problématiques justement sont un point d'entrée pour mesurer quantitativement la qualité d'un modèle et son aptitude à reproduire le phénomène auquel il est dédié. La mise en place d'un tel banc d'essai est une tâche difficile, car pour être complet il nécessiterait de disposer d'un ensemble exhaustif d'observations, chacune pondérée par une valeur d'attachement au phénomène particulier observé, et toutes confrontables à tous les types de modélisation. Dans ce sens, nous avons ici introduit une manière de mettre en relation différents types de modèles et d'observations grâce au formalisme des graphes. Nous nous penchons désormais sur les méthodes d'acquisition de données de formes diverses, mais découlant toute du support le plus commun à l'analyse de la foule : l'image ainsi que les séquences vidéos qu'il est possible d'en faire.

# 4

## Analyse de vidéo de foule

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Etat de l'art des méthodes de vision dédiées à la foule</b>	<b>86</b>
4.1.1	Méthode de vision par représentation Lagrangienne de la foule	87
4.1.2	Méthodes de vision par estimation du mouvement	89
<b>4.2</b>	<b>Contribution à l'analyse de foule par la vidéo</b>	<b>96</b>
4.2.1	Estimation du potentiel d'inconfort par assimilation variationnelle	97
4.2.2	Experimentations et discussion	100
4.2.3	Conclusion et perspectives	107
<b>4.3</b>	<b>Base de données de foules</b>	<b>110</b>
4.3.1	Typologie des scénarios	111
4.3.2	Chaîne de production des vidéos	111
4.3.3	Résultats	113
4.3.4	Discussion	114
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>116</b>

---

L'acquisition de données relatives aux foules est une tâche complexe. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les variables pouvant caractériser la foule sont nombreuses et il est difficile de déterminer *a priori* lesquelles d'entre elles contiennent le plus d'information. De prime abord toutefois, la trajectoire des individus semble être l'information la plus précieuse puisqu'elle résume à elle seule les deux états élémentaires définissant une particule Lagrangienne, dont un piéton se rapproche le plus dans sa représentation la plus simple, que sont la position et la vitesse au cours du temps. Acquérir une telle information n'est malheureusement pas une opération triviale. Il peut paraître naturel de s'inspirer de la technique largement répandue de la capture de gestuelle d'humains par pose de capteurs. Appliquée à la foule, elle consisterait alors à suivre *in situ* les piétons grâce à des capteurs de mouvement. Ces capteurs, pour peu qu'ils soient suffisamment précis et excluant donc le géo-positionnement, sont néanmoins coûteux et intrusifs, et exigent une mise en oeuvre lourde dans le cas de la foule [99, 105].

Dès lors, une source d'information inépuisable se dégage : l'observation *ex situ* par vision du phénomène. L'acquisition de séquences temporelles d'images, autrement dit de vidéo, est dans la plupart des cas sans impact sur le phénomène étudié. Cette technique propose ainsi à moindre coût pécunier des données spatio-temporelles relatives au sujet observé. Cependant, à l'inverse de méthodes de mesures *in situ*, l'information recherchée n'est pas directement obtenue et doit être retrouvée à partir de l'information de luminance des images. Cela ouvre la voie à différentes méthodes d'analyse permettant de remonter à

diverses informations considérées comme caractérisant le phénomène étudié. Nous aborderons ici certaines de ces méthodes, et leur utilisation dans le cadre de la problématique d'estimation vue dans le chapitre 2.

## 4.1 Etat de l'art des méthodes de vision dédiées à la foule

L'analyse de séquences vidéos de foules s'est récemment révélée comme une problématique ouverte et originale de la vision par ordinateur. Certaines applications immédiates de ce domaine se penchent notamment sur les systèmes de sécurité dans les espaces publics confinés ou larges. L'objectif du système de surveillance est alors d'être en mesure de procurer une information sur le flux de personnes à certains instants et selon certaines situations. A partir de cette information, il est dès lors possible de générer des statistiques précieuses concernant des zones dangereuses, comme les goulets d'étranglement, ou encore les passages étroits. Les systèmes de surveillance automatiques peuvent eux déclencher des alarmes lorsque des situations anormales ou dangereuses sont détectées. Il est aussi intéressant de noter que de tels outils participent pleinement à la compréhension du phénomène de foules. A titre d'exemple, Helbing *et al* [49] ont récemment pu développer une nouvelle théorie sur la dynamique de la foule grâce à l'analyse d'enregistrements vidéo du pèlerinage annuel de la Mecque. Une telle étude du comportement de la foule depuis des données réelles permet de faire ressortir les zones critiques (comme les zones de forte densité et pression) d'une scène et peut de plus contribuer à l'élaboration de modèles plus justes. Une autre application originale peut se trouver dans le domaine de l'infographie avec la production d'effets nouveaux. Courty et Corpetti [22] ont dans ce but conçu un système d'animation de foule basé données à partir de champs de vitesse, acquis par des techniques dérivant de l'estimation de mouvement par flot optique depuis des séquences vidéo de foules. Ces données, issues des méthodes de vision, permettent ainsi d'enrichir la simulation virtuelle de foules en proposant un degré de réalisme supplémentaire à la modélisation.

Plus généralement, le domaine de la vision par ordinateur offre depuis quelques décennies un champ d'étude du comportement individuel et collectif très riche. Si les facultés de cognition humaine sont capables d'assimiler relativement aisément l'information visuelle pour en déduire des informations diverses, il n'en va pas de même pour la vision par ordinateur. L'outil informatique n'est effet pas capable d'interpréter une image ou une vidéo, et n'y voit au mieux qu'une masse d'information indexée spatialement, et éventuellement temporellement, comme illustré en figure 4.1.

Cette masse d'information brute, constituée de pixels, nécessite d'être interprétée mathématiquement pour y reconnaître des informations s'approchant de notre représentation de l'image. Ces interprétations sont nombreuses et variées, et se concentrent la plupart du temps, pour être efficaces, sur un type particulier de représentation. Nous abordons ici certaines des techniques de vision dédiées directement ou indirectement à la représentation de l'individu et à l'analyse de la foule. Un état de l'art complet sur ce thème peut être trouvé dans [153, 56].



FIGURE 4.1 – Confrontation entre la perception humaine et informatique d'une image. A gauche se trouve une photographie du carrefour de Shibuya, au Japon. La perception et la cognition humaine est capable de distinguer, presque immédiatement, perspective, individus, bâtiments et route. L'image de droite (purement fictive) montre une vue d'esprit de la façon dont un ordinateur perçoit la photographie en l'absence d'interprétation mathématique. Autrement dit, l'image de gauche a à l'origine pour un ordinateur autant de sens que l'image de droite a pour nous humains : c'est-à-dire aucun.

#### 4.1.1 Méthode de vision par représentation Lagrangienne de la foule

##### 4.1.1.1 Reconnaissance d'individus à partir d'une image

La distinction de personnes au sein d'une foule se base principalement sur la détection de correspondances spatiales entre des attributs de l'image et les propriétés d'un individu [69]. Ces propriétés, ramenées à l'image, correspondent alors à des transformations spatiales telles que des gradients ou ondelettes, et s'inscrivent dans la problématique de *segmentation*. Certains des premiers travaux issus de ce domaine se sont penchés sur la reconnaissance faciale, notamment par l'utilisation d'algorithmes génétiques [130]. Il est néanmoins difficile de reconnaître à coup sûr la présence d'une personne dans une image dans la mesure où l'environnement peut présenter des formes similaires à un individu, et que ceux-ci peuvent se masquer les uns les autres. Ces problèmes sont connus respectivement sous les noms de faux-semblants et de phénomènes d'occultation. Dans [148], les auteurs proposent une méthode basée sur la détection de contours, ou *edgelets*, par apprentissage des propriétés graphiques récurrentes des individus. Cette approche est brièvement illustrée en figure 4.2.

##### 4.1.1.2 Méthodes de suivi, ou *tracking*

Les méthodes de suivi proposent de reconnaître et localiser au cours du temps des objets présents dans une séquence temporelle d'images [36]. Dans le cadre des foules humaines, elles trouvent un intérêt particulier dans la vidéo surveillance où le suivi des individus permet de contrôler automatiquement les allées et venues dans un espace. Tout comme la reconnaissance à partir d'une image, le suivi peut s'appuyer sur des propriétés graphiques telles que les couleurs ou des contours [75, 150]. La dimension temporelle ajoutée permet en outre de supposer une continuité de la présence et de la position des objets dans la scène, malgré les occultations. La consistance temporelle et spatiale des caractéristiques suivies peut dans certains cas s'obtenir à l'aide de méthodes de *cluste-*



(a) Apprentissage des propriétés graphiques et spatiales d'un individu  
 (b) Reconnaissance familière à des individus. L'accent est mis sur les occultations et les fausses alertes.  
 (c) Reconnaissance finale

FIGURE 4.2 – **Reconnaissance d'individus dans une image.** Les individus se masquent partiellement les uns les autres, et l'environnement affiche des similitudes spatiales avec l'existence d'une personne, rendant ainsi difficile la reconnaissance. Figures extraites de [148].

*ring* [112]. Certains auteurs [155] proposent d'utiliser des modèles virtuels humanoïdes dans un cadre probabiliste bayésien permettant de suivre l'état supposé d'individus par reconstitution de la scène et évaluation de vraisemblance comparative. D'autres méthodes largement utilisées consistent à exploiter les filtres de Kalman, ou encore les méthodes séquentielles de Monte-Carlo à travers le filtrage particulaire vu en section 2.2.2. L'idée est d'attribuer aux objets un état dont on connaît a priori l'évolution et de confronter cet *a priori* avec l'observation courante de la vidéo [55].

Nombre d'extensions à ce filtrage existent selon la nature des objets suivis. Elles cherchent à utiliser le maximum d'information connue sur le phénomène observé, physique ou sociale par exemple pour des individus, en prenant en compte divers comportements [103]. Certains travaux [23] utilisent en outre la temporalité de la séquence pour enrichir la vraisemblance grâce à la fréquence observable de marche d'un piéton. Les méthodes basées sur le filtrage particulaire présentent néanmoins des limitations importantes quant au suivi de l'état de la foule puisque leur coût numérique ne permet jusqu'à maintenant que de suivre dans le meilleurs des cas que quelques dizaines de piétons [89, 60] en l'absence d'*a priori* contextuel. Dans [14], Brostow et Cipolla font l'hypothèse que seul le mouvement apparent dans l'image est significatif pour identifier des individus dans le flux de la foule. Les travaux associés à l'étude de ce flux s'appliquent généralement à résoudre différents problèmes de détection d'évènements ou de variation de l'intensité du flux de piétons [1]. Dans ce cadre, des *modèles de Markov cachés* ont été combinés à l'analyse de ce flux pour la détection de situation particulières [3]. En utilisant justement ce contexte, à savoir l'environnement et la tendance globale de la scène, d'autres auteurs [2] ont pu atteindre la centaine d'individus suivis au cours du temps. Le fort degré d'occultation régnant au sein d'une séquence de foule dense, ainsi que le faible niveau de détail graphique dû à l'échelle macroscopique de la prise de vue, sont comme nous avons pu le voir des obstacles conséquents à la détection de personnes. Cependant, la méthode propose de tirer avantage de la densité d'états suivis en appliquant localement des règles probabilistes dirigées par le voisinage de ces états. Cette technique se fonde sur l'analogie, largement observée [46], pouvant exister entre des individus compactés et la mécanique granulaire, dont l'évolution statistique est beaucoup moins ouverte que celle des piétons. Une illustration du suivi généré par cette méthode est proposée en figure 4.3. Parmi les



FIGURE 4.3 – Suivi d'individus d'une foule dans un marathon. Malgré le nombre important d'individus, d'occultation et de faux-semblants, la méthode des auteurs est capable de suivre une centaine d'individus en s'appuyant sur le contexte de la scène. Figure extraite de [2].

informations probabilistes exprimées dans l'espace Eulérien, que les auteurs nomment *Floor Field*, se trouve le champ de vitesse global de la scène. Ce dernier est issu du flux moyen de déplacement de l'information graphique dans la séquence au cours du temps. Cette information dense de mouvement dans l'image donne une appréciation globale de la vitesse y existant. Si cette approche perd le caractère Lagrangien de l'information estimée, elle est en revanche moins coûteuse que les méthodes de suivi individuel. Nous nous intéressons dans la suite à ces approches Eulériennes de l'analyse vidéo.

#### 4.1.2 Méthodes de vision par estimation du mouvement

Dans le contexte des foules, l'analyse du mouvement est une alternative à la détection et au suivi individuel. Le domaine de l'estimation du mouvement apparent dans des séquences d'images, communément appelé *flot optique*, fait l'objet d'une grande attention de la part de la communauté de vision par ordinateur depuis une trentaine d'années, tant ses applications sont nombreuses. Le domaine de l'analyse de foules a ainsi également exploré ces approches. Dans [3, 142, 77] notamment, les auteurs proposent d'analyser le mouvement présent dans une vidéo pour détecter non plus des personnes mais des situations potentiellement anormales. Des travaux plus anciens existent néanmoins concernant la surveillance du mouvement des piétons dans une vidéo [19], notamment dans [25] où les auteurs proposent une technique automatique et temps réel de surveillance à partir de caméras en circuit fermé dans des espaces urbains. D'une manière plus générale, il convient de noter ici que l'estimation du mouvement en vision par ordinateur a pu trouver de nombreuses applications en dehors du domaine spécifique de l'analyse des foules. C'est par exemple le cas en imagerie médicale [24, 79], ou dans les domaines relatifs à l'étude des fluides et l'analyse du mouvement géophysique [21, 45, 95, 118, 121].

Plusieurs auteurs ont proposé des publications généralistes sur les applications issues de l'estimation de mouvement par vidéo [7, 8, 9, 37, 80], et plus récemment, une base de données permettant une confrontation des méthodes existantes a été proposée<sup>1</sup>.

L'estimation du mouvement offre donc une alternative intéressante à la détection

---

1. <http://vision.middlebury.edu/flow/data/>

Lagrangienne d'individus, mais nécessite un cadre applicatif spécifique. En effet, l'estimation du mouvement dans une séquence temporelle d'images ne permet d'obtenir qu'une information Eulérienne sur l'état du sujet. Dans le cadre de l'étude de phénomènes continus, tels que la météorologie ou l'océanographie, cette information est tout à fait adéquate. Cependant, pour l'étude de la foule, cette approche doit s'appliquer avec précaution. En effet une foule peut se représenter par un nombre varié de configurations, certaines pouvant mettre à défaut la représentation continue. Dans [106] par exemple, les auteurs définissent des *niveau de services* d'un flux de piétons, catégorisés par un flux libre, contraignant, dense ou congestionné. Les deux dernières catégories sont adaptées à une description Eulérienne et permettent une utilisation pertinente de l'estimation de champs mouvement. Cependant, une telle description se révèle plus hasardeuse pour les deux premières catégories de flux. La description du sujet est donc un facteur critique de la méthode de vision utilisée. Le cas Lagrangien, ou agent, est évidemment le plus robuste mais s'avère comme nous l'avons vu limité à un certain nombre d'individus en l'absence d'*a priori* forts sur leur évolution. L'estimation du mouvement d'une séquence est donc un outil générique, puisque indépendant du sujet, et puissant dans sa capacité à fournir de l'information sur l'ensemble de l'environnement observé, que ce soit de manière explicite (si la description Eulérienne du sujet s'accorde à la définition de l'image) ou implicite (si la description est Lagrangienne avec une densité de particules pouvant varier spatialement et temporellement). Tournons nous maintenant vers le fonctionnement des méthodes d'estimation du mouvement.

#### 4.1.2.1 Equation du flot optique

L'hypothèse la plus naturelle et la plus intuitive pour mesurer le mouvement dans une séquence d'images consiste à supposer que les éléments contenant l'information de luminance conservent leur intensité le long de leur déplacement. Cette hypothèse se traduit par l'équation suivante :

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{I}(\mathbf{x} + \mathbf{u} \delta t, t + \delta t), \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse recherchée, appelé dans ce contexte *flot optique*. Une version différentielle de cette hypothèse s'exprime par une dérivée Lagrangienne nulle de l'intensité lumineuse :

$$\frac{D\mathcal{I}}{Dt} = 0. \quad (4.2)$$

En traduisant la dérivée  $\frac{D}{Dt}$  par ses dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ , ceci nous amène à l'équation de transport de la luminance, aussi appelée équation contrainte du mouvement apparent (ECMA), ou encore *optical flow constraint equation* (OFCE) :

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathcal{I} = 0. \quad (4.3)$$

Cette relation, établissant un lien linéaire entre les gradients spatio-temporels de la luminance et la vitesse à estimer, constitue la base de nombreuses approches d'estimation du mouvement. Cependant, on peut constater que l'utilisation de l'ECMA nous confronte au problème d'*ouverture* : à travers cette relation, seule la composante de la vitesse  $\mathbf{u}$  projetée sur les gradients de la fonction de luminance est accessible. Par ailleurs, dans

les zones homogènes où les gradients sont nuls, une infinité de solutions sont possibles. Ces problèmes résultent du fait que  $\mathbf{u}$  appartient en règle générale à  $\mathbb{R}^2$  alors que nous ne disposons que d'une équation pour déterminer la vitesse. L'ensemble de ces difficultés a été largement abordé depuis les trois dernières décennies par de nombreux auteurs. On peut grossièrement classer les différentes techniques en deux familles : les approches globales, et les approches locales. Celles-ci sont présentées dans les sections qui suivent.

#### 4.1.2.2 Approches globales

Dans ce contexte, les travaux fondateurs de Horn & Schunck [53], proposent de fermer le problème de l'ECMA en supposant que le mouvement à estimer est régulier sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  de l'image. Pour cela, une fonction de régularisation  $f(\mathbf{u})$  est utilisée comme terme de pénalisation dans une fonctionnelle d'énergie à minimiser, donnant lieu à l'expression :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( \left\| \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathcal{I} \right\|^2 + \|f(\mathbf{u})\|^2 \right) dx. \quad (4.4)$$

Le champ  $\mathbf{u}$  qui minimise cette fonctionnelle est donc un compromis entre le respect de l'ECMA et celui de la contrainte de régularité  $f(\mathbf{u})$ . La fonction de régularisation proposée par Horn & Schunck s'appuie sur une pénalisation de la variation spatiale de  $\mathbf{u}$  à travers les gradients spatiaux de ses composantes :

$$\|f(\mathbf{u})\|^2 = \alpha^2 \|\nabla^T \otimes \mathbf{u}\|^2 = \alpha^2 (\|\nabla(\mathbf{u}e_1)\|^2 + \|\nabla(\mathbf{u}e_2)\|^2), \quad (4.5)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  est le paramètre de régularisation à fixer. Sur la base de cette fonction d'énergie, il est important de noter que de nombreux auteurs ont proposé des fonctions de régularisation alternatives, que ce soit sur les normes à utiliser ou sur le différentiel de quantité à pénaliser. Nous renvoyons le lecteurs aux nombreux articles [11, 15, 21, 44, 70, 78, 85, 87, 98, 119, 128, 127, 129, 136, 143, 144, 145, 149, 152] pour plus d'informations sur ce sujet et sur le site de l'université de Middlebury<sup>2</sup> traitant de l'évaluation des approches existantes.

Dans les travaux de Horn & Schunck, la minimisation de la fonctionnelle d'énergie se fait par résolution de l'équation d'Euler-Lagrange correspondante :

$$\Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\alpha^2} ((\nabla \mathcal{I} \otimes \nabla \mathcal{I}) \mathbf{u} + \partial_t \mathcal{I} \nabla \mathcal{I}) = 0, \quad (4.6)$$

où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est l'opérateur Laplacien, qui s'écrit en deux dimensions  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ . Supposons alors que l'image est décrite sur une grille  $\mathcal{C}$  régulière, composée des mailles  $c_m$  avec  $0 < m < M$  et  $M$  étant le nombre de pixels de l'image. Il est alors possible de proposer une expression en différences finies de cet opérateur. Dans le cas de différences finies centrées d'ordre 2 par exemple, il peut s'exprimer par  $\Delta \mathbf{u} = 4(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$  avec  $\bar{\mathbf{u}}$  représentant la valeur moyenne de  $\mathbf{u}$  au voisinage immédiat du pixel considéré. On obtient ainsi la relation suivante :

$$4\alpha^2 \bar{\mathbf{u}} - ((\nabla \mathcal{I} \otimes \nabla \mathcal{I} + 4\alpha^2) \mathbf{u} + \partial_t \mathcal{I} \nabla \mathcal{I}) = 0, \quad (4.7)$$

---

2. <http://vision.middlebury.edu/flow/data/>

dont l'inversion en  $\mathbf{u}$  donne :

$$\mathbf{u} = \frac{(\nabla \mathcal{I} \otimes \nabla \mathcal{I} + 4\alpha^2) (4\alpha^2 \bar{\mathbf{u}} - \partial_t \mathcal{I} \nabla \mathcal{I})}{\det(\nabla \mathcal{I} \otimes \nabla \mathcal{I} + 4\alpha^2)}. \quad (4.8)$$

En exprimant le déterminant, le flot optique s'exprime alors par l'équation :

$$\mathbf{u} = \frac{(\nabla \mathcal{I} \otimes \nabla \mathcal{I} + 4\alpha^2) (4\alpha^2 \bar{\mathbf{u}} - \partial_t \mathcal{I} \nabla \mathcal{I})}{4\alpha^2 (\|\nabla \mathcal{I}\|^2 + 4\alpha^2)}, \quad (4.9)$$

qui ne peut être résolue localement de façon instantanée puisque  $\mathbf{u}$  dépend de son voisinage  $\bar{\mathbf{u}}$ . Il est possible néanmoins de résoudre itérativement le problème comme suit :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{(\nabla \mathcal{I} \otimes \nabla \mathcal{I} + 4\alpha^2) (4\alpha^2 \bar{\mathbf{u}}^k - \partial_t \mathcal{I} \nabla \mathcal{I})}{4\alpha^2 (\|\nabla \mathcal{I}\|^2 + 4\alpha^2)}, \quad (4.10)$$

en incrémentant  $k$  jusqu'à la convergence sur  $\mathbf{u}^k$ . Une autre possibilité consiste à exprimer l'opérateur Laplacien sous forme matricielle et à inverser le système résultant (résolution implicite)<sup>3</sup>.

Cette méthode présente certains avantages, notamment la possibilité d'obtenir un champ dense même aux endroits où  $\partial_t \mathcal{I}$  est nul puisque la régularisation va permettre de combler ce vide d'information par celle présente au voisinage.

Cependant, ces techniques peuvent avoir du mal à extraire correctement les discontinuités d'un champ de vitesse. Le coefficient de régularisation  $\alpha$  étant supposé homogène sur  $\Omega$ , il se révèle dans l'impossibilité de s'adapter à des variations différentes du champ qui peut potentiellement être discontinu. La paramétrisation d' $\alpha$  est primordiale puisque celui-ci a une grande influence sur le résultat. Une petite valeur entraîne une plus grande réceptivité aux discontinuités du champ de vitesse, mais au risque de générer du bruit dans les zones homogènes de luminance. Au contraire, une grande valeur de  $\alpha$  fournit en général un champ lisse au détriment de la variabilité d'information présente dans l'image.

### 4.1.2.3 Approches locales

L'estimation locale du flot optique consiste à résoudre le problème d'ouverture en supposant le mouvement homogène dans un certain voisinage du pixel considéré [73]. Cette approche trouve de nombreuses applications notamment dans les problématiques de suivi [10], de reconstruction d'images par mosaïque [124], ou encore l'immatriculation d'images médicales [18]. En pratique, cette approche dérive de la méthode des moindres carrés vue en section 2.2.1.1, à ceci près que l'erreur quadratique est ici convoluée par un noyau Gaussien, d'écart type  $\sigma$ , permettant la cohérence d'ensemble, et d'échelle, de la solution optimale au sens des moindres carrés. La fonctionnelle d'énergie sur l'erreur se lit ainsi :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}_\sigma * \left\| \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathcal{I} \right\|^2. \quad (4.11)$$

3. Notons que certaines approches font un amalgame entre la valeur de  $\alpha$  et de  $\frac{1}{2}\alpha$  conduisant à la disparition des 4 dans les équations précédentes.

où  $\mathbf{u}$  est cette fois constant sur tout le support du noyau Gaussien. La minimisation de cette fonctionnelle se fait par expression de l'annulation de sa dérivée  $\partial_{\mathbf{u}}\mathcal{J} = 0$ , donnant alors la relation linéaire :

$$\mathbf{G}_{\sigma} * (\nabla\mathcal{I} \otimes \nabla\mathcal{I})\mathbf{u} = -\mathbf{G}_{\sigma} * (\partial_t\mathcal{I}\nabla\mathcal{I}). \quad (4.12)$$

L'inversion de la matrice locale  $\mathbf{G}_{\sigma} * (\nabla\mathcal{I} \otimes \nabla\mathcal{I})$  peut s'avérer délicate pour les zones où le gradient d'intensité lumineuse est proche de 0, autrement dit les régions homogènes de l'image. Le problème d'ouverture concernant l'estimation du flot optique subsiste alors, ce qui est le principal inconvénient des méthodes locales dans la mesure où la densité du champ de vitesse est souvent un critère déterminant de la qualité de l'estimation. Il est néanmoins possible d'accorder une confiance locale en l'estimation qui dépend des gradients de l'image, comme la trace de la matrice locale [126] ou encore ses valeurs propres [9]. Ce degré de confiance permet ainsi des étapes d'interpolation pondérées ultérieures, ou encore une utilisation raisonnée du flot optique à travers une matrice de covariance diagonale  $R \in \mathbb{R}^{M \times M}$ .

Cette méthode a donc donné lieu à de nombreuses variations et applications dont une présentation plus exhaustive est disponible dans [6].

**Problématique d'échelle** La minimisation locale de la fonctionnelle d'énergie sur l'erreur n'est efficace que si le déplacement d'intensité lumineuse reste de l'ordre de la déviation standard du noyau Gaussien utilisé pour la convolution. Autrement dit, le déplacement  $dx = \mathbf{u} \delta t$  est supposé inférieur à  $\sigma$ , et la méthode locale se comporte comme un filtre passe bas sur les déplacements détectables. Pour s'assurer de capter tous les déplacements, il est possible de donner à la déviation standard une valeur supérieure aux dimensions du domaine telle que :  $\sigma^2 > \int_{\Omega} x dx$ . Dans ces conditions cependant, le flot optique obtenu est totalement lissé. La méthode locale se rapproche plus en réalité d'un filtre passe bande centré sur  $\sigma$ . Ceci est un autre inconvénient de la méthode locale, puisque l'hypothèse de l'existence d'un flux localement homogène nécessite forcément de définir le niveau de localité, et donc de lissage. La paramétrisation de cette régularité est aussi délicate à mener que celle du paramètre  $\alpha$  dans les méthodes globales. On peut d'ailleurs noter que plus généralement, toutes les techniques d'estimation du mouvement requièrent de fixer un paramètre lié à l'échelle des phénomènes à analyser. Très récemment pourtant, Héas *et al* [43] ont proposé une approche basée sur une inférence Bayésienne à deux niveaux permettant d'estimer le flot optique et le paramètre  $\alpha$  optimal associé.

De manière générale, il est possible pour remédier à cette problématique d'échelle d'utiliser une approche multi résolution, comme celle proposée dans [12]. Cette technique consiste à utiliser un ensemble de  $N_{res}$  déviations standards  $[\sigma_0, \dots, \sigma_{res}, \dots, \sigma_{N_{res}}]$ ,  $\sigma_{res} < \sigma_{res+1}$ , permettant de capter une plus grande variété d'informations sur le flux. A chaque  $\sigma_{res}$  est attachée une résolution de l'image inférieure à celle d'origine. La méthode locale consiste alors à appliquer, dans un premier temps, l'estimation du mouvement aux plus grandes échelles. Cette estimation permet de construire une image « compensée » du mouvement à l'échelle courante. L'étape d'estimation est ensuite appliquée aux échelles inférieures en exploitant cette image compensée. Ce procédé est itéré jusqu'à l'échelle la plus fine. Le mouvement final correspond alors à la somme de tous les mouvements estimés à chaque échelle. Afin d'accéder aux différentes échelles, une solution plus rapide en terme d'implémentation consiste à, plutôt que d'utiliser une gamme de  $N_{res}$  écarts

types, utiliser une représentation pyramidale des images [12]. Cela revient à réduire un certain nombre de fois la taille des images par un facteur 2 afin d'extraire une information de mouvement aux différentes échelles. Le procédé est donc appliqué avec le même écart type  $\sigma$ , proportionnellement à la taille des pixels, sur des images de dimensions variables. L'implémentation pyramidale est schématisée en figure 4.4. Pour chaque résolution  $res$ , une déviation standard  $\sigma_{res}$  proche de la taille des mailles de la grille  $\Delta x_{res}$  est utilisée afin de capter le mouvement relatif à cette résolution.

L'utilisation de la multi résolution apporte aussi une réponse à la condition de petit déplacement de laquelle l'ECMA, de par sa version différentielle vue à l'équation 4.1, est issue. Dans la mesure où le déplacement n'est pas diminuable (on suppose qu'on ne peut pas disposer d'une résolution temporelle plus haute), c'est donc sa proportion au domaine qui est diminuée. Le déplacement est alors considéré comme relativement faible dans les plus basses résolutions.

#### 4.1.2.4 Discussion

Dans cette section, nous avons étudié les fondements des techniques locales et globales d'estimation du mouvement apparent entre deux images. Comme nous l'avons mentionné, le champ de déplacement associé se révèle souvent être une information précieuse dans de nombreuses applications pour analyser le phénomène observé. Ainsi, dans le contexte des vidéos de foules, l'analyse de la dynamique des piétons par le biais du flot-optique s'avère être une approche intéressante. Cependant, comme il a été constaté dans [22], l'étude des foules par les champs instantanés successifs, bien que performante, s'avère toutefois limitée. En effet, il n'existe aucune cohérence temporelle entre deux estimations successives et il en résulte une certaine erreur sur l'analyse menée qui se traduit par exemple par un mouvement saccadé des piétons lorsque l'on re-synthétise la scène observée<sup>4</sup>. De leur côté, un certain nombre de modèles dynamiques permettant de simuler un comportement de foule ont récemment été proposés et s'avèrent performants, comme nous avons pu le voir dans le chapitre 3 précédent. Sur la base de ces deux constats, il s'avère alors judicieux d'exploiter un *a priori* dynamique pour apporter une consistance temporelle aux estimations du mouvement. Ceci est l'objet de la section suivante

4. Le filtrage temporel des plus hautes fréquences des vitesses permet néanmoins d'obtenir des champs lisses.

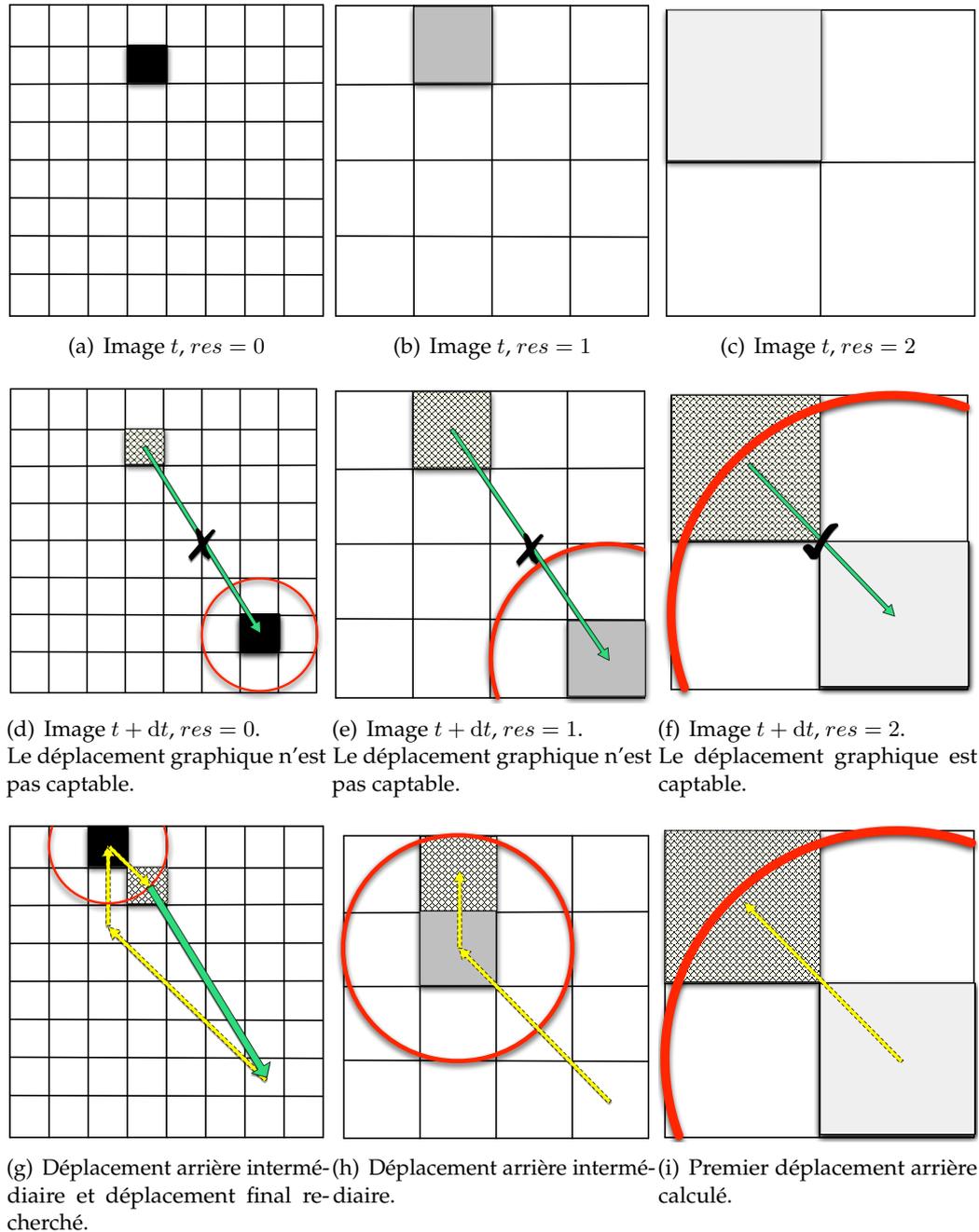


FIGURE 4.4 – Schématisation de l'implémentation pyramidale de l'estimation locale du mouvement. La flèche verte correspond au déplacement  $dx$  recherché entre deux images séparées de  $dt$ . Le cercle rouge correspond au périmètre maximum de captation du déplacement, tel que son rayon soit égal à  $\sigma_{res} = 1.5\Delta x_{c_{res}}$ .

## 4.2 Contribution à l'analyse de foule par la vidéo

Le couplage de la dynamique de la foule avec des données réelles montre des résultats très encourageants et a ouvert un vaste domaine de recherche dont nous avons présenté une partie en section 3.1.8. Cette partie en est une contribution. Nous supposons ici que l'information du mouvement apparent est intrinsèquement insuffisante pour caractériser la dynamique du flux de la foule dans la mesure où l'absence de mouvement dans la séquence peut aussi bien être interprétée comme l'absence d'individus que comme une large zone de congestion où les personnes peuvent potentiellement se blesser. Nous définissons par conséquent l'analyse totale du flux d'individus comme l'acquisition depuis la séquence de *i*) des champs de vitesse consistants et *ii*) un potentiel d'inconfort associé. Le champ de vitesse constitue un descripteur du flux de personnes riche d'information. Le potentiel d'inconfort, lui, atteste de l'intensité de plusieurs quantités physiques telles que la densité, ou encore la pression. Cette information est cruciale pour détecter des zones sensibles et potentiellement dangereuses. Bien qu'un nombre conséquent d'approches soient disponibles pour mesurer la vitesse apparente depuis une séquence temporelle d'images issues de situations diverses, comme évoqué en section 4.1.2, l'estimation d'un tel potentiel d'inconfort est un problème critique et domaine de recherche encore très ouvert. Cette propriété de la foule est en effet délicate à observer sur la seule base d'images. Il est néanmoins intuitif de considérer que ce potentiel influence la vitesse : de manière naturelle, les humains tendent à éviter les zones de forte concentration et de haute pression, et leur vitesse est donc directement influencée par la densité de personnes environnante.

La contribution originale de cette section provient du fait d'utiliser des techniques provenant de la théorie du contrôle optimal [72] (voir la section 2.1.3.2) et de l'assimilation variationnelle [67], utilisée à l'origine dans un contexte météorologique, afin de définir de nouveaux outils dédiés à la caractérisation de la fluctuation de la foule. A partir d'un modèle dynamique dédié à un certain phénomène, différentes pratiques de filtrage ont été développées afin d'extraire des paramètres temporellement consistants. Papadakis *et al.* ont par exemple exploité le principe de l'assimilation variationnelle pour soutirer avec succès des estimations d'états de grandes dimensions comme des champs de vitesse denses, des courbures, ou encore des états physiques spécifiques tels que la vorticité, et ce directement depuis des images [96, 97]. Comme nous avons pu le voir en section 2.3, l'assimilation variationnelle permet d'estimer un état de grande dimension soumis à un modèle dynamique connu à un certain degré de bruit près. L'avantage d'une telle méthode résident dans sa capacité à estimer des paramètres non observés contrôlant le modèle dynamique. Par conséquent, elle est tout à fait adaptée à la problématique qui nous intéresse ici. La définition d'un système d'assimilation variationnelle dédié à la problématique ici posée requiert spécialement : *i*) un modèle dynamique lié au champ de vitesse et au potentiel d'inconfort et *ii*) un opérateur d'observation reliant les données à disposition, soit une séquence temporelle d'images, à certaines propriétés du sujet, soit le champ de vitesse. Le modèle utilisé pour l'estimation par l'assimilation est celui présenté dans le chapitre précédent, en section 3.2, conçu dans le but de proposer une modélisation dynamique basique du flux de la foule.

### 4.2.1 Estimation du potentiel d'inconfort par assimilation variationnelle

Les méthodes d'assimilation variationnelle permettent d'appliquer avec plus moins de certitude un modèle dynamique aux variables que l'on cherche à déterminer. Dans notre méthode, nous proposons d'utiliser un modèle physique de foules pour guider l'analyse. Ce modèle, présenté en section 3.2, est nouveau et peut se rapprocher des formulations continues de la dynamique de la foule comme celui proposé par Hughes [54]. Les méthodes d'assimilation variationnelle s'appuient sur la *formulation adjointe* vue en section 2.3.2.1 : des variables adjointes sont introduites et permettent d'évaluer aisément le gradient de la fonction de coût mise en jeu. L'algorithme obtenu consiste alors à associer l'intégration *arrière* du modèle d'évolution adjoint et l'intégration *avant*, soit du modèle d'origine, soit du modèle linéarisé, le modèle adjoint étant guidé par l'écart de mesure entre les variables d'état et les observations bruitées, ou incertaines, du phénomène. Cette procédure, efficace, permet au final le raffinement de la condition initiale sur l'état, dont la confiance associée peut être faible, ainsi que par la même occasion les déviations temporelles du modèle dynamique.

Dans cette partie, nous proposons donc de définir une méthode d'assimilation de données qui s'appuie sur un modèle dynamique qui couple la vitesse à un potentiel d'inconfort. L'estimation d'un tel potentiel constitue la difficulté principale de l'approche d'analyse de la foule ici proposée. Le modèle sert ainsi de support à l'estimation de cette quantité par le biais de l'utilisation de l'assimilation variationnelle.

#### 4.2.1.1 Vue d'ensemble de la méthode

Il est rappelé ici que l'objectif poursuivi est d'estimer le potentiel d'inconfort de la foule observé dans une séquence d'images. La connaissance de ce potentiel permet en outre de remonter aux champs de vitesse, ces deux quantités étant reliées entre elles par l'équation 3.14. Une schématisation globale est proposée en figure 4.5. Nous prenons comme consigne les images originales ainsi que deux paramètres utilisateur : la topologie supposée des obstacles et une zone indiquant l'objectif des piétons. Ces deux informations sont combinées pour obtenir numériquement une fonction potentiel qui permet de définir le chemin optimal du déplacement de la foule, comme évoqué en section 3.1.2.3. La condition initiale utilisée dans le processus d'assimilation est également fournie par l'utilisateur. Celle-ci va être affinée au cours du processus et vise à faire correspondre, de manière itérative, les observations et la modélisation dynamique du phénomène. Les images servent aussi à définir subjectivement une initialisation de l'algorithme. Celle-ci est alors utilisée dans le processus d'assimilation, qui vise à faire correspondre, de manière itérative, les observations et la modélisation dynamique du phénomène.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, un système d'assimilation complet est défini par *i*) un modèle dynamique  $\mathbb{M}$ ; *ii*) un opérateur d'observation  $\mathbb{H}$ ; *iii*) une condition initiale de l'état  $\mathbf{X}_{\text{zero}}$  et enfin *iv*) les matrices de covariance d'erreur  $B_0$ ,  $Q$  et  $R$  correspondant respectivement à celle de la condition initiale, du modèle dynamique, et des observations. La section suivante se penche sur la définition de ces composants pour la problématique ici traitée.

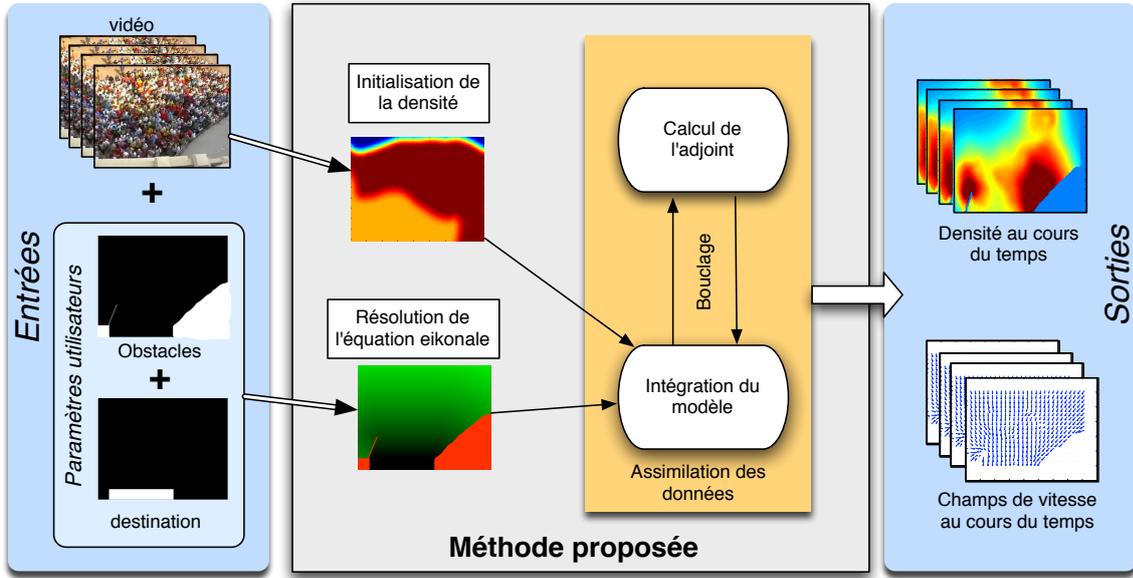


FIGURE 4.5 – Aperçu de la méthode d'analyse vidéo de la foule du point de vue opérationnel.

#### 4.2.1.2 Modèle dynamique, observations et covariances

La connaissance *a priori* du comportement de la foule est issue du modèle proposé en section 3.2 par la paramétrisation dite intuitive vue en section 3.2.1.1. L'espace d'état est composé du potentiel d'inconfort  $\mathbf{X} = D$ , et pour rappel ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial D(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(D, \mathbf{x}, t) \nabla D(\mathbf{x}, t) = \delta \Delta D(\mathbf{x}, t), & (4.13a) \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}(D, \mathbf{x}, t) = \alpha (W(\mathbf{x}) - \beta \nabla D(\mathbf{x}, t)), & (4.13b) \end{cases}$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$  sont définis eux aussi dans la section 3.2.1.1. De plus, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  mis en jeu dans cette relation est lié à la scène observée par le biais de l'ECMA vue à l'équation 4.3. Dans les paragraphes qui suivent, nous définissons à partir de ces données un modèle  $\mathbb{M}$ , un opérateur d'observation  $\mathbb{H}$  et les matrices représentant la covariance de chacune des erreurs mises en jeu par le contrôle optimal.

**Modèle dynamique  $\mathbb{M}$**  L'état du système étudié étant  $D$ , le modèle  $\mathbb{M}$  est :

$$\mathbb{M}(\mathbf{X}) = \mathbf{u} \nabla \mathbf{X} - \delta \Delta \mathbf{X}. \quad (4.14)$$

En utilisant l'équation 4.13b de contrainte sur le champ de vitesse, nous obtenons :

$$\mathbb{M}(\mathbf{X}) = \alpha(\mathbf{X}) (W - \beta(\mathbf{X}) \nabla \mathbf{X}) \nabla \mathbf{X} - \delta \Delta \mathbf{X}. \quad (4.15)$$

Pour obtenir le modèle tangent linéaire  $\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{M}$  et le modèle tangent linéaire adjoint  $(\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{M})^*$  nous dérivons l'équation précédente et obtenons :

$$\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} = (\alpha' W - (\alpha' \beta + \alpha \beta') \nabla \mathbf{X}) \nabla \mathbf{X} + \alpha (W - 2\beta \nabla \mathbf{X}) \nabla \cdot - \delta \Delta \cdot, \quad (4.16)$$

puisque  $W$  ne dépend pas de  $\mathbf{X}$ . Bien que  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent eux de  $\mathbf{X}$ , nous supposons ici pour des raisons de simplicité des calculs, que  $\alpha' = \beta' = 0$ . Autrement dit, à chaque pas de temps, nous utilisons dans notre algorithme la valeur de  $\alpha$  et de  $\beta$  immédiatement disponibles que nous supposons constante. En rappelant que :  $(\nabla)^* = -\nabla$  et  $(\Delta)^* = \Delta$ , il est finalement possible d'écrire le modèle tangent linéaire et son adjoint par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} = \alpha(W - 2\beta\nabla\mathbf{X})\nabla. - \delta\Delta., & (4.17a) \\ \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* = -\alpha(W - 2\beta\nabla\mathbf{X})\nabla. - \delta\Delta.. & (4.17b) \end{cases}$$

Tournons nous maintenant vers l'opérateur d'observation.

**Observations de vitesse basées sur le flot optique** La définition de l'opérateur d'observation se fait en deux temps. En s'appuyant sur les techniques issues de l'estimation du mouvement et vues dernièrement dans la section 4.1.2, nous extrayons en premier lieu une information sur la dynamique observée. Cette information étant reliée à l'espace d'état  $D$  par l'équation 4.13b, nous sommes ensuite dans la capacité de définir un opérateur d'observation reliant l'intensité lumineuse des images au potentiel d'inconfort.

Pour extraire le mouvement, nous supposons pour chaque position  $\mathbf{x}$  que l'ECMA doit être valable dans un voisinage local dans lequel le champ  $\mathbf{u}$  est supposé constant, et ce à une erreur d'observation près. Cette approche, similaire à la technique de Lucas et Kanade vue en section 4.1.2.3, revient à écrire :

$$\mathbf{G}_\sigma * \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathcal{I}\right)}_{\frac{D\mathcal{I}}{Dt}} = \epsilon_{\mathbb{H}}, \quad (4.18)$$

où  $\mathcal{I}(\mathbf{x}, t)$  représente la luminance de l'image et  $\mathbf{G}_\sigma$  est un noyau Gaussien de déviation standard  $\sigma$ . En remplaçant l'expression de la vitesse par l'expression composée de l'inconfort auquel elle est reliée, nous obtenons :

$$\mathbf{G}_\sigma * \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \alpha(W - \beta\nabla\mathbf{X})\nabla\mathcal{I}\right) = \epsilon_{\mathbb{H}}. \quad (4.19)$$

En rappelant que  $\mathbf{Y} = \mathbb{H}(\mathbf{X}) + \epsilon_{\mathbb{H}}$ , et en supposant que  $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t}$  et  $\nabla\mathcal{I}$  sont deux variables indépendantes l'une de l'autre, il est finalement possible d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = & \mathbf{G}_\sigma * \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t}, & (4.20a) \\ \mathbb{H}(\mathbf{X}) = & -\mathbf{G}_\sigma * \alpha(W - \beta\nabla\mathbf{X})\nabla\mathcal{I}. & (4.20b) \end{cases}$$

Avec la même hypothèse faite pour la dérivation du modèle, à savoir  $W' = \alpha' = \beta' = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{G}_\sigma * \alpha\beta\nabla\mathcal{I}\nabla., & (4.21a) \\ \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* = \mathbf{G}_\sigma * \alpha\beta\nabla\mathcal{I}\nabla.. & (4.21b) \end{cases}$$

Nous disposons ainsi de tous les éléments nécessaires à l'assimilation variationnelle concernant l'observation du phénomène. Passons maintenant à la gestion des covariances d'erreurs et de l'initialisation.

**Covariances d'erreurs et initialisation** Pour l'initialisation, nous avons simplement besoin de disposer d'un potentiel de confort en début de séquence  $D_{\text{zero}}$ , associé à  $\mathbf{X}_{\text{zero}}$ , puisque la vitesse initiale est obtenue grâce à l'équation 4.13b. Sur la base de l'hypothèse sous-jacente à l'existence de ce potentiel, à savoir qu'il est supposé dépendant entre autres de la densité, nous partons du principe que la meilleure estimation *a priori* de  $D_{\text{zero}}$  correspond à la concentration d'individus présents sur la première image analysée. La façon dont cette densité de départ *a priori* est obtenue dépend de la scène à analyser. Dans les expériences ici menées, elle est grossièrement et manuellement définie sur la base de l'observation humaine subjective de la première image. Il est à noter que dans la mesure où le processus d'assimilation raffine cette initialisation, cette estimation grossière reste acceptable.

La matrice de covariance de l'erreur sur l'initialisation  $B_0$  et celle sur la dynamique du modèle  $Q$  sont considérées comme des matrices diagonales constantes. Cela revient à supposer qu'aucune information spatio-temporelle sur la confiance du modèle n'est disponible. Pour la matrice de covariance sur l'observation  $R$ , le gradient d'intensité lumineuse des images est utilisé pour faire varier spatialement la confiance dans l'observation. En posant  $R = [R_{mn}] \in \mathbb{R}^{M \times M}$  avec  $m, n \in \{1, \dots, M\}$  et  $M$  le nombre de pixels de l'image, la relation suivante est alors utilisée pour définir les valeurs de la matrice de covariance considérée comme diagonale :

$$R_{mm} = R_{\text{max},mm} + (R_{\text{min},mm} - R_{\text{max},mm})(1 - \exp(-\|\nabla \mathcal{I}(\mathbf{x}_{c_m})\|^2 / \gamma_{\mathcal{I}}^2)). \quad (4.22)$$

Cette relation atteste du fait que lorsque la luminance de l'image ne contient pas de gradients, autrement dit les zones où la luminance est homogène, l'ECMA n'est pas valide, et la covariance est donc maximale. *A contrario*, quand des gradients importants sont présents, l'ECMA bénéficie d'une bonne confiance en tant qu'observateur et  $R$  est alors faible.

## 4.2.2 Experimentations et discussion

Dans cette section nous présentons certains résultats expérimentaux obtenus avec cette méthode. Dans un premier temps elle est appliquée à une scène synthétique, ce qui permet d'évaluer avec une certaine robustesse la méthode. Des résultats sont ensuite obtenus à partir d'une vidéo réelle de foule. Cette partie se conclue sur une discussion sur la méthode ici proposée.

Pour toutes les expériences qui suivent, les paramètres du système de contrôle optimal ont été calibrés sur la base de la physique de la scène par :  $B_0 = I_M 0.5 \text{ inc}^2$ ,  $Q = I_M 0.1 \text{ inc}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $R_{\text{min}} = I_M 0.5 \text{ s}^{-2}$ ,  $R_{\text{max}} = I_M 5 \text{ s}^{-2}$  et  $\gamma_{\mathcal{I}} = 9 \text{ m}^{-1}$ .

#### 4.2.2.1 Résultats sur des exemples synthétiques

**Génération de vérité terrain** L'objectif est ici de comparer les résultats obtenus par la méthode d'analyse à une vérité terrain et ainsi de pouvoir valider le gain de la méthode d'assimilation de vidéo quant à l'estimation du potentiel d'inconfort. Afin de conserver une chaîne de validation flexible, une scène synthétique de foule est utilisée. La conception de la simulation de l'évolution des individus est faite sous les contraintes suivantes :

- un modèle de simulation de foule totalement différent de celui utilisé par l'assimilation doit être choisi,
- la vidéo résultant de cette simulation doit montrer des détails suffisamment réalistes en terme d'apparence visuelle et de détails du mouvement des individus, comme le balancement des bras et des jambes.

C'est sous ces conditions qu'il est possible de confronter objectivement la vérité terrain aux résultats du processus d'assimilation.

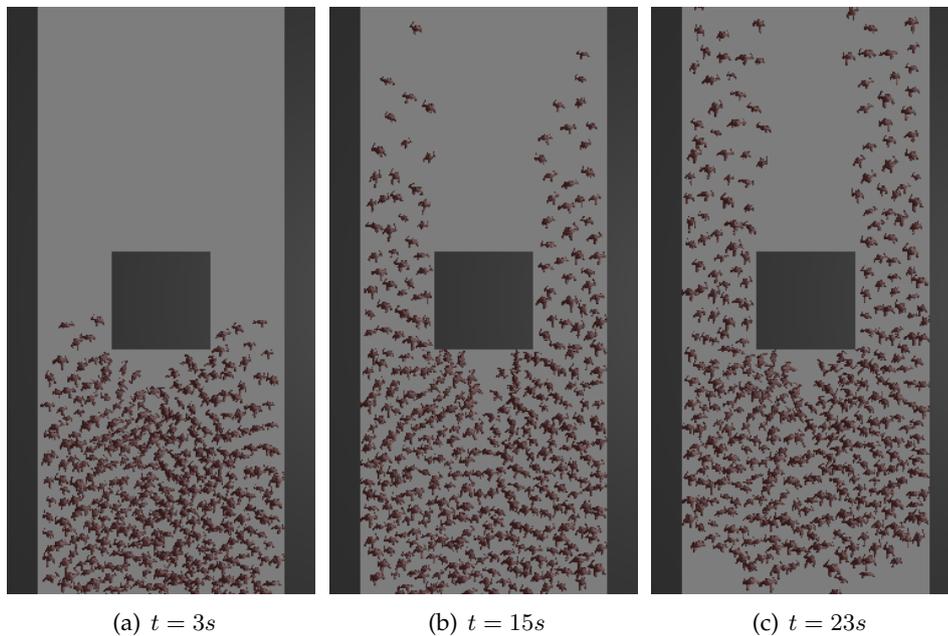


FIGURE 4.6 – Scène synthétique de foule simulée par le modèle de Helbing.

La séquence virtuelle a ainsi été générée en utilisant un modèle de simulation agent dérivant du modèle d'Helbing [46], et les personnages virtuels ont une démarche acquise depuis des techniques de capture de mouvement. La séquence générée est illustrée dans la figure 4.6. La carte de densité  $\rho_{ref}(\mathbf{x}, t)$  et le champ de vitesse  $\mathbf{u}_{ref}(\mathbf{x}, t)$  sont calculés depuis la simulation agents vers la grille de calcul en utilisant une régularisation par noyau Gaussien de déviation standard  $\sigma = 0.5m$ , et sont alors considérés comme la vérité terrain. La valeur de  $\sigma$  est relativement élevée par rapport à la demie envergure généralement admise chez les individus, mais elle permet par contre de s'appuyer sur des informations suffisamment lissées pour pouvoir juger plus globalement la méthode.

**Résultats de la simulation du modèle dynamique Eulérien** L'intégration du modèle proposé pour l'assimilation, pour rappel défini par l'équation 3.20a, fournit des informa-

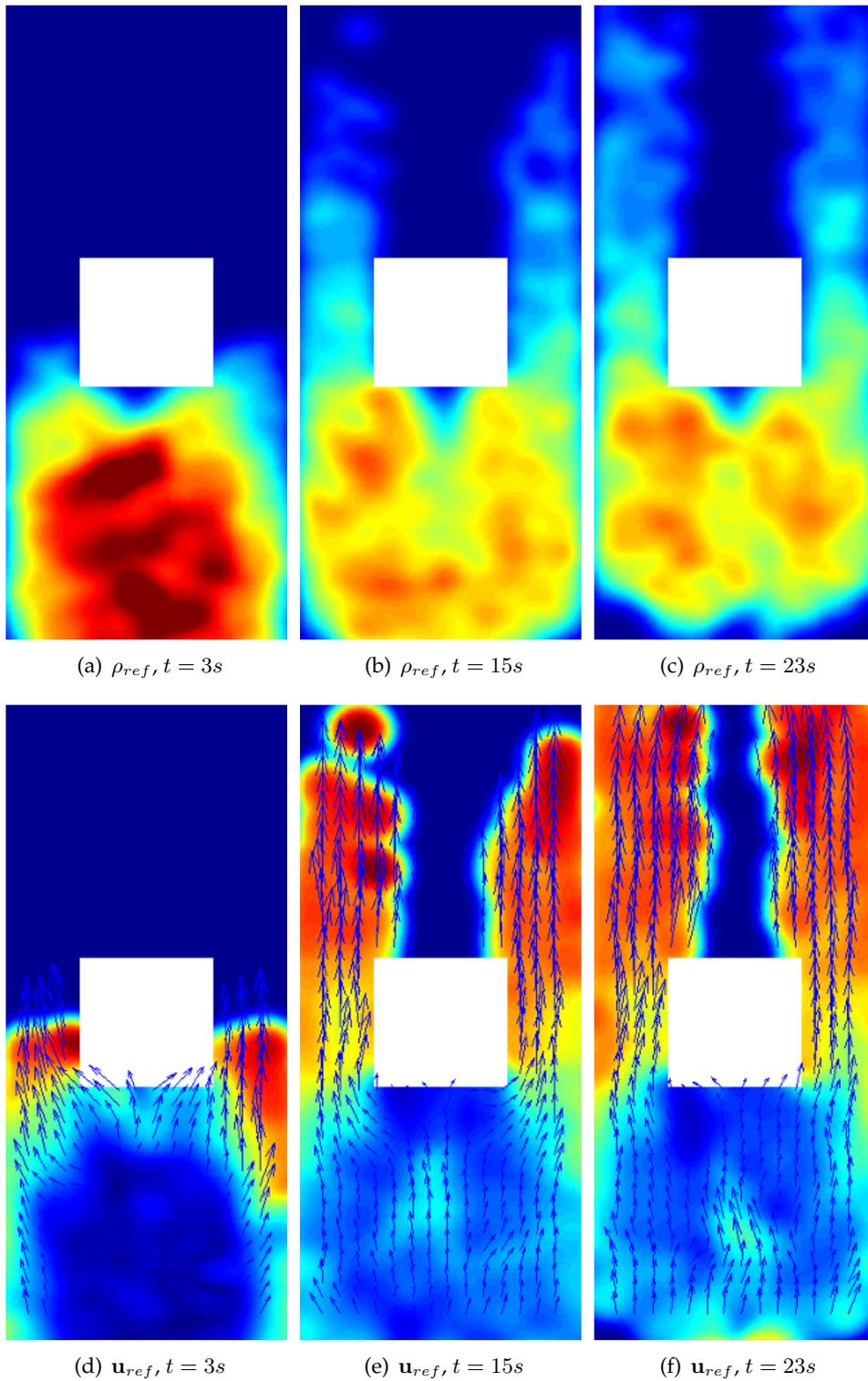


FIGURE 4.7 – Vérité terrain issue du modèle agent de la figure 4.6. La ligne du haut représente la densité  $\rho_{ref}$  variant de  $0 \text{ ped.m}^{-2}$  en bleu foncé à  $5 \text{ ped.m}^{-2}$  en rouge foncé. La ligne du bas représente le champ de vitesse  $\mathbf{u}_{ref}$  et sa norme dont l'intensité varie elle de  $0 \text{ m.s}^{-1}$  à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ .

tions importantes qu'il est utile de pointer. Tout d'abord, on peut constater en figure 4.8 que ce modèle est capable, grâce au potentiel d'inconfort, de mettre en exergue les endroits où les piétons sont présumés être les plus dérangés. Par contre, la vitesse a tendance à rapidement diminuer le long du flux et ne respecte pas la liberté de mouvement supposée des individus une fois l'obstacle dépassé.

L'assimilation, dont le résultat est visible en figure 4.9, arrive à améliorer ces composantes. Comme montré sur les cartes de potentiel d'inconfort  $D$ , les valeurs correspondent mieux à celles de la densité de référence, qui constitue un facteur *a priori* essentiel de ce potentiel. Cette amélioration se fait à la fois dans le temps et l'espace, et plus particulièrement une fois que les piétons ont dépassé l'obstacle. La vitesse correspond aussi mieux à la vérité terrain, et la corrélation recherchée entre un inconfort important et une vitesse faible est clairement affichée. Seule la partie « arrière » de l'obstacle reste cependant incorrectement gérée.

**Comparaison par erreur quadratique** De par son lien étroit avec l'inconfort des individus, il est intéressant de comparer la norme de la vitesse issue de l'assimilation avec celle issue de la vérité terrain. La vitesse assimilée correspond en réalité au calcul de l'équation 3.14, l'équation de contrainte sur la vitesse, à partir du potentiel d'inconfort finalement estimé. Dans cette optique, la fonction standard d'erreur quadratique normalisée, plus connue sous le nom de *Root Mean Square* (RMS), est utilisée. En considérant une fonction  $\phi(\mathbf{x}, t)$  définie dans le temps et l'espace et sa la fonction de référence associé  $\phi_{ref}$ , la RMS spatiale de  $\phi$  est exprimée par :

$$RMS_{spatiale}(\mathbf{x}; t, \phi(\mathbf{x}, t), \phi_{ref}(\mathbf{x}, t)) = \sqrt{\frac{(\phi - \phi_{ref})^2}{\phi_{ref}^2}}, \quad (4.23)$$

et sa RMS temporelle par :

$$RMS_{temporelle}(t; \phi(\mathbf{x}, t), \phi_{ref}(\mathbf{x}, t)) = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\phi - \phi_{ref})^2 d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \phi_{ref}^2 d\mathbf{x}}}. \quad (4.24)$$

Ils constituent des opérateurs de mesure d'erreur précis et adimensionnés. Nous pouvons voir en figure 4.10 que l'assimilation de  $D$  améliore significativement les résultats par rapport à la simple intégration temporelle du modèle puisque l'erreur globale est presque divisée par un facteur de 2. Cependant, le modèle reste comme nous l'avons vu plus haut inadapté à la partie arrière de l'obstacle.

Tournons nous maintenant vers l'expérimentation sur une séquence réelle de foule.

#### 4.2.2.2 Expérimentation sur une séquence de foule réelle

La séquence utilisée montre une foule entrant dans une gare souterraine dans la Principauté de Monaco. Cet exemple présente l'intérêt d'exhiber une certaine variété de phénomènes : un flux continu au début suivi d'une compression d'une partie des individus sur la gauche de l'image. De plus, la porte d'entrée vers laquelle se dirige la foule est délimitée par une barrière qui crée un flux opposé. Dans cet exemple, on voit sur la figure 4.11 que la méthode utilisée a pu détecter deux zones sensibles où le

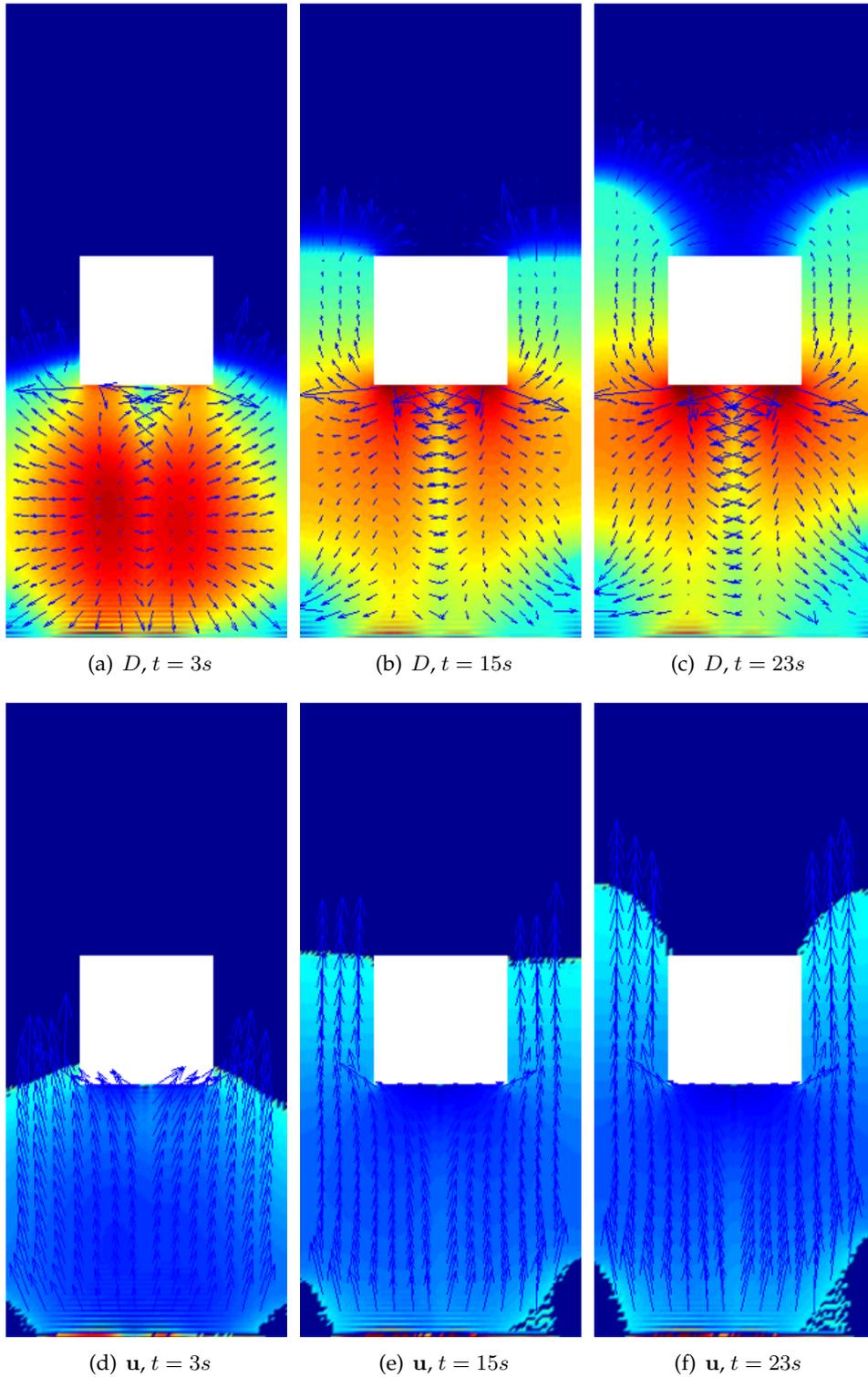


FIGURE 4.8 – **Modèle dynamique simulé** La ligne du haut représente le potentiel d'inconfort  $D$  variant de  $0 \text{ ped.m}^{-2}$  en bleu foncé à  $5 \text{ ped.m}^{-2}$  en rouge foncé, ainsi que son gradient qui donne une certaine information par rapport à la répulsion potentielle. La ligne du bas représente le champ de vitesse  $\mathbf{u}_{ref}$  et sa norme dont l'intensité varie elle de  $0 \text{ m.s}^{-1}$  à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ .

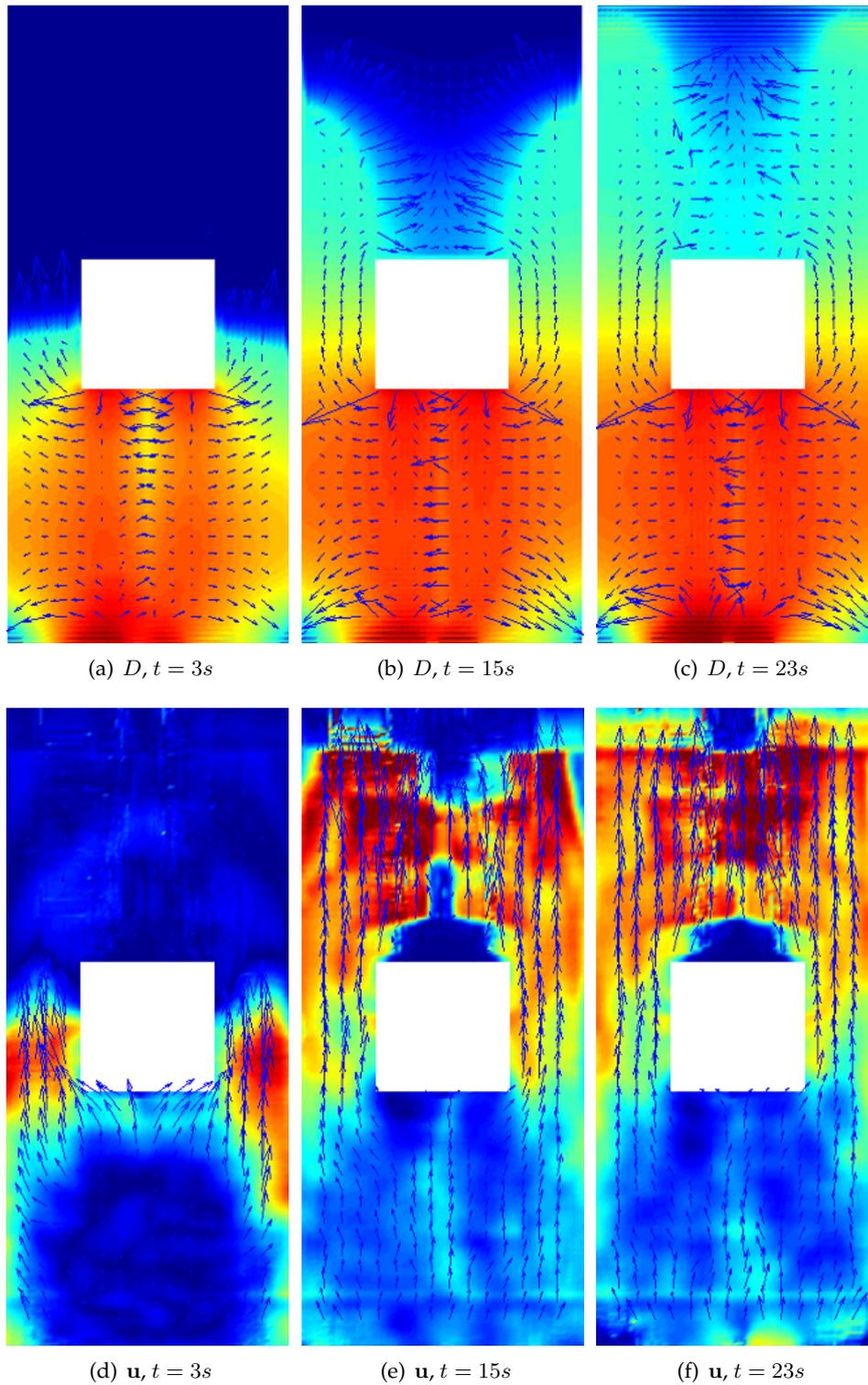
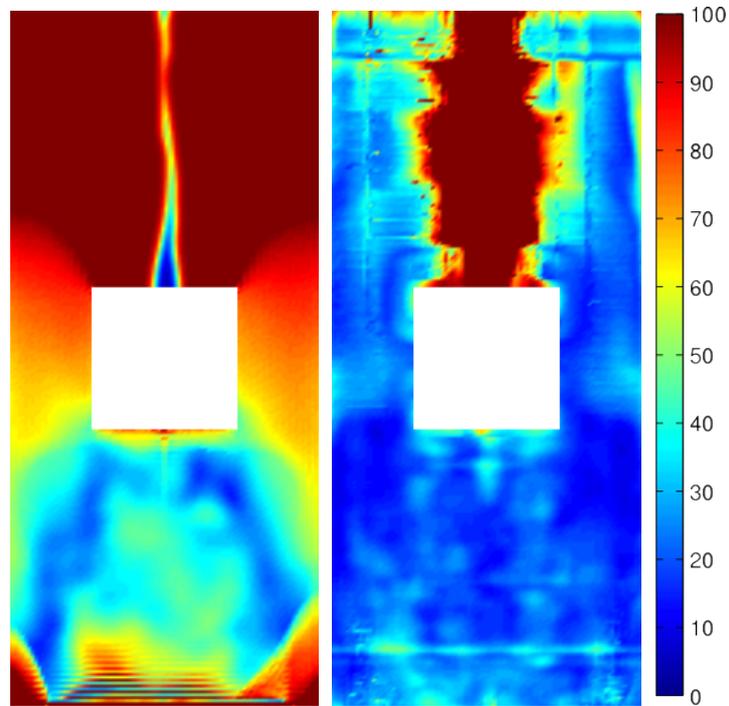
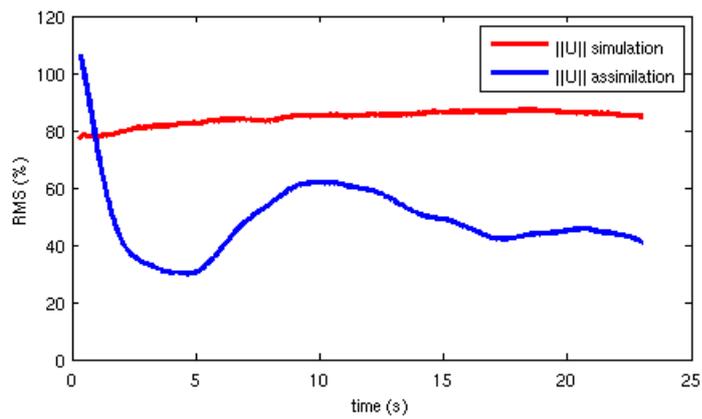


FIGURE 4.9 – Assimilation de vidéo par le modèle dynamique La ligne du haut représente le potentiel d'inconfort  $D$  variant de  $0 \text{ ped.m}^{-2}$  en bleu foncé à  $5 \text{ ped.m}^{-2}$  en rouge foncé, ainsi que son gradient. La ligne du bas représente le champ de vitesse  $\mathbf{u}_{ref}$  et sa norme dont l'intensité varie elle de  $0 \text{ m.s}^{-1}$  à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ .



(b) RMS spatiale par la simulation du modèle (c) RMS spatiale par l'assimilation



(e) RMS temporelle

FIGURE 4.10 – RMS sur la norme de vitesse. Les RMS spatiales sur  $\|\mathbf{u}\|$  à  $t = 23$  s vont de 0% à 100%.

potentiel d'inconfort atteint des niveaux élevés : l'extrémité de la barrière, et le long du mur sur la droite de l'image. Ce point est riche d'information pour l'ingénierie de sûreté, puisqu'il permet de faire ressortir les zones potentiellement dangereuses. Du point de vue de la surveillance « en ligne », autrement dit en direct, la méthode peut détecter des élévations critiques d'inconfort et ainsi permettre le déclenchement d'alarmes. Il est aussi envisageable de connecter cette information à des détecteurs de formes comme ceux présentés dans [4]. Ces aspects sont cependant laissés au rang des perspectives. Il est aussi à préciser que dans le cas réel ici évoqué, la validation est rendue difficile par l'absence de vérité terrain. Néanmoins, les estimations semblent cohérentes sur la base de l'état de l'art existant concernant le comportement de la foule.

### 4.2.2.3 Discussion

Ces expérimentations sur des séquences synthétiques et réelles montrent qu'il est possible d'extraire un potentiel d'inconfort cohérent à partir d'une séquence d'images et d'un modèle dynamique de foule relativement simple. Cependant, un inconvénient de la méthode présentée est qu'elle nécessite une vue aérienne du flux de la foule, ce qui n'est pas toujours possible en fonction de l'environnement dans lequel s'effectue l'analyse, et correspond par ailleurs rarement à la configuration des systèmes de surveillance classiques déjà en place. Cette contrainte peut toutefois être atténuée sous condition d'obtenir une calibration spatiale de la caméra, permettant de projeter l'observation dans l'espace de l'environnement tel que modélisé. Ensuite, la méthode est principalement adaptée aux foules denses, pour lesquelles il est possible de supposer que chaque individu évolue selon un flux sous-jacent. Pour une scène ne comportant que quelques piétons, cette hypothèse est alors invalide. La portée de validité du système d'estimation présenté en en fonction de la densité de la foule reste ainsi à clairement définir. De plus, seul le cas d'une scène où un unique type de foule partageant un objectif commun a été traité. La gestion de groupes aux objectifs antagonistes, notamment par l'extension du modèle dynamique à la prise en compte de flux multiples, pourrait ainsi constituer une nouvelle approche de segmentation du flux de la foule. Enfin, le potentiel d'inconfort est une combinaison supposée de plusieurs quantités psychologiques ou physiques, comme la densité ou la pression dans le dernier cas. Il peut être intéressant d'utiliser un modèle de foule plus sophistiqué pour permettre l'estimation de ces quantités de façon séparée dans le cadre de l'assimilation variationnelle.

### 4.2.3 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans cette section un cadre de travail destiné à l'analyse de séquences vidéos de foule dense. L'approche s'appuie sur le couplage de données observées extraites d'un séquençage d'images et un modèle dynamique de foule *ad-hoc* qui fait le lien entre la vitesse et un potentiel d'inconfort attestant de quantités présumées telles que la densité ou la pression dans la foule. Elle permet donc d'en tirer un système capable d'estimer efficacement depuis une vidéo de foule, à la fois la vitesse et le potentiel d'inconfort tout au long de la séquence. Ce potentiel d'inconfort s'est avéré être intéressant pour mettre l'accent sur les caractéristiques principales d'une scène. Ce point peut particulièrement trouver une utilité dans les systèmes de détection d'évènements ou

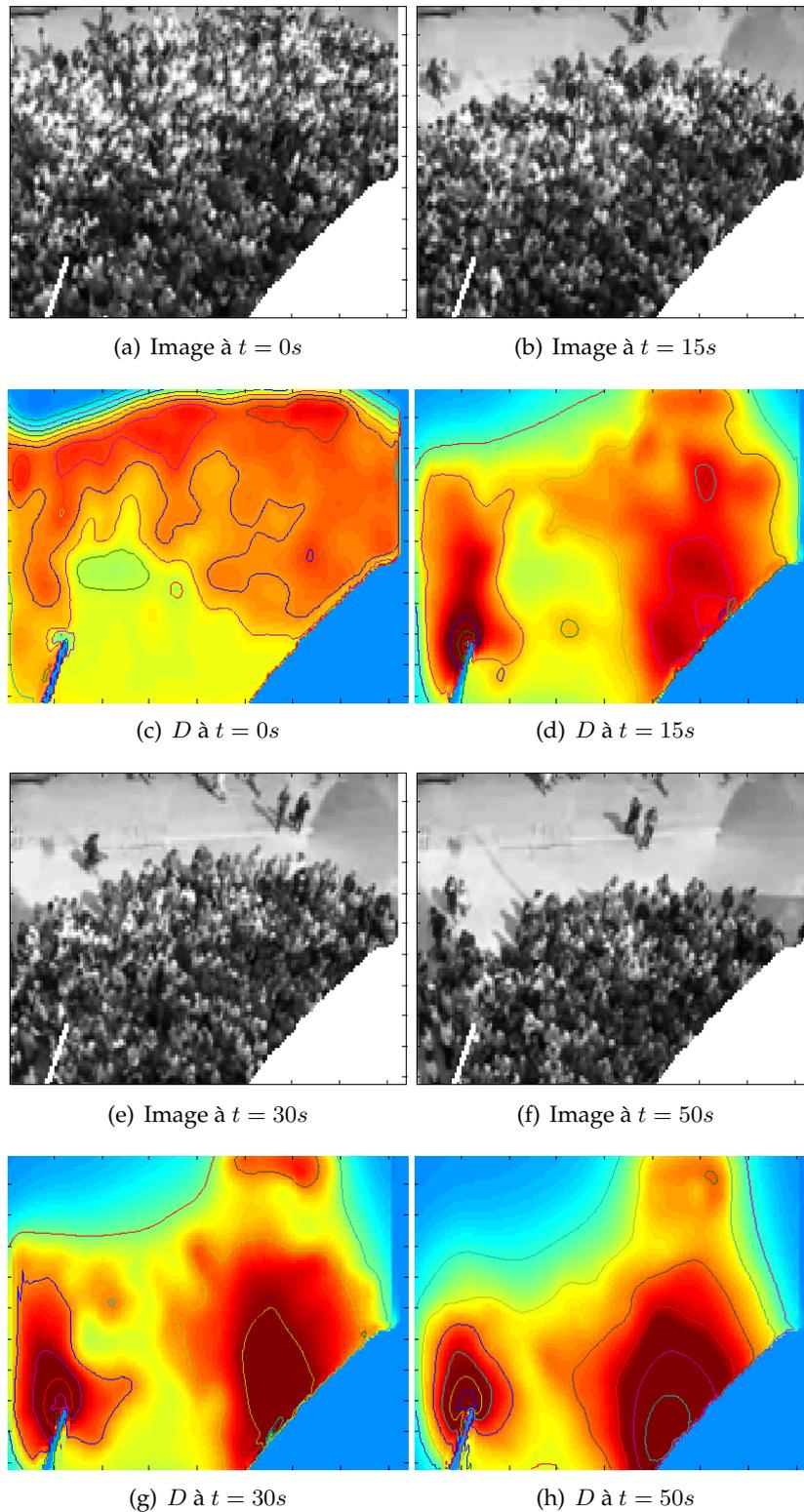


FIGURE 4.11 – Comparaison visuelle entre la séquence réelle et le potentiel d'inconfort estimé  $D$ . Les figures (a), (b), (e) et (f) sont des images issues de la séquence vidéo de foule réelle. Les figures (c), (d), (g) et (h) sont les cartes de potentiel  $D$  estimées aux mêmes instants respectifs.

participer à la compréhension globale de la dynamique sous-jacente des foules humaines. La prolongation de ce travail peut conduire à considérer une investigation plus poussée du potentiel d'inconfort pour en isoler la densité, la pression, ou d'autres quantités susceptibles de témoigner du stress physique ou psychologique des individus. L'étude de flux de personnes distincts est aussi envisageable.

Un problème rencontré dans l'approche qui a été ici menée concerne sa validation. Il est en effet impossible d'extraire de manière objective une vérité terrain à partir d'une foule réelle sans passer par des méthodes intrusives de *motion capture*, qui plus est extrêmement lourdes à mettre en oeuvre. Pour pallier à cette difficulté, nous nous proposons de synthétiser un ensemble de scènes de foules sur la base du modèle dynamique continu présenté en section 3.2. Ces scènes ont pour objectif de présenter des mouvements variés d'individus, selon des prises de vues différentes. Cette base, que nous souhaiterions proposer à la communauté scientifique s'intéressant à l'analyse de la foule, permet ainsi de disposer de séquences vidéos accompagnées de leur vérité terrain, et est présentée dans la section suivante.

### 4.3 Base de données de foules

Le nombre important de nouveaux algorithmes de vision par ordinateur développés lors des dernières décennies fait apparaître le manque d'un banc d'essai commun et de situations de référence accompagnées de leur vérité terrain. La comparaison quantitative de ces techniques appliquées à la foule s'avère donc au mieux difficile, au pire impossible.

Il a pourtant été montré dans d'autres contextes, comme par exemple le domaine de la reconnaissance d'objets [34], de l'estimation du flot optique [7] ou encore de l'estimation de mouvement articulé [125], que les bases de données stimulent considérablement le champ de recherche associé et permettent des comparaisons non biaisées entre les algorithmes de la littérature. Une contribution à cette problématique est ici présentée, et vise aussi bien à proposer un panel de situations de foules avec leur vérité terrain, qu'à proposer une vision différente du lien existant entre la compréhension de la foule, sa modélisation, son analyse et son observation. De plus, la comparaison quantitative de modèles de foule reste un problème ouvert, et cette section constitue en partie une réflexion sur le questionnement relatif à ce sujet.

Dans le contexte de l'analyse de mouvements de foules, la comparaison de plusieurs approches d'estimation reste une tâche délicate dans la mesure où comme nous l'avons dit aucun banc d'essai commun n'existe pour évaluer les différentes techniques, aussi bien continues qu'individuelles, disponibles. Pour remédier à ce manque, une base de données, ou *dataset*, de séquences de foules accompagnées de leur vérité terrain est proposée parmi les travaux de cette thèse. L'idée d'une base de données pour les foules n'est en soit pas nouvelle et a été déjà explorée puis exploitée dans le contexte de la surveillance d'activité humaine [111, 134, 84, 116]. Pourtant, la base de données ici présentée constitue la première base synthétique dédiée à l'étude du phénomène de foule dans un sens plus large.

Aucune vidéo de foule réelle n'est incluse dans la base de données en l'état. La principale raison de ce choix vient de la difficulté à obtenir **une** vérité terrain puisqu'elle requiert l'étiquetage manuel de chaque personne dans la scène tout au long de celle-ci, ce qui peut s'avérer très fastidieux. De plus, l'expérience montre que cette méthode manuelle est sujette aux erreurs et peut significativement varier selon la personne qui en a la charge. Les scènes de foule sont donc toutes synthétiques, permettant ainsi de disposer d'une vérité terrain absolue mais évidemment virtuelle.

Pour prendre en compte les différentes descriptions possibles du phénomène de foule, la vérité terrain contient ainsi : *i*) les trajectoires individuelles des piétons contenus dans la foule, ainsi que *ii*) les quantités continues associées telles que la densité ou les champs de vitesse denses transportant le flux de piétons. Ces informations sont considérées à ce stade comme étant les principales quantités déterminantes quant à la caractérisation de la foule. Cette représentation est néanmoins amenée à évoluer.

La synthèse de séquences réalistes de foule amène à définir certains critères permettant sa mise en œuvre. Générer des vidéos réalistes est un défi que l'on peut déjà voir relevé à l'écran notamment par les films d'animation. Concernant l'analyse de foule qui nous intéresse ici, deux problèmes majeurs sont à prendre en compte : la qualité visuelle des images doit refléter la richesse et la diversité d'information qui peut être observée dans des prises de vue réelles, et la dynamique de la foule doit être préservée. Ce dernier point

inclut à la fois les détails de comportements d'un individu comme l'attitude ou la gestuelle, et la dynamique globale de la foule.

La contribution de ce travail se situe à la fois dans l'approche de la simulation graphique qui a été faite grâce à un moteur de rendu disponible dans le commerce, et du modèle de foule proposé dans ce document comportant une prise en compte globale et individuelle des personnes. Une typologie de situations jugées d'intérêt pour la communauté de vision par ordinateur est aussi proposée. Nous passons pour commencer en revue cette dernière.

#### 4.3.1 Typologie des scénarios

Pour une première version du dataset, sept scènes typiques ont été identifiées pour lesquelles des comportements de foule particuliers apparaissent. Ces scènes sont schématisées en figure 4.12. Chaque topologie de scénario, appelée environnement ou scène, a été conçue sur la base de situations souvent rencontrées dans les problématiques principales d'étude de la foule. Elles correspondent à une évolution du flux de la foule dans un environnement libre (scène #1), dans un environnement avec obstacle (#2 et #3), de l'évacuation par une porte (#4), une dispersion (#5), une rotation (#6) présentant une analogie avec la scène de pèlerinage de la Mecque de circumambulation de la *Kaaba*, ou encore des flux croisés (#7) ce dernier cas faisant référence à la « foule non structurée » de [117]. Pour chaque scène, plusieurs séquences vidéo ont été produites correspondant à divers *i*) paramètres de caméra *ii*) paramètres d'éclairage *iii*) nombres d'individus et *iv*) vitesses moyennes du flux pour des situations d'urgence ou non, ce point étant décrit en section 4.3.2.1. Tournons-nous maintenant vers la chaîne de production des différentes vidéos du dataset.

#### 4.3.2 Chaîne de production des vidéos

Dans un premier temps, le modèle utilisé pour la simulation est brièvement rappelé. Cette présentation est ensuite suivie d'une description succincte du procédé de rendu.

##### 4.3.2.1 Simulation comportementale de la foule

Le modèle utilisé est, comme pour la caractérisation de la foule par analyse vidéo de la section 4.2, celui présenté en section 3.2. La paramétrisation unifiée par l'allure  $P$  vue en section 3.2.1.2 est utilisée. Rappelons que ce paramètre permet de gérer le niveau de « stress » de la foule et ainsi de simuler des situations normales ou de panique. Pour une typologie donnée, le modèle peut être ainsi quasiment entièrement paramétré par  $P$ , ce qui permet un large panel de comportements de foule. Ce point est déterminant concernant la nécessité pour le dataset de pouvoir proposer une variété suffisante de dynamiques à partir d'un minimum de paramètres, et ainsi facilement catégoriser les scènes. L'intégration du modèle est faite en utilisant un schéma d'intégration de Runge-Kutta du quatrième ordre [120].

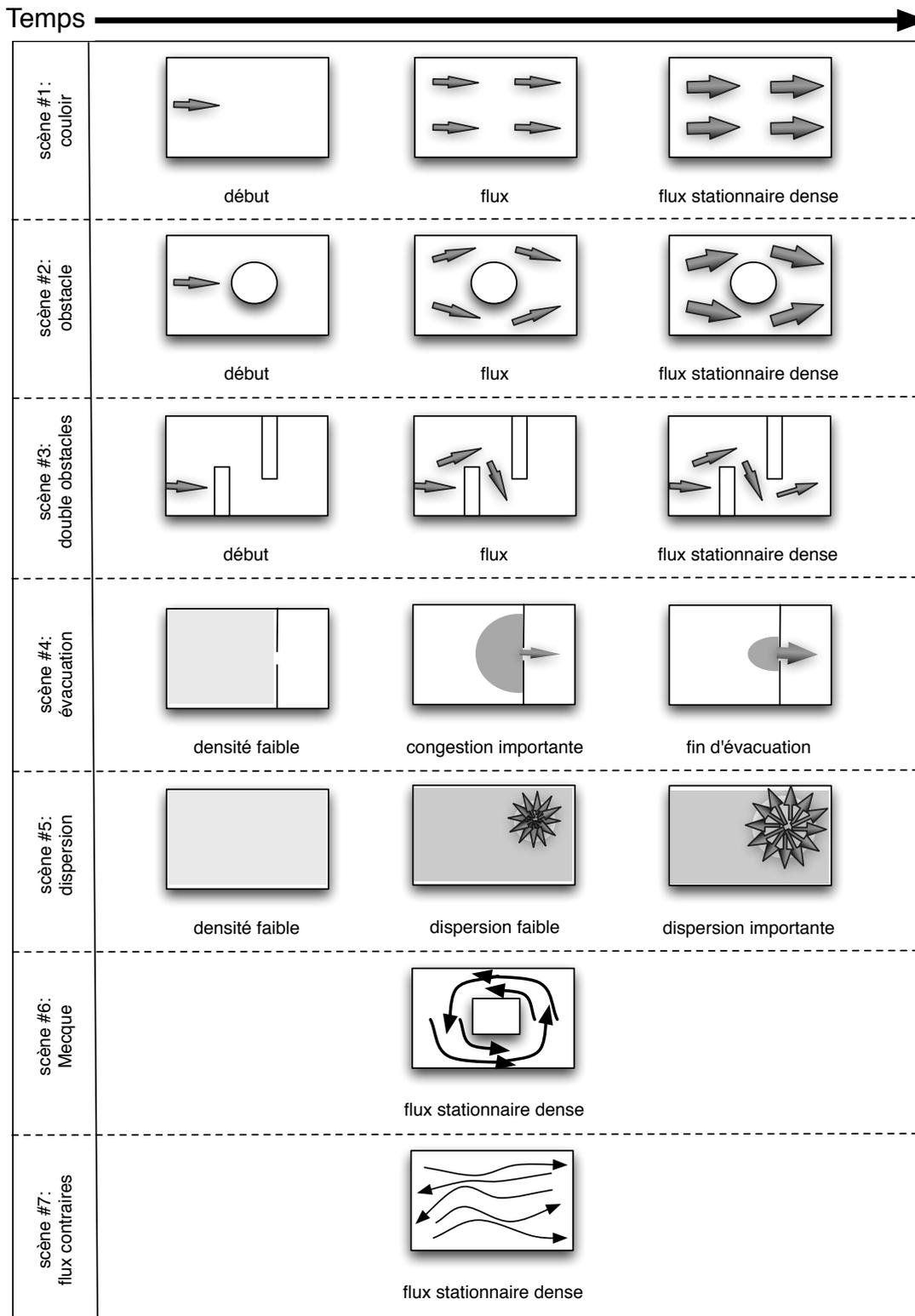


FIGURE 4.12 – Topologie des scènes du jeu de données. Les différentes scènes proposées dans le dataset.

#### 4.3.2.2 Simulation graphique de la foule

La sortie de la simulation du modèle est ensuite utilisée comme entrée de routines générant automatiquement des scènes 3D avec rendu et personnages humanoïdes. Un ensemble de 26 personnages différents, représentés en figure 4.13, a été utilisé. Comme on peut le voir, un niveau suffisant de variabilité dans les formes et couleurs est assuré. Ce nombre d'avatars est choisi sur l'observation empirique qu'un nombre inférieur augmente nettement la probabilité d'avoir plusieurs individus de même modèle géométrique côte à côte, ce qui est d'une part irréaliste et en plus susceptible de perturber certaines techniques d'analyse. Les avatars sont donc aussi choisis pour proposer le plus de variabilité possible sur l'âge, le sexe, et le style vestimentaire. Un petit nombre de mouvements de marche et d'allure oisive sont utilisées pour chaque piéton. Lors du lancement de la routine, la meilleure animation est sélectionnée d'après sa vitesse. Ici aussi, la diversité entre individus est assurée par la désynchronisation des animations qui empêche plusieurs piétons d'exhiber en même temps un même mouvement, ce phénomène étant connu sous le nom d'« effet de clône ».

Le rendu est effectué grâce au moteur *Mental Ray* [31], dont le modèle physique de nébulosité est mis à contribution. Celui-ci permet d'avoir un contrôle naturel et intuitif sur les paramètres d'éclairage. La plupart des scènes sont générées par un rendu avec une luminosité extérieure. Une comparaison entre une image réelle extraite depuis une séquence vidéo de foule réelle et le rendu d'une scène synthétique de foule avec des conditions d'éclairage similaires est présentée en figure 4.13. Elle illustre la capacité de la chaîne de simulation visuelle à produire des images qualitativement proches d'images de scènes réelles.

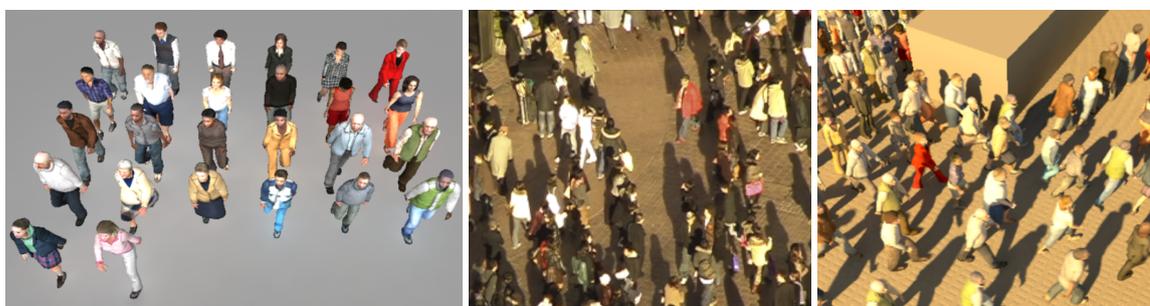


FIGURE 4.13 – Rendu de foule. De gauche à droite : les 26 avatars différents utilisés pour produire les vidéos; une image d'un enregistrement vidéo à Shibuya, Tokyo; un rendu synthétique de foule sous des conditions analogues d'éclairage extérieur.

#### 4.3.3 Résultats

A partir des scènes que nous avons présentées en figure 4.12, plusieurs scénarios sont conçus. Les paramètres requis pour la construction de séquences sont détaillés dans le tableau 4.3.3. Pour chaque environnement, nous proposons dans un premier temps deux séquences différentes qui correspondent à deux valeurs différentes de  $P$  : une valeur normale, et une valeur relative à la panique. Dans chaque cas, la position de départ des individus est le résultat d'un tirage aléatoire dans une zone prédéfinie. Ceux-ci ne poursuivent aucun objectif spatial ( $W(\mathbf{x}) = \vec{0}$ ) durant 5 secondes permettant ainsi aux

Scénario	1-1	1-4	2-1	2-4	3-1	3-4	4-1	4-4	5-1	5-4	6-1	6-4	7-1	7-4
Scène	1		2		3		4		5		6		7	
Nombre de piétons	400		400		400		400		1000		4000		400	
$P (m.s^{-1})$	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4
Durée (s)	120		120		120		254	57	60		120		120	
Dimensions (m)	40 × 20		40 × 20		40 × 20		40 × 20		40 × 20		80 × 80		40 × 20	
Grille	32 × 16		32 × 16		32 × 16		32 × 16		32 × 16		64 × 64		32 × 16	

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des différents scénarios disponibles dans le dataset

personnes d’atteindre une configuration conforme à la modélisation. Une fois ce délais écoulé, le chemin optimal est inclus dans le modèle. Concernant le rendu, il peut être intéressant de proposer différentes vidéos d’un même scénario sous plusieurs paramètres de caméra ou conditions d’éclairage, dans l’objectif d’estimer la sensibilité des méthodes d’analyse de la foule aux conditions de jour et de météo, ainsi que d’inclinaison de la prise de vue. Dans un premier temps, il est préférable d’utiliser des vues de caméra aériennes et de côté. Le premier type de vue étant le cas idéal d’analyse, le second le plus répandu. Pour les conditions d’éclairage, on peut utiliser soit des conditions intérieures se traduisant par de fortes lumières d’ambiance et l’absence d’ombrage, soit des conditions extérieures avec soleil et nébulosité. Ceci nous donne potentiellement quatre conditions de rendu de référence différentes.

Pour la simulation du modèle, nous rappelons que le paramètre principal à fixer est  $P$ . La déviation standard utilisée pour le calcul de la densité par la convolution des agents est :  $\sigma = 0.6 m$ .

Des captures d’écrans de la simulation globale, comportementale et visuelle, des scénarios #4-1 et #4-2 sont visibles dans la figure 4.14 et la figure 4.15. Dans cet environnement, les piétons cherchent à atteindre la partie droite de la scène en passant par une porte, soit à une allure normale (figure 4.14), soit dans des conditions d’urgence (figure 4.15). La ligne supérieure de ces figures correspond à une présentation non-exhaustive de la trajectoire récente des individus, tandis que la ligne du milieu montre le rendu de la scène avec une caméra virtuelle de côté. Il est intéressant de voir grâce à elles que le rendu final est très réaliste. De plus, l’émergence de phénomènes mis en évidence dans [46] connu sous le nom de *arching* ou *clogging* et visualisable par la formation d’une densité en arc de cercle en amont du passage, apparaît ici clairement. Ceci suggère que, en plus d’un rendu réaliste des simulations, le comportement simulé de la foule est cohérent.

Dans la figure 4.16, d’autres captures d’écran des différents scénarios sont présentées.

#### 4.3.4 Discussion

Dans cette partie nous avons proposé et présenté un jeu de données, un dataset, de vidéos de foules avec leur vérité terrain associée. Les séquences sont générées par la simulation d’un modèle comportemental et continu de foule auquel est ajouté une advection et une répulsion Lagrangienne des individus. Ce modèle a été conçu de telle sorte

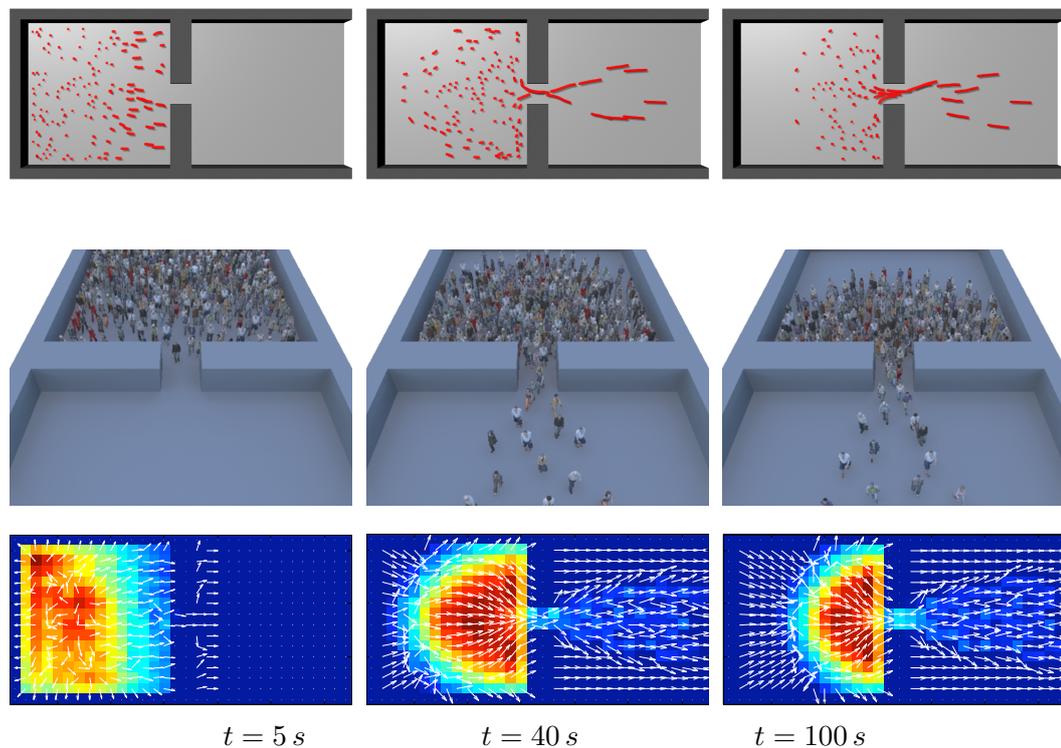


FIGURE 4.14 – Scénario #4-1 : Evacuation dans une situation normale. La ligne supérieure montre les trajectoires d’un individu sur 3 durant les 3 dernières secondes. La ligne du milieu montre des captures d’écran du rendu final. La dernière ligne montre les quantités continues mises en jeu que sont la densité  $\rho$  et le champ de vitesses  $u$ .

qu’un unique paramètre puisse contrôler plusieurs types de comportements de foules. Les séquences sont aussi générées à l’aide d’un moteur de rendu capable d’effets graphiques poussés créant des conditions visuelles proches de la réalité. De telles séquences synthétiques permettent à la communauté de recherche sur l’analyse de foule de travailler sur des supports communs et de comparer leurs résultats dans un cadre bien défini. Des suggestions de critères objectifs de comparaison sont proposés en annexe. Ceux-ci peuvent être utilisés pour évaluer les performances des différentes méthodes d’analyse dédiées à la foule. Les données de vérité terrain et les routines nécessaire à la manipulation de ces données, C++, Java, Matlab, devront être fournies. Dans un premier temps, des séquences supplémentaires doivent être proposées à destination de la communauté. Ensuite, une plateforme d’évaluation inspirée de celle décrite dans [7] devra être ouverte, où certaines séquences dépourvues de vérité terrain seront aussi proposées. Les chercheurs seront ainsi dans la possibilité de soumettre leurs résultats d’analyse à un système d’évaluation objectif scripté, avec le choix pour les auteurs de publier ou non leur résultats.

## 4.4 Conclusion

Par la complexité de sa phénoménologie, l'analyse de la foule par l'utilisation de vidéos est une problématique qui reste ouverte et ambitieuse. Les enjeux qui y sont liés vont de l'urbanisme à la sociologie, en passant par l'industrie de l'infographie. L'objectif reste dans tous les cas globalement le même : extraire d'une prise de vue l'information jugée d'intérêt pour la description soit de la seule foule présente dans la vidéo étudiée, soit du phénomène de foule en général en supposant l'existence de lois le gouvernant.

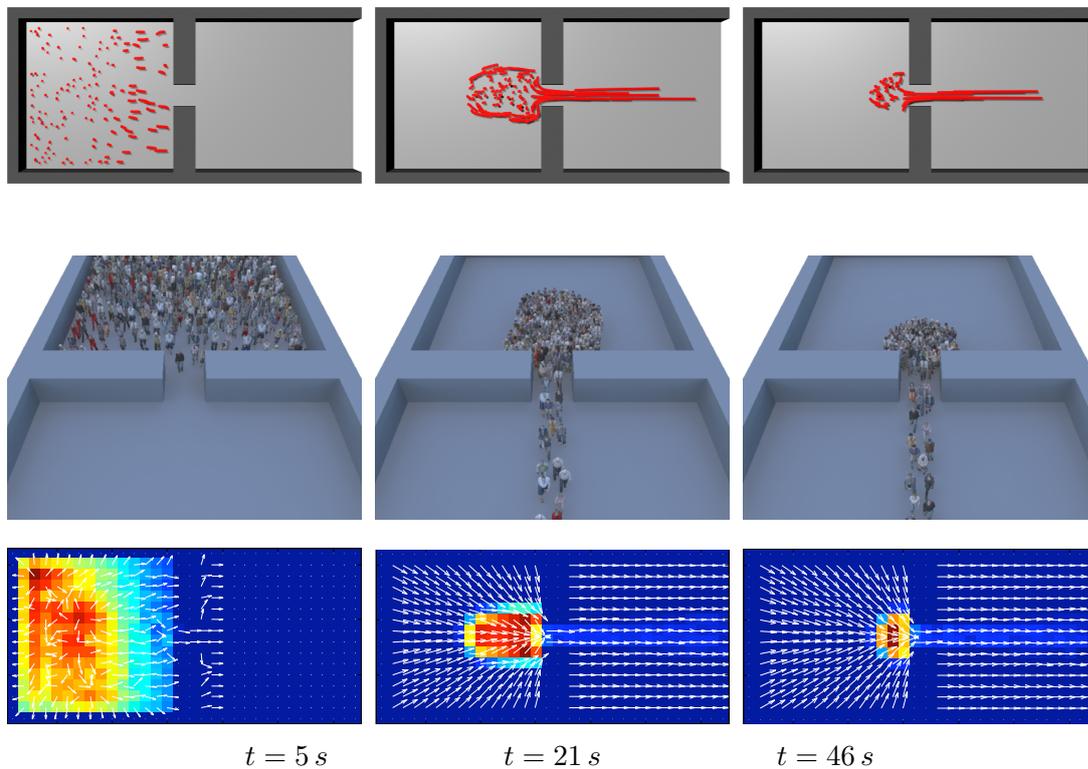


FIGURE 4.15 – Scénario #4-2 : Evacuation dans une situation d'urgence et de panique. La ligne supérieure montre les trajectoires d'un individu sur 3 durant les 3 dernières secondes. La ligne du milieu montre des captures d'écran du rendu final. La dernière ligne montre les quantités continues mises en jeu que sont la densité  $\rho$  et le champ de vitesses  $u$ .

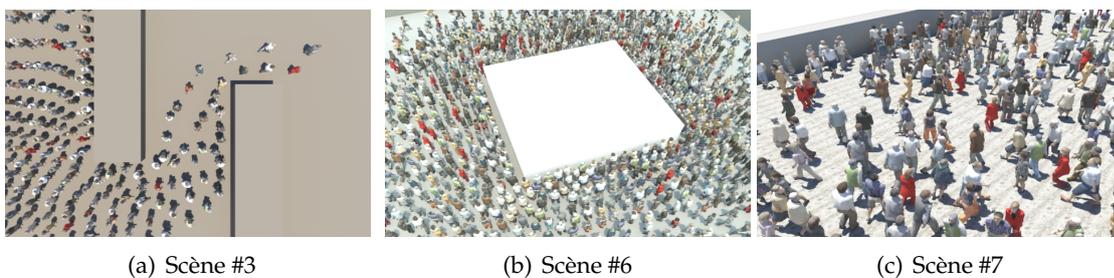


FIGURE 4.16 – Aperçu de scènes supplémentaires.

L'analyse de la foule par vision et perception humaine de vidéo offre une approche qualitative qui, bien que rudimentaire d'un point de vue scientifique, reste malgré tout indispensable au préalable d'une analyse quantitative ici ciblée. Elle présente notamment l'inconvénient d'être subjective et donc biaisée puisque deux personnes n'auront pas la même perception d'une scène. De plus, toute information acquise par cognition humaine est presque impossible à retranscrire dans la sphère scientifique publique que constitue l'étude quantitative. Néanmoins, cette perception permet une classification sommaire et rapide des scènes étudiées. Tout un chacun est en effet capable, contrairement aux méthodes numériques, de facilement identifier une scène de foule clairsemée, dense, homogène, hétérogène, locale ou de grande échelle. Cette identification est cruciale puisqu'elle détermine le type de méthode par vision par ordinateur la plus apte à traiter la scène. Les méthodes axées sur l'individu seront par exemple écartées des scènes représentant des flux de plusieurs milliers de personnes, tandis que les méthodes axées sur la caractérisation de flux globaux d'individus seront proscrite pour l'étude de scènes montrant deux personnes se croisant dans un couloir.

C'est ici que se situe la difficulté principale dans l'utilisation des techniques d'analyse vidéo. L'observation de la foule par le biais de séquences d'images la représentant est une approche qui offre en effet de nombreuses possibilités de collecte de données, mais qui doivent être utilisées à bon escient. La reconnaissance par exemple permet de détecter dans chaque image des occurrences de morphotype standard d'humain et de les pointer spatialement. Le suivi propose lui d'ajouter une dimension temporelle et souvent probabiliste à cette détection permettant de suivre spatialement des individus dans le temps de la séquence. Ces méthodes, au demeurant puissantes et ayant fait la preuve de leur efficacité dans beaucoup de situations, se heurtent néanmoins à la problématique d'échelle du phénomène qui nous intéresse ici, à savoir la foule humaine dans son ensemble, avec le nombre conséquent d'individus qu'elle est susceptible de contenir.

Les approches d'ensemble telles que l'utilisation du flot optique dans une vidéo permettent elles d'extraire une information dense sur la foule adaptée à ce type de problématique. Dans ce chapitre nous avons pu voir que son application de pair avec un modèle comportemental *a priori*, même rudimentaire, permet de récolter une information dense sur certaines propriétés supposées de la foule telles que sa vitesse ou son inconfort. Malgré la taille importante de l'espace d'état engendré par la discrétisation spatiale et temporelle d'une dynamique continue, l'assimilation variationnelle permet ainsi d'estimer avec cohérence et une justesse relative, mais acceptable, la valeur de variables sous-jacentes à une scène de foule.

Si l'estimation est un enjeu majeur du domaine de l'analyse d'images, la modélisation en constitue donc indirectement un autre. Nous avons pu voir que bien des méthodes, si ce n'est la totalité, s'appuient sur une représentation *a priori* du phénomène étudié. Cette représentation peut ne concerner que le sujet, notamment dans le cas purement spatial de la reconnaissance, mais concerne aussi la dynamique du phénomène dans les cas spatio-temporels, autrement dit sa modélisation. Cette dernière constitue ainsi une aide précieuse à l'estimation par l'observation de vidéo. Mais la réciproque est aussi vraie. L'estimation de variables sous-jacentes à un phénomène peut aussi être une aide à la modélisation de celui-ci. Dès lors, se pose la question d'ouverture du problème global de l'analyse. L'estimation est-elle correcte parce que la modélisation est bonne, ou bien la modélisation est bonne parce que l'estimation est correcte ?

Dans ce chapitre nous avons ainsi proposé la mise en place d'une base de données de scènes de foule. Cette base a donc pour vocation de permettre la confrontation aussi bien de différentes méthodes d'estimations que, par extension, de différentes modélisations. En générant des scènes synthétiques de foule, sur la base de modèles comportementaux et graphiques d'individus, il est ainsi possible de mesurer quantitativement la performance des méthodes d'estimation grâce à la vérité terrain, virtuelle, produite. Les scènes de la base sont choisies et conçues selon les phénomènes particuliers à la foule qu'elles exhibent. Les méthodes d'estimation peuvent ainsi être évaluées sur leur capacité à traiter correctement, par exemple, l'évacuation d'une zone par un passage étroit, sous des conditions diverses d'agitation des individus, de luminosité de la scène, ou d'occlusion due à l'angle de prise de vue. Les approches d'analyse correctes suggèrent alors une bonne modélisation du phénomène, qui elles mêmes permettent ensuite une bonne synthèse virtuelle de la foule, laissant ainsi supposer une possible amorce itérative entre l'amélioration de l'estimation dédiée à la foule, et sa modélisation. Néanmoins, seules les fondations de cette base de données sont ici présentées. Son utilisation reste à l'heure actuelle à faire, tout comme la définition et l'inventaire de sa portée.

La typologie des scènes pour mener à bien et dans sa totalité cette approche est cependant immense, tant les cas de figure topologiques, individuels (objectifs communs ou non), et globaux (densité d'individus variable) sont nombreux et vraisemblablement infinis. Rien ne garantit d'ailleurs l'existence de modèles formels répondant correctement à ces typologies.

Enfin, dans ce chapitre nous avons essentiellement abordé l'analyse de la foule sous son aspect continu, avec le biais de représentation que cette approche induit, à savoir représenter des particules Lagrangiennes par leur densité Eulérienne. Au vu des résultats encourageants démontrés par l'assimilation variationnelle lors de cette dernière description de la foule, et de sa robustesse face à la taille de l'espace d'état, nous nous proposons d'étendre cette approche vers une description cette fois-ci purement Lagrangienne du sujet, et d'élargir ainsi le spectre des méthodes d'estimations comme celui des méthodes de contrôle.

# 5

## Contrôle centralisé d'agents en interaction

### Contents

---

<b>5.1</b>	<b>Contrôle d'essaim par assimilation variationnelle</b>	<b>121</b>
5.1.1	Vue d'ensemble de l'approche	122
5.1.2	Modèle dynamique de test	123
5.1.3	Application de l'assimilation variationnelle	124
5.1.4	Resultats expérimentaux	130
5.1.5	Conclusion et discussion	140
<b>5.2</b>	<b>Contrôle de foules humaines</b>	<b>145</b>
5.2.1	Dérivation par l'état des forces relatives à la foule	145
5.2.2	Contrôle de foules unidirectionnelles	148
5.2.3	Contrôle de foules multi-directionnelles et problématique d'em- mèlement	154
5.2.4	Discussion sur le contrôle optimal foules multi-directionnelles	175
<b>5.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>176</b>

---

Contrôler plusieurs agents en mouvement et potentiellement indépendants dans le but d'atteindre un objectif global est une tâche délicate qui trouve des applications dans plusieurs domaines d'ingénierie tels que la robotique ou l'animation par ordinateur. Ensemble, ces différents agents forment un tout appelé *essaim*, qui peut présenter des comportements collectifs intéressants. Lorsque les agents sont dirigés par leur propre dynamique et agissent alors comme des particules Newtoniennes, le contrôle global de cet essaim soulève une problématique spécifique. Ce chapitre propose une approche originale de résolution de ce problème, qui s'appuie sur un contrôle centralisé plutôt que de se focaliser sur la conception de règles individuelles appliquées aux agents. Plus précisément, un cadre de travail est proposé pour le contrôle d'un ensemble de particules sous des contraintes exprimées relativement aux membres de l'essaim ou à l'environnement. Ces deux catégories de contraintes sont respectivement reliées aux descriptions Lagrangienne et Eulérienne. Les contributions présentes dans ce chapitre sont les suivantes : *i*) nous montrons comment utiliser des techniques de contrôle optimal pour exprimer un processus d'optimisation sur un espace d'état de grande dimension incluant l'information dynamique des particules, *ii*) nous montrons que cette approche permet l'analyse et la manipulation d'un ensemble d'individus constituant une foule, et enfin *iii*) nous proposons des méthodes permettant de résoudre avec efficacité certaines problématiques inhérentes au contrôle optimal de foules constituées de groupes aux objectifs antagonistes.

L'efficacité de l'approche est démontrée à travers des problèmes classiques ou ori-

ginaux de contrôle d'essaims, notamment dans des cas simples comme dans la section 5.1 suivante où un modèle dynamique de test est utilisé. Ce modèle est enrichi dans la section 5.2 pour y inclure certains comportements de la foule. Les cas étudiés y sont plus complexes et propres à l'étude de la foule.

## 5.1 Contrôle d'essaim par assimilation variationnelle

Le contrôle de quantités est la tâche consistant à trouver des paramètres clés, appelés commandes ou paramètres de contrôle, à appliquer à un système dynamique donné dans le but d'obtenir un comportement spécifique. Une telle commande peut être définie de manière externe par un utilisateur, mais elle peut être aussi directement dirigée par des mesures *in-situ*. Ce dernier cas constitue le processus d'estimation, vu au chapitre 2, dont le but est d'extraire la valeur de paramètres qui expliquent la scène observée. Nous nous intéressons ici au contrôle d'essaims de particules Lagrangiennes. Ce problème se retrouve dans la littérature pour plusieurs domaines d'application distincts, comme les essaims de robots [33], ou encore dans le domaine des communications mobiles avec topologie commutative [91]. Le contrôle d'essaim de particules s'est principalement concentré sur trois différentes problématiques : *i*) le problème de *rendez-vous*, aussi connu comme le problème de consensus distribué [91] qui vise à accorder les particules sur une zone commune et la façon de l'atteindre, *ii*) le problème de *formation*, dont le but est de maintenir une certaine formation spatiale entre les différents membres de l'essaim [38], et pour finir *iii*) le problème d'*agrégation*, où l'objectif des agents est de se regrouper à un certain endroit en assurant la cohérence d'un essaim [90]. La plupart des travaux précédents sur le contrôle d'essaims de particules se focalisent sur des lois de contrôle individuelles, le plus souvent basées sur des cartes de potentiel [40, 74] pour définir la méthode de contrôle. Ce dernier point entraîne l'émergence d'un comportement global de l'essaim connu sous le nom d'*esprit de ruche*, qui a soulevé plusieurs problèmes importants de stabilité [90, 39]. Une revue de ces difficultés associées aux techniques pour y remédier peut être trouvée dans [74]. En réalité, ces approches focalisées exclusivement au niveau des particules sont motivées aussi bien par les conditions rencontrées dans le monde réel (c'est-à-dire dans le cas de systèmes physiques ne pouvant communiquer qu'avec leurs proches voisins) que par la difficulté du problème de contrôle global dans la mesure où il implique des optimisations sur des espaces de très grande dimension, avec des comportements chaotiques et des fonctions d'énergie souvent non convexes. Dans notre approche, nous examinons le problème du contrôle centralisé, où le contrôle d'essaim opère globalement pour respecter une consistance donnée au niveau de la scène. La consigne est alors exprimée soit par des objectifs par particules, appelés alors contraintes Lagrangiennes, soit par des objectifs associés à un certain domaine et donc reliés à l'environnement. Pour cette dernière catégorie, on parle alors de contraintes Eulériennes.

Les techniques de contrôle stochastique sont adaptées et efficaces pour la manipulation d'incertitude et de bruit. Cependant, elles présentent des limitations importantes lorsqu'elles sont appliquées à l'estimation de grands espaces d'états puisqu'elles requièrent alors la gestion et la simulation d'un nombre d'échantillons excessif d'un point de vue calculatoire. Lorsqu'un grand nombre d'inconnues est en jeu, comme des quantités continues discrétisées (par exemple la densité, la pression) ou des propriétés Lagrangiennes (positions de bouées dérivantes océaniques, ou piétons...), gouvernées par un formalisme continu issu d'équations aux dérivées partielles, les techniques utilisées font principalement partie de l'optimisation déterministe par fonction coût et appartiennent à la famille du contrôle optimal [72, 108]. Dans ce cas, l'assimilation variationnelle associée aux méthodes adjointes a été largement utilisée durant les trois dernières décennies [67, 133, 95, 20, 138]. Cette manière élégante de calculer le gradient d'une fonction coût de très grande dimension permet d'accéder à la trajectoire de l'état et des paramètres

associés.

Cependant, une différence essentielle dans notre cas par rapport aux applications physiques classiques qui utilisent des stratégies de contrôle optimal provient de la nature de l'état du sujet. En effet, dans l'utilisation que nous visons, ce dernier correspond à des données Lagrangiennes comme la position des particules, et ne peut être à proprement parler défini dans un contexte Eulérien. Par conséquent, une difficulté à laquelle nous sommes confrontés est le contrôle d'un état Lagrangien respectant des contraintes Eulériennes.

Trouver une correspondance explicite entre des données Lagrangiennes et Eulériennes est une tâche délicate souvent rencontrée en océanographie où les positions de bouées dérivantes sont utilisées comme des observations pour l'estimation d'une circulation océanique globale. Pour faire face à cette spécificité, certains auteurs ont proposé :

1. d'explicitement exploiter un simple système dynamique adapté à des particules Lagrangiennes [59, 76]. Le processus d'assimilation est alors effectué dans un contexte purement Lagrangien. Dans ce cas les considérations Eulériennes ne sont pas exploitées, ce qui n'est pas idéal dans la mesure où la circulation océanique est essentiellement gouvernée par des phénomènes continus.
2. de convertir directement les données Lagrangiennes en vitesse Eulérienne [93, 88, 81]. Ici, de façon opposé, l'assimilation est alors effectuée dans un cadre purement Eulérien. Ceci requiert toutefois l'évaluation de vitesses locales à partir de celles de particules ce qui constitue une opération délicate. De plus, le bénéfice calculatoire de l'utilisation d'un état Lagrangien, généralement de plus petite dimension, est perdu.

Dans les deux cas, un choix doit être fait concernant la description à utiliser pour l'assimilation (Eulérienne ou Lagrangienne).

Dans ce chapitre, nous suggérons une approche plus générique et réécrivons le formalisme de l'assimilation variationnelle dans le cas où l'état du système et les observations n'appartiennent pas au même espace. Un cadre de travail original est proposé permettant d'obtenir une correspondance entre des espaces décrits de façon Lagrangienne ou Eulérienne. Celui-ci est obtenu de façon générique grâce à des opérateurs inspirés de la théorie des graphes [26]. Ces opérateurs permettent d'aisément conduire certaines opérations mathématiques comme la linéarisation d'opérateurs d'observation  $\mathbb{H}$  et ont été introduits dans la section 3.3. Nous démontrons aussi la validité technique de cette approche en résolvant plusieurs problèmes de contrôle d'essaim, tels que la formation ou l'agrégation, et des cas moins classiques comme le contrôle sous contrainte d'information de plus haut niveau tel que la divergence ou la vorticité.

### 5.1.1 Vue d'ensemble de l'approche

Le contrôle optimal d'un essaim de particules par assimilation variationnelle requiert trois éléments principaux :

- La manière dont les particules se comportent de façon déterministe : comment évoluent-elles entre elles, sous quelle représentation, description et paramètres. Il s'agit donc de définir le modèle  $\mathbb{M}$  qui dirige l'état  $\mathbf{X}$  des particules grâce à l'équation

2.6 d'évolution que nous rappelons :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = 0. \quad (5.1)$$

- Les contraintes extérieures que nous souhaitons appliquer à l'essaim : les observations  $\mathbf{Y}$ . Ces contraintes peuvent être exprimées dans un espace différent que celui dans lequel existe  $\mathbf{X}$ , comme par exemple une contrainte de densité continue. C'est pourquoi nous ferons ici appel au formalisme par graphes introduit en section 3.3 et qui permet de manipuler aisément la transition entre des descriptions différentes.
- La manière de contrôler l'essaim, grâce à un procédé mathématique combinant les deux premiers éléments. Nous utilisons ici la théorie du contrôle optimal introduite en section 2.1.3.2. Un capteur  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  est utilisé pour comparer la sortie d'un système à une consigne  $\mathbf{Y}$ . L'écart obtenu sert alors d'entrée à un contrôleur optimal qui fournit de nouvelles variables de contrôle au système, et ainsi de suite. Ici, le système est le modèle  $\mathbb{M}$ , le capteur est  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ , et le contrôleur optimal est le procédé d'assimilation variationnelle vu en section 2.3.

Bien que cette approche puisse s'appliquer à bon nombre de phénomènes descriptibles de façon Lagrangienne, dont la foule, nous nous appuyons dans un premier temps sur l'étude d'un essaim dirigé par un modèle de test.

### 5.1.2 Modèle dynamique de test

Afin de démontrer la capacité de l'approche proposée à s'adapter à des systèmes physiques communs, nous choisissons de considérer un modèle d'évolution du second ordre, respectant la loi du mouvement de Newton. Chaque particule Lagrangienne respecte donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} & = u_i, & (5.2) \\ m_i \frac{\partial u_i}{\partial t} & = \mathbb{F}_i. & (5.3) \end{cases}$$

La force totale  $\mathbb{F}$  appliquée aux particules rassemble toutes les contraintes physiques qui s'y appliquent<sup>1</sup>. Nous proposons de décomposer cette force en trois composantes essentielles pour illustrer le comportement général de l'approche :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\text{source}} + \mathbb{F}_{\text{friction}} + \mathbb{F}_{\text{interaction}}. \quad (5.4)$$

Le terme source fournit une force constante et uniforme, et est composé d'une direction  $\mathbf{W}(\mathcal{V})$  et d'une intensité  $\alpha(\mathcal{V})$ . Cette force se lit  $\mathbb{F}_{\text{source},i} = \alpha_i W_i$ , ou dans l'espace du graphe :

$$\mathbb{F}_{\text{source}} = \underline{\alpha} \mathbf{W}. \quad (5.5)$$

Afin de limiter l'énergie cinétique totale du système dynamique, un terme de friction est ajouté se lisant  $\mathbb{F}_{\text{friction},i} = -k_i u_i$ . Dans l'espace du graphe, il se lit :

$$\mathbb{F}_{\text{slow}} = -\underline{k} \mathbf{u}, \quad (5.6)$$

---

1. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 qui introduit ces notations.

où  $\mathbf{k}(\mathcal{V})$  représente les coefficients de friction des particules.

Le rôle du terme d'interaction au modèle est de démontrer la puissance de l'assimilation variationnelle quant à la propagation de corrections au sein d'un système complexe tel qu'un essaim de particules en interaction. Une force simple et efficace d'interaction est celle générant la répulsion. Nous considérons cette force comme décroissante avec la distance séparant les particules et l'exprimons par une fonction exponentielle inverse, dirigée d'une particule  $p_i$  à l'autre,  $p_j$  :

$$\mathbf{s}_{ij}^y = -ae^{-b\|y_j - y_i\|}n_{ij}. \quad (5.7)$$

Notons que la formulation de cette force inter particules est très semblable à celle de la force sociale proposée dans [46]. Le terme d'interaction s'écrit ainsi :

$$\mathbb{F}_{\text{interaction}} = \mathbf{A}_{s^y} \vec{\mathbb{1}}. \quad (5.8)$$

Maintenant que le modèle de test est défini, tournons nous vers la façon dont il est utilisé pour le contrôle centralisé.

### 5.1.3 Application de l'assimilation variationnelle

Nous utilisons ici l'assimilation variationnelle par contrôle additif temporel vue en section 2.3.4. Dans la suite, nous avons donc besoin de déterminer la linéarisation du modèle et de l'opérateur d'observation, ainsi que leurs adjoints respectifs.

#### 5.1.3.1 Linéarisation du modèle de test

Nous allons maintenant exprimer le modèle linéarisé et son adjoint. Selon la modélisation posée dans la section précédente, leurs expressions sont :

$$\partial_{\mathbf{x}}\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underline{\mathbf{m}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \partial_y \mathbb{F} & \partial_u \mathbb{F} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$(\partial_{\mathbf{x}}\mathbb{M})^* = \begin{bmatrix} 0 & \partial_y \mathbb{F}^T \\ 1 & \partial_u \mathbb{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underline{\mathbf{m}}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Grâce au formalisme de graphe proposé en section 3.3, et plus particulièrement grâce à l'équation 3.39, nous obtenons facilement la dérivation des forces d'interaction, qui sont :

$$\partial_y \mathbb{F} = -\mathbf{L}_{s^y}, \quad (5.11)$$

$$\partial_u \mathbb{F} = -\underline{\mathbf{k}}. \quad (5.12)$$

Puisque  $\mathbf{s}_{ij}^y$  est un vecteur, sa dérivée est une matrice locale ( $\in \mathbb{R}^{d \times d}$ ). En considérant la distance entre deux particules  $D_{ij}^y = \|y_j - y_i\|$ , la force de répulsion est de la forme  $f(D_{ij}^y)e_{ij}^y$  avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La dérivation de toute force d'interaction fonction uniquement de la distance comme  $\mathbf{s}_{ij}^y$  s'écrit alors :

$$\mathbf{s}_{ij}^{y'} = \frac{1}{D_{ij}^y} f(D_{ij}^y) \underbrace{t_{ij} \otimes t_{ij}}_{\text{projection tangentielle}} - f'(D_{ij}^y) \underbrace{n_{ij} \otimes n_{ij}}_{\text{projection normale}}, \quad (5.13)$$

qui est une matrice symétrique. En fin de compte, la transposée des linéarisations obtenues s'écrivent simplement :

$$(\partial_{\mathbf{y}}\mathbb{F})^T = \partial_{\mathbf{y}}\mathbb{F}, \quad (5.14)$$

$$(\partial_{\mathbf{u}}\mathbb{F})^T = \partial_{\mathbf{u}}\mathbb{F}. \quad (5.15)$$

Passons maintenant à la dérivation de divers opérateurs d'observations.

### 5.1.3.2 Opérateurs d'observation

Il arrive couramment que l'état  $\mathbf{X}$  et l'observation (ou contraintes selon le contexte)  $\mathbf{Y}$  reposent dans des espaces dimensionnels et quantitatifs très différents. L'opérateur d'observation  $\mathbb{H}$  permet ainsi de mettre en relation directe l'état  $\mathbf{X}$  et l'observation  $\mathbf{Y}$  afin de pouvoir comparer ces derniers. Ainsi, toute observation définie par un utilisateur doit être associée à un opérateur d'observation  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  obligatoirement fonction de l'état. Dans le cas d'une observation directe de cet état, donc de bas niveau, cet opérateur est trivial et correspond à la matrice identité. Par exemple dans le cas ici étudié, cela donne les relations :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{obs} \\ \mathbf{u}_{obs} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \Rightarrow (\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{H})^* = \begin{bmatrix} I_{dN} & 0 \\ 0 & I_{dN} \end{bmatrix} = I_{2dN}. \quad (5.16)$$

Cependant, si l'observation du phénomène est de plus haut niveau, l'expression de  $\mathbb{H}$  et sa de linéarisation peuvent prendre des formes diverses. Dans la suite nous présentons certains opérateurs d'observation potentiellement utiles pour le contrôle d'essais de particules.

**Observations Lagrangiennes** En plus de l'observation Lagrangienne triviale que nous venons juste d'évoquer, nous proposons deux autres opérateurs basés sur la relation entre particules.

**Observation par adjacence spécifique** Le premier opérateur consiste à imposer des relations spécifiques au sein des particules. Ce type de relations est étroitement lié à la notion de formes dans le cas où elles correspondent à des distances. Cette façon de décrire des formes par les distance entre des points la composant est plutôt classique [90], mais on peut noter que d'autres possibilités auraient pu être utilisées (voir par exemple [154]). L'interrelation des particules peut facilement s'exprimer à travers une matrice de taille  $N \times N$ . Toutefois, la définition d'un opérateur d'observation  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  matriciel brise dans une certaine mesure le formalisme de l'assimilation variationnelle, puisqu'il est difficile d'exprimer la matrice Jacobienne  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \otimes$  d'une matrice.

La description de formes est ainsi accomplie en définissant la relation d'une particule  $p_k$  à d'autres grâce à une fonction de poids  $w$  et sur la base d'une propriété  $\mathbf{f}$  du graphe. Cette description est ainsi appelée opérateur d'adjacence  $k$ -spécifique (KSA pour *K-Specific Adjacency*), et permet de décomposer une observation matricielle en  $N$  observations vectorielles de taille  $N$ . Toutefois, rien n'oblige à utiliser toutes ces  $N$  observations<sup>2</sup>.

2. Il peut arriver que le problème soit sur-contraint et entraîne des minima locaux plus ou moins critiques comme nous le verrons en section 5.1.4.2.

En supposant que l'on observe certaines relations entre particules à travers la matrice  $\mathbf{M}_{obs} \in \mathbb{W}^{N \times N}$ , nous pouvons extraire le vecteur de relations de la  $k$ -ième particule, les relations observées, en écrivant :

$$\mathbf{Y}^k = \mathbf{M}_{obs} \delta_k^i \in \mathbb{W}^N. \quad (5.17)$$

Cette observation doit être comparée à l'état à travers la matrice d'adjacence définie par les connexions pondérées  $w_{ij}^f$ . Celles-ci sont construites sur la base d'une quantité  $f$  du graphe appartenant à la représentation d'état  $\mathbf{X}$  du modèle, menant à la relation :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X})^k = \mathbf{A}_{w^f} \delta_k^i, \quad (5.18)$$

avec  $\delta_k^i \in \mathbb{Z}^N$ . Nous notons ce vecteur d'adjacence  $k$ -spécifique :

$$\mathbf{a}_{w^f}^k = \mathbf{A}_{w^f} \delta_k^i \in \mathbb{W}^N. \quad (5.19)$$

Une schématisation du principe de cet opérateur est proposée en figure 5.1.

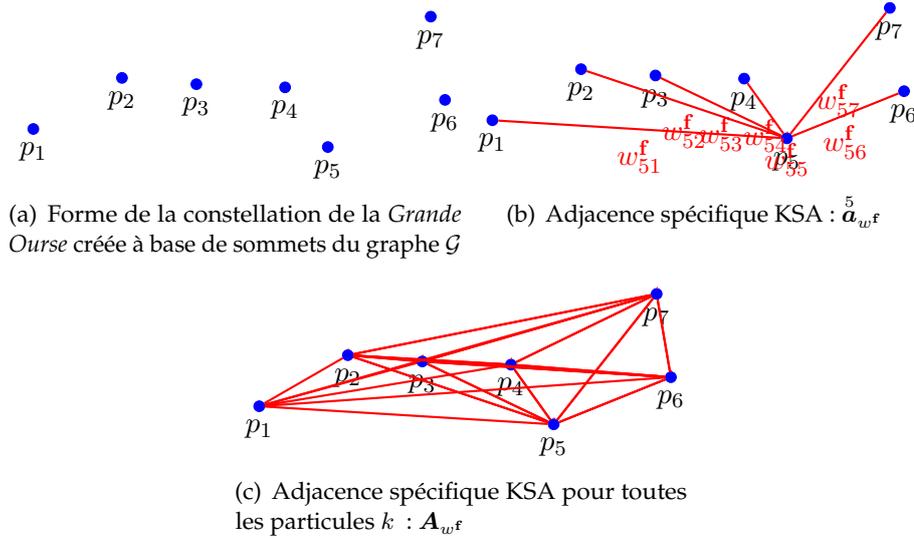


FIGURE 5.1 – Schématisation de l'opérateur d'adjacence  $k$ -spécifique.

Dans le but de dériver l'opérateur d'observation, nous introduisons aussi la matrice dérivée  $k$ -spécifique :

$$\mathbf{l}_{w^f}^k = \frac{\partial \mathbf{a}_{w^f}^k}{\partial \mathbf{f}}, \quad (5.20)$$

qui peut être vue comme une décomposition en  $k$  de la matrice Laplacienne de façon à avoir la relation :

$$\sum_k \mathbf{l}_{w^f}^k = \mathbf{L}_{w^f} \in \mathbb{W}^{N \times N}. \quad (5.21)$$

Cette matrice se définit également telle que :

$${}^k \mathbf{l}_{w^f} = \begin{cases} {}^k \mathbf{l}_{w^f,ij} = w'_{ij} & \text{si } i = j \\ {}^k \mathbf{l}_{w^f,ij} = -w'_{ij} & \text{si } j = k \\ {}^k \mathbf{l}_{w^f,ij} = 0 & \text{si } i = j = k \text{ puisque } \partial_{f_k} w_{kk} = 0 \\ {}^k \mathbf{l}_{w^f,ij} = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5.22)$$

Par exemple, si une telle observation est appliquée à chaque particule  $p_k$ , le processus de contrôle reviendra à déterminer la valeur de  $\mathbf{f}$  minimisant  $\|\mathbf{M}_{obs} - \mathbf{A}_{w^f}\|$ . Remarquons que dans le cas où  $w$  est une fonction de distance appartenant à  $\mathbb{R}$ , cet opérateur est invariant à la translation et à la rotation des formes. Passons maintenant au second opérateur d'observation Lagrangienne proposé.

**Observation par adjacence spécifique normalisée** Le deuxième opérateur proposé est semblable au premier. Il introduit un degré de liberté sur la forme en normalisant cette fois-ci l'observation, l'échelle de la forme n'étant alors plus spécifiée. Ainsi, au lieu d'appliquer directement l'observation de relations entre particules avec  $\mathbf{M}_{obs}$ , on s'intéresse ici uniquement à la proportion de relations par rapport aux autres. Cet opérateur d'observation est ainsi nommé opérateur d'adjacence  $k$ -spécifique normalisée (KSNA pour *K-Specific Normalized Adjacency*). Avec  $\mathbf{D}_{M_{obs}} \in \mathbb{W}^{N \times N}$  la matrice de degré de  $\mathbf{M}$ , on note ainsi :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}_{obs} \mathbf{D}_M^{-1} \delta_k^i, \quad (5.23)$$

et

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}_{w^f} \mathbf{D}_{w^f}^{-1} \delta_k^i. \quad (5.24)$$

En notant le degré  $k$ -spécifique :

$$\mathbf{d}_{w^f} = \delta_i^k \mathbf{D}_{w^f} \delta_k^i \in \mathbb{W}, \quad (5.25)$$

nous réexprimons l'opérateur d'observation :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{d}_{w^f} \left( \mathbf{d}_{w^f} \right)^{-1}. \quad (5.26)$$

La dérivation de cet opérateur d'observation par  $\mathbf{f}$  donne :

$$\partial_{\mathbf{f}} \mathbb{H} = - \left( \mathbf{d}_{w^f} \right)^{-2} \left( \mathbf{d}_{w^f} \otimes \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{d}_{w^f} \right) + \left( \mathbf{d}_{w^f} \right)^{-1} {}^k \mathbf{l}_{w^f}, \quad (5.27)$$

et finalement :

$$\partial_{\mathbf{f}} \mathbb{H} = \left( \mathbf{d}_{w^f} \right)^{-1} \left( {}^k \mathbf{l}_{w^f} - \mathbb{H} \otimes \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{d}_{w^f} \right). \quad (5.28)$$

Un récapitulatif des opérateurs Lagrangiens proposés est disponible en tableau 5.1. Tournons nous maintenant vers la manière d'observer des données Eulériennes.

type d'observation	$\mathbf{Y}$	$\mathbb{H}(\mathbf{X})$	$(\mathbb{H})^*$
état	$\mathbf{X}_{obs}$	$\mathbf{X}$	$I$
adjacence $k$ -spécifique	$M_{obs} \delta_k^i$	$\mathbf{a}_{w^f}^k$	$\left(\mathbf{l}_{w^f}^k\right)^T$
adjacence $k$ -spécifique normalisée	$M_{obs} D_{M_{obs}}^{-1} \delta_k^i$	$\left(\mathbf{d}_{w^f}^k\right)^{-1} \mathbf{a}_{w^f}^k$	$\left(\mathbf{l}_{w^f}^k - \mathbb{H} \otimes \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{d}_{w^f}^k\right)^T \left(\mathbf{d}_{w^f}^k\right)^{-1}$

TABLE 5.1 – Opérateurs d'observation Lagrangiens proposés.

**Observations Eulériennes** Comme nous avons pu le voir précédemment, l'observation de données Eulériennes s'avère intéressante dans une variété de situations. Par exemple, on peut observer à un certain moment sur la grille  $\mathcal{C}$  la concentration d'une certaine propriété du graphe. Dans le cas du modèle de test présenté en section 5.1.2, cette propriété est la quantité des particules  $\mathbf{q}$ . L'opérateur d'observation est donc la concentration vue à l'équation 3.32 :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \rho_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q}, \quad (5.29)$$

et sa dérivation par  $\mathbf{X}$  s'écrit simplement :

$$\begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{y}} \mathbb{H} \\ \partial_{\mathbf{u}} \mathbb{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Il est aussi possible d'observer non plus une concentration de propriété mais une propriété elle-même. Comme nous avons pu le voir en section 3.3.4, l'évaluation de données Lagrangiennes sur une grille Eulérienne est une opération délicate. Dans le cas qui nous intéresse ici, la propriété de graphe dont l'observation est d'intérêt est la vitesse  $\mathbf{u}$ . Nous obtenons ainsi grâce à l'équation 3.34 l'expression :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}. \quad (5.31)$$

La dérivation de cette expression par  $\mathbf{X}$  se lit :

$$\begin{bmatrix} \partial_{\mathbf{y}} \mathbb{H} \\ \partial_{\mathbf{u}} \mathbb{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u} - \mathcal{D}_{w^y}^{-2} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u} \mathcal{A}_{w^y} \\ \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w^y}) \\ \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

où nous rappelons que l'opérateur  $\underline{\cdot}$  est l'opérateur de diagonalisation qui crée une matrice diagonale à partir du vecteur auquel il est appliqué.

En vue d'avoir une lecture plus claire de cette expression et de celles à venir, nous introduisons l'opérateur de *dévi*ation d'une donnée Lagrangienne par rapport à son évaluation Eulérienne :

$$\mathcal{S}_{w^f, \mathbf{d}} = \mathcal{A}_{w^f} \underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w^f}. \quad (5.33)$$

Cette expression permet d'exprimer la dérivation d'opérateurs d'évaluation de manière plus compacte.

En plus de ces opérateurs d'observation sur des quantités Eulériennes liées à la concentration et à l'évaluation, nous proposons des observations de niveau supérieur sur la divergence et la vorticité de propriétés vectorielles telles que la vitesse  $\mathbf{u}$ . Ces propriétés sont en effet significatives dans un grand nombre de phénomènes fluides parmi lesquels la foule peut se situer.

	$\mathbf{Y}$	$\mathbb{H}(\mathbf{X})$	$(\mathbb{H})^*$
densité	$\rho_{\mathcal{C},obs}$	$\mathcal{A}_{G^y} \mathbf{q}$	$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}} \mathcal{A}_{G^y}^T \\ 0 \end{bmatrix}$
vitesse	$\mathbf{u}_{\mathcal{C},obs}$	$\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}$	$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{w^y}^T \end{bmatrix} \mathcal{D}_{w^y}^{-1}$
divergence	$\xi_{\mathcal{C},obs}$	$\underline{\nabla} \mathbf{u}_{\mathcal{C}}$	$\begin{bmatrix} (\partial_y \underline{\nabla} \mathbf{u}_{\mathcal{C}})^T \\ (\partial_u \underline{\nabla} \mathbf{u}_{\mathcal{C}})^T \end{bmatrix}$
vorticité	$\zeta_{\mathcal{C},obs}$	$[\underline{\nabla} \times] \mathbf{u}_{\mathcal{C}}$	$\begin{bmatrix} (\partial_y [\underline{\nabla} \times] \mathbf{u}_{\mathcal{C}})^T \\ (\partial_u [\underline{\nabla} \times] \mathbf{u}_{\mathcal{C}})^T \end{bmatrix}$

TABLE 5.2 – Opérateurs d'observation Eulériens proposés.

**Observation de divergence** La divergence du champ de vitesses associé au mouvement des particules atteste de l'action de concentration ou de dispersion de celles-ci selon son signe (respectivement négatif ou positif). Dans un volume fini, la divergence correspond à l'intégrale sur les frontières du volume de la vitesse normale à celles-ci. Dans l'espace du graphe, elle devient ainsi un opérateur d'observation, tel que :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \xi_{\mathcal{C}} = \underline{\nabla} \mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \underline{\nabla} (\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y}) \mathbf{u} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} - \mathcal{A}_{w^y}) \mathbf{u}. \quad (5.34)$$

La dérivation de cet opérateur par  $\mathbf{X}$  donne après calculs dont les développements sont disponibles en annexe B :

$$\begin{bmatrix} \partial_y \mathbb{H} \\ \partial_u \mathbb{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \xi_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-2} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} \\ \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} - \mathcal{A}_{w^y}) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

**Observation de vorticité** Toujours dans le cas où cet opérateur s'applique à la vitesse des particules, la vorticité atteste de l'action d'enroulement des particules selon l'axe la définissant, et dans le sens de rotation dépendant de son signe. Un opérateur d'observation basé sur cette quantité s'écrit (cf. annexe B) :

$$\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \zeta_{\mathcal{C}} = [\underline{\nabla} \times] \mathbf{u}_{\mathcal{C}} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} ([\underline{\nabla} \times] \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-1} [\mathcal{D}_{w^y} \times] \mathcal{A}_{w^y}) \mathbf{u}. \quad (5.36)$$

La dérivation de cet opérateur par  $\mathbf{X}$  donne après calculs :

$$\begin{bmatrix} \partial_y \mathbb{H} \\ \partial_u \mathbb{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \zeta_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-2} [\mathcal{D}_{w^y} \times] \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} \times \mathbf{u} \\ \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{D}_{w^y}^{-1} [\mathcal{D}_{w^y} \times] \mathcal{A}_{w^y} + [\underline{\nabla} \times] \mathcal{A}_{w^y}) \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Les opérateurs d'observation Eulériens que nous avons présentés montrent la variété de comportements qu'il est possible d'observer, ou d'insuffler au modèle Lagrangien. Le tableau 5.2 dresse un récapitulatif de ces opérateurs. Dans la section suivante, nous présentons quelques résultats expérimentaux de contrôles d'un essaim sous des contraintes d'observation issues de descriptions Lagrangiennes ou Eulériennes.

### 5.1.4 Resultats expérimentaux

Nous proposons de tester et valider notre approche de contrôle en imposant des observations Lagrangiennes et Eulériennes à l'essaim de particules dirigé par le modèle de test présenté en section 5.1.2. Avant de décrire ces expérimentations, nous discutons d'abord de certains aspects pratiques de leur mise en œuvre.

#### 5.1.4.1 Considérations pratiques générales

Le système de contrôle d'un essaim nécessite de fixer un certain nombre de paramètres et de procédés :

- pour la clarté de la présentation, les expériences sont menées dans un espace 2D (autrement dit  $d = 2$ ),
- la simulation de  $\mathbb{M}$ ,  $\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M}$ , et  $(\mathbb{M})^*$  sont accomplies en utilisant le schéma d'intégration temporel de Runge-Kutta du 4ème ordre [120] afin d'améliorer la stabilité des trajectoires par rapport à la simple méthode d'Euler, et le pas de temps d'intégration est  $\Delta t = 0.1 s$ ,
- nous utilisons une grille  $\mathcal{C}$  de  $32 \times 32$  mailles, chacune de taille  $1 m \times 1 m$ ,
- la masse des particules  $\mathbf{m}$  est fixée à  $1 kg$  pour toutes les expérimentations.

Concernant l'assimilation variationnelle, nous utilisons la méthode de résolution incrémentale décrite en section 2.3.5 et par l'algorithme 3. Les matrices de covariance, qui sont les seuls paramètres utilisateur au sens du contrôle, sont définies comme étant diagonales et s'expriment ainsi :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_u \end{bmatrix}, \text{ et } B_0 = \begin{bmatrix} B_{0,y} & 0 \\ 0 & B_{0,u} \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

ce qui revient à supposer que les *a priori* sur les composantes de l'état ne sont pas corrélés entres eux. Dans la mesure où nous supposons que l'équation 5.2, qui fait la relation entre la vitesse et la position des particules, est parfaite, la covariance  $Q_y$  est fixée comme nulle. Par conséquent, seule  $Q_u$  la matrice de covariance d'erreur sur la dynamique du modèle de l'équation 5.3 est non nulle. Nous supposons donc que le paramètre de contrôle est une force additive inconnue. Afin de conserver une même condition initiale au cours du processus de contrôle, nous fixons comme nulles la matrice de covariance d'erreur sur celle-ci.  $B_{0,y}$  et  $B_{0,u}$  sont donc nulles.

Du point de vue de la performance, nous précisons que chaque boucle de contrôle (passe d'assimilation) des exemples présentés a duré entre 10 et 30 secondes pour un processeur mobile cadencé à 2.3 gigahertz. Précisons aussi que nous avons utilisé la méthode d'assimilation dite « par sauvegarde » consistant à sauvegarder toute la trajectoire d'état  $\mathbf{X}$  de la séquence. Dans le cas où l'espace d'état est de grande dimension, et/ou de séquence de longue durée, la mémoire nécessaire peut devenir très importante, ce qui peut constituer un certain inconvénient. Ce n'est cependant pas le cas dans les expériences suivantes.

Nous nous penchons maintenant sur les expérimentations par observations Lagrangiennes. L'ensemble des paramètres décrivant ces expériences se trouvent dans le tableau 5.3.

## 5.1.4.2 Observations Lagrangiennes relatives

Dans cet exemple, l'objectif est d'imposer une certaine relation entre les particules. Pour cela, l'opérateur KSNA introduit précédemment en section 5.1.3.2 est utilisé. Bien que cet opérateur soit formalisé pour n'importe quelle propriété de graphe, et n'importe quelle fonction poids, nous présentons dans un souci de clarté les résultats en prenant la propriété de graphe quelconque  $\mathbf{f} = \mathbf{y}$ , la position des particules, et la fonction poids d'adjacence  $w_{ij}^{\mathbf{f}} = D_{ij}^{\mathbf{y}} = \|y_j - y_i\|$ , la fonction de distance euclidienne. Ce cas permet d'avoir une meilleure compréhension du processus d'assimilation dans un espace décrit de façon Lagrangienne. En considérant une configuration spatiale de particules, comme une forme reconnaissable, nous pouvons obtenir, comme en section 5.1.3.2, la matrice des distances  $\mathbf{M}_{obs}$  de chaque particule à toutes les autres créées par les points de cette forme. L'expérience s'attache alors à déformer la simulation originale, autrement dit l'intégration temporelle du modèle  $\mathbb{M}$ , pour obtenir à un certain temps  $t_{obs}$  fixé par l'utilisateur une configuration spatiale des particules étant aussi proche que possible de la forme ciblée. En d'autres termes, le modèle d'observation n'est défini qu'à l'instant  $t_{obs}$  par :

$$\mathbf{Y}(t_{obs}) = \mathbb{H}(\mathbf{X}(t_{obs})) + \epsilon_{\mathbb{H}}(t_{obs}). \quad (5.39)$$

Nous considérons une matrice de distances  $\mathbf{M}_{obs}$  construite grâce à une forme donnée, et appliquons l'opérateur d'observation KSNA à toutes les particules  $p_k$ . La forme d'observation sera le mot TAC à l'instant  $t_{obs} = 12$  s. Cette forme est construite hors ligne et est constituée de  $N = 46$  particules. La condition initiale sur les positions  $\mathbf{y}(t_0)$  est prise comme la forme ciblée mais à une petite échelle comparé à l'intensité de répulsion entre particules  $a$  et au délai avant l'observation  $t_{obs}$ . Autrement dit, l'intégration du modèle a le temps de disperser significativement les particules avant d'atteindre l'instant d'observation. Elles laissent ainsi derrière elles des trajectoires qui une fois tracées permettent de voir la façon dont la solution a convergé. Jusqu'ici cependant, nous obtiendrions à l'instant  $t_{obs}$  une configuration de particules peu mélangée par rapport à la configuration cible. Les particules n'auraient pas besoin d'échanger leur place relativement au reste de l'essaim. C'est pourquoi nous ajoutons une petite variation aléatoire autour de la configuration initiale  $\mathbf{y}(t_0)$  afin de casser cet arrangement et ainsi solliciter plus fortement le terme de répulsion du modèle au cours du processus de contrôle.

Le résultat de l'expérience apparaît en figure 5.2. La toute première étape de la procédure, c'est à dire l'intégration du modèle  $\mathbb{M}$  de la figure 5.2(a), montre que l'essaim n'a pas d'autre comportement visible que la répulsion entre particules. Après quelques boucles de contrôle, l'essaim modifie toute sa trajectoire d'état et un nouveau comportement fait son apparition, comme le montrent les trajectoires spatiales des particules en figure 5.2(b).

Expérimentation	$\mathbf{X}$ $N$	$\mathbb{M}$						$\mathcal{C}$		$\mathbf{Y}$
		$\alpha$	$\mathbf{W}$	$\mathbf{k}$	$a$	$b$	$Q_{\mathbf{u}}$	$M$	$o$	$R^{-1}$
KSNA	46	0	-	0.5	10	1	0.01	$32 \times 32$	7	100N
Agrégation	64	0.5	$\vec{\text{Est}}$	0.5	2	4	0.01	$32 \times 32$	4	$k_R = \sqrt{10}$
Dipôle	64	0.5	$\vec{\text{Est}}$	0.5	1	4	0.01	$32 \times 32$	2	10

TABLE 5.3 – Paramétrisation des expérimentations de cas test de contrôle optimal d'essaim.

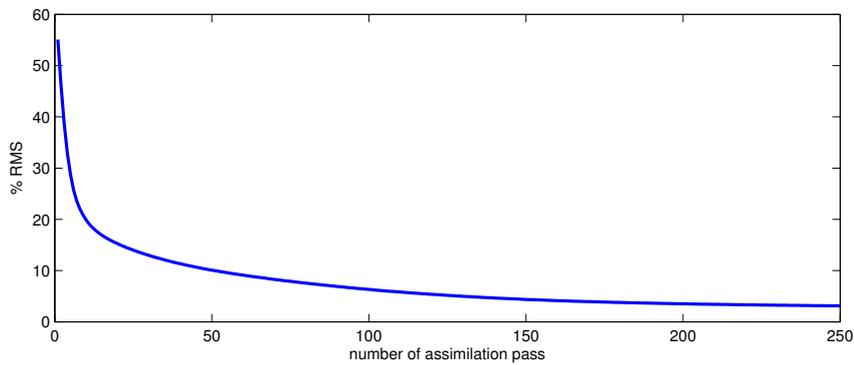
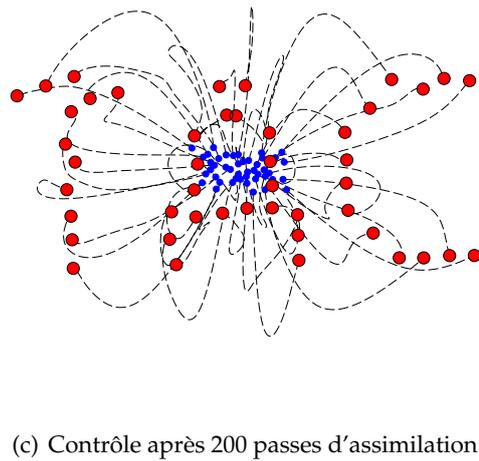
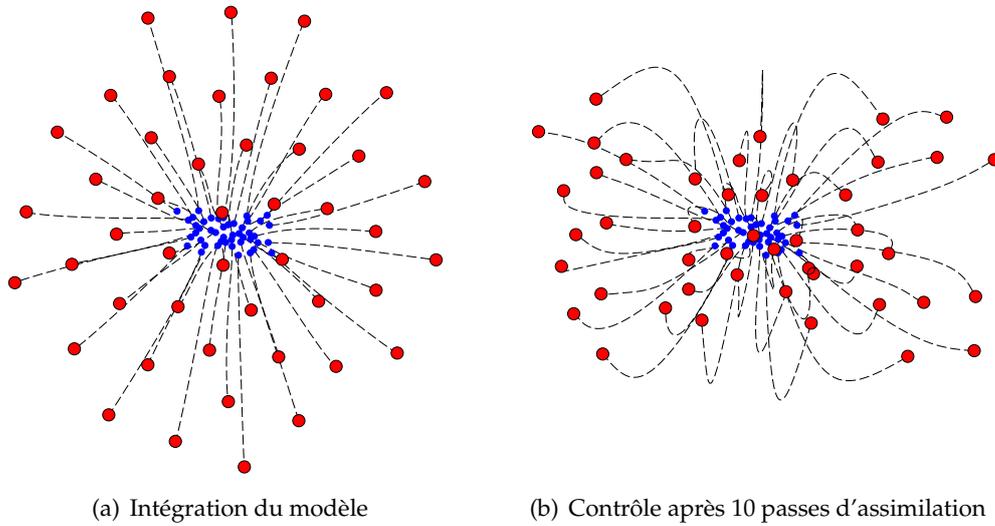


FIGURE 5.2 – **Expérimentation KSNA.** Les points rouges représentent la configuration de l'essaim à  $t = 12$  s, les points bleus à  $t = 0$  s. Les lignes en pointillé sont les trajectoires des particules au cours de la séquence. Les covariances sont réglées manuellement pour obtenir une convergence suffisamment lente pour être régulière, et préserver autant que possible la dynamique de l'essaim.

Après 200 passes d'assimilation, en figure 5.2(c), le mot *TAC* apparaît clairement.

En se penchant sur l'aspect itératif de la solution obtenue, nous voyons que l'essai rencontre certaines difficultés à converger dues à la gêne entre particules, et la vitesse d'évolution des trajectoires diminue considérablement après 10 passes d'assimilation comme le montre la RMS normalisée<sup>3</sup> de  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  par rapport à  $\mathbf{Y}$  dans la figure 5.2(d). En réalité, à ce niveau du contrôle, l'essai peine à surmonter les contraintes dynamiques du modèle qui n'autorise pas facilement la reconfiguration de l'essai puisque la condition initiale a cassé la configuration idéale comme évoqué précédemment. C'est pourquoi lorsque la convergence est atteinte, en figure 5.2(c), nous pouvons observer que certaines particules ont échangé leur position grâce à une rotation respectueuse de leur répulsion mutuelle, comme dans la partie gauche de la lettre *C*. Les deux particules les plus proches, dans la partie supérieure de la lettre *A*, cherchent encore à ce niveau d'itération à échanger leurs positions. Elles sont poussées dans un sens et une direction les rapprochant par l'opérateur d'observation adjoint, mais se repoussent aussi l'une à l'autre à cause du modèle dynamique. C'est un cas typique de minimum local de la fonction coût  $\mathcal{J}$  et d'inconvénient de la méthode proposée. Ces particules sont coincées dans une mauvaise configuration au regard de l'observation  $M_{obs}$ , et entraînent la pollution du positionnement des autres par réflexion sur l'adjacence. Le problème est en réalité sur-contraint lorsque le graphe induit par l'observation, représenté par la matrice d'adjacence  $M_{obs}$ , est de connectivité trop importante. L'utilisation d'autres descripteurs de formes, de stratégies multi-résolution, ou encore de gradients stochastiques, est susceptible de réduire ce problème en diminuant le nombre de minimums locaux. Une autre possibilité visant à surmonter cette difficulté dans le cadre de l'approche proposée ici serait d'augmenter la confiance dans le modèle et diminuer celle dans l'observation pour obtenir une convergence plus lente, et potentiellement plus vigilante vis-à-vis d'éventuelles échappatoires aux minimums locaux. De manière plus triviale, il est aussi possible de ne pas appliquer l'opérateur KSNA sur toutes les particules  $p_k$  afin de creuser la matrice d'observation et ainsi relaxer le problème.

Notons aussi que la modification des trajectoires est aussi contrainte par les propriétés dynamiques que sont la viscosité  $k$  et la masse  $m$  des particules. Qualitativement, nous pouvons vérifier que les trajectoires sont approximativement soumises au même couple masse-ressort au cours du contrôle puisque aucune d'elles ne présente un aspect radicalement différent de celui des autres.

Pour finir, nous remarquons que l'échelle, l'orientation, et le positionnement de la forme atteinte à la convergence correspond à la solution apparemment la plus proche de la simulation de départ (une attention particulière sur ce point montre que la forme obtenue n'est pas tout à fait horizontale) ce qui prouve l'efficacité de notre approche. Malgré les limites mentionnées ci-dessus, cette expérience démontre que l'utilisation d'observations Lagrangiennes de haut niveau est efficace. Passons maintenant au cas des observations Eulériennes.

---

3. La RMS normalisée est définie dans la section 4.2.2.1

### 5.1.4.3 Observations Eulériennes

Dans cette section, nous présentons des expérimentations basées sur deux types d'observation Eulériennes que sont la densité et le couple cinétique constitué par la divergence et la vorticité.

**Agrégation par observation de densité** Le problème d'agrégation est répandu dans la gestion d'essaims de robots. Ce problème peut être énoncé comme suit :

« Comment les particules doivent évoluer afin de se situer dans une certaine zone à un instant donné  $t_{obs}$  ? »

Nous proposons d'y répondre en utilisant l'opérateur d'observation de densité. Le contrôle optimal permet alors de déterminer comment le modèle  $\mathbb{M}$  doit être modifié pour dévier la trajectoire d'état  $\underline{X}$  initialement obtenue afin de trouver une concentration spécifique de particules au temps  $t_{obs}$ . Nous considérons le cas d'agrégation illustré en figure 5.3(a), où l'essaim doit se situer dans la zone  $A$  (au temps  $t_{obs,A} = 12s$ ), puis  $B$  (au temps  $t_{obs,B} = 20s$ ), tandis qu'il se dirige vert l'Est. Ces zones, ainsi que leur instant associé, ont été choisies pour leur incompatibilité par rapport à la dynamique du modèle afin de mettre en évidence la contribution de l'approche générale ici décrite. Comme le montre la figure 5.3, nous ajoutons à ces consignes un gradient de densité afin de contrôler également la répartition des particules, et donc leur manière de s'agréger.

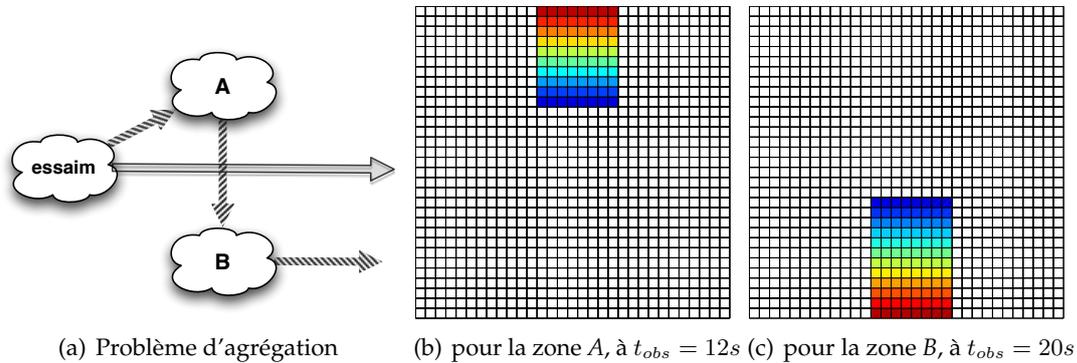


FIGURE 5.3 – **Problème d'agrégation.** Au lieu d'être seulement dirigé par le modèle dynamique  $\mathbb{M}$ , nous imposons aussi à l'essaim contrôlé d'atteindre les zones  $A$  et  $B$ . Les deux observations  $A$  et  $B$  sont symétriques horizontalement, et la valeur maximale de densité en rouge atteint  $1.3\text{ ptl.m}^{-2}$ . La grille  $\mathcal{C}$  est uniquement montrée ici dans un souci de clarté des images à venir.

En s'appuyant sur le fait que la taille des mailles de la grille fournit la déviation standard  $\sigma_1$  la plus fine, nous utiliserons celle-ci pour la paramétrisation du noyau Gaussien de l'observateur d'observation défini à l'équation 5.29. Cette déviation décrit par la suite la haute résolution de l'observation. On peut comprendre grâce à la figure 5.3 que la valeur de cette déviation est faible comparée à la distance entre la trajectoire initiale de l'essaim et les zones d'agrégation. Par conséquent, la dérivée du noyau Gaussien dirigeant l'opérateur d'observation de densité adjoint (voir le tableau 5.2) est de faible intensité dans les premières itérations de contrôle, et n'est pas capable de fournir assez de puissance au modèle adjoint afin d'attirer l'essaim dans les zones d'agrégation. En réalité, l'opérateur ne sera essentiellement efficace que pour des particules se situant à  $1\text{ m}$  de distance de

l'information d'agrégation. Nous suggérons donc d'inclure au système d'observation une approche multi-résolution.

**Observation multi-résolution** Cette approche est accomplie grâce à l'utilisation d'un spectre de déviations standard, au lieu de l'usage unique de  $\sigma_1$ . Ceci permet aux particules de capturer l'information de densité pour différentes distances les séparant, et où l'observation reste non atteinte. Le spectre est ici pris tel que  $\sigma_r = \{1 m, 2 m, 4 m, 8 m, 16 m\}$ , garantissant une forte probabilité que la distance d'une particule  $p_j$  à une maille  $c_m$  varie communément entre deux déviations standard :  $\sigma_r < \|\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_{c_m}\| < \sigma_{r+1}$ . Notons que la taille significative du domaine étant de  $32 m$ , la distance maximale possible est de  $32\sqrt{2} m$  que nous considérons comme à portée de la déviation de plus basse résolution  $\sigma_5 = 16 m$ . Nous convoluons aussi la consigne d'observation  $\mathbf{Y}$  de la figure 5.3 pour toutes ces résolutions afin de donner des observations atteignables au processus d'assimilation, puisqu'aucune configuration de particule, ni déviation non nulle, ne permet d'obtenir précisément cette consigne. Ces convolutions sont illustrées en figure 5.4.

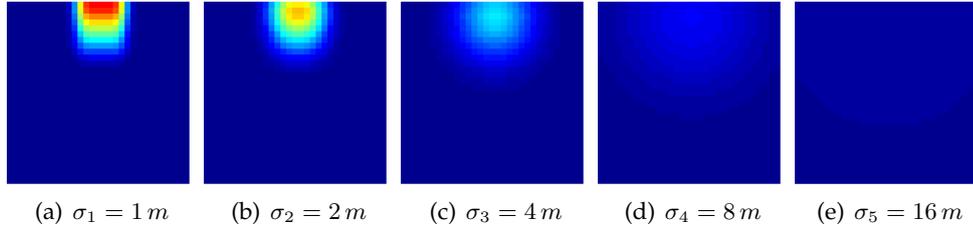


FIGURE 5.4 – Observation de densité  $\mathbf{Y}$  pour différentes résolutions. Observations pour la zone  $A$ , à  $t_{obs} = 12s$ . L'échelle de couleur est identique à celle de la figure 5.3.

Jusqu'ici, les opérateurs par résolution et leur adjoint correspondent à un filtrage de données laissant passer essentiellement celles situées à une distance comprise entre  $0 m$  et  $2\sigma_r$ . Si nous considérons la densité observée après l'intégration du modèle  $\mathbb{M}$  montrée en figure 5.5, et considérons la différence entre les cartes de la figure 5.4(e) et de la figure 5.5(e), nous constatons que la norme de la différence  $\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X})$  est faible. Il est pourtant prévisible que cette différence soit beaucoup plus importante pour la plus haute résolution une fois que l'essaim aura atteint la zone  $A$  et ses environs.

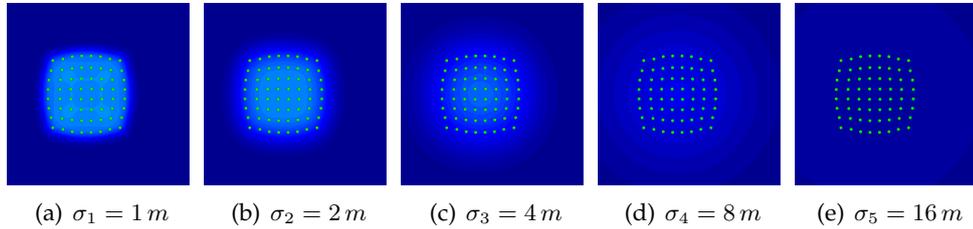


FIGURE 5.5 – Densité observée  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  pour différentes résolutions juste après l'intégration du modèle. L'échelle de couleur est identique à celle de la figure 5.3.

La covariance d'observation  $R$  dépend en réalité fortement de la façon dont opère  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$ . Cette covariance est d'un certain point de vue censée amplifier l'intensité de l'opérateur d'observation linéarisé adjoint  $(\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{H})^*$ . En effet, la confiance dans l'observation est

nécessairement plus importante pour les basses résolutions, et nous supposons qu'elle est proportionnelle à la densité significative au carré :  $G_{\sigma_r}^2$ . Cette supposition se base sur la définition de la covariance, qui est homogène au carré de la donnée à laquelle elle est associée. Nous énonçons alors :

$$R = k_R^2 G_{\sigma}(0)^2 I_M, \quad (5.40)$$

avec  $k_R$  étant un coefficient de confiance identique pour toutes les résolutions et homogène à l'unité *ptl* de quantité de particules. La figure 5.6 montre le comportement global de l'opérateur d'observation multi-résolution linéarisé adjoint  $(\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{H})^*$  amplifié par  $R^{-1}$  en traçant  $G'_{\sigma}(\mathbf{x})G_{\sigma}(0)^{-2}$  pour le spectre de déviations standard considéré.

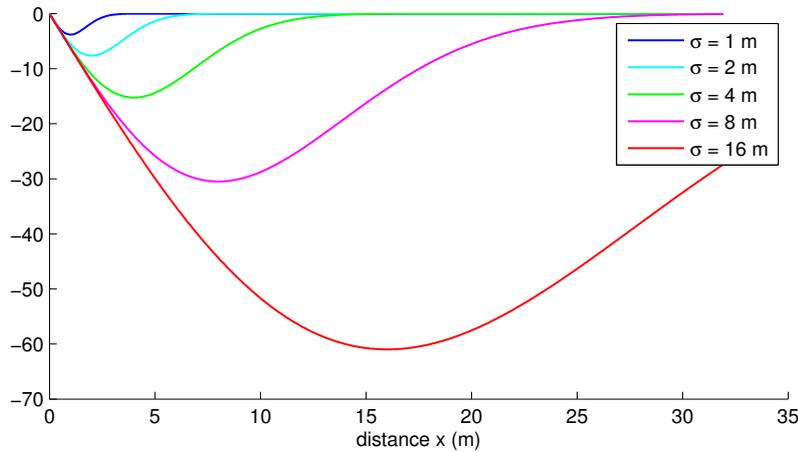


FIGURE 5.6 – Illustration du comportement d'intensité de l'opérateur d'observation de densité multi-résolution linéarisé adjoint amplifié par  $R^{-1}$ . Les courbes tracées sont  $G'_{\sigma_r}(\mathbf{x})G_{\sigma_r}(0)^{-2}$ . Le pic d'intensité est atteint pour la distance égale à  $\sigma_r$ , et l'intensité augmente avec la diminution de la résolution.

**Résultats** Nous présentons en figure 5.7 les résultats de l'expérimentation en montrant l'évolution de la trajectoire des particules, de la figure 5.7(a) à la figure 5.7(c), au cours du processus de contrôle. Mise à part la phase de démarrage des particules où elles se repoussent, nous pouvons voir que les trajectoires sont droites. L'essaim n'a pas d'autre but que d'aller vers l'Est et de se disperser si nécessaire. Après 10 passes d'assimilation, les trajectoires sont modifiées et présentent un aspect tordu. Il est difficile pour l'essaim d'être présent dans la zone *A* et seulement 8 s plus tard dans la zone *B* vis-à-vis de ses propriétés dynamiques. En conséquence, la 'torsion' du modèle est difficile et nécessite plus de passes de contrôle afin que l'essaim atteigne les densités de consigne. Après 300 passes, l'essaim a clairement atteint les zones désirées, et la contrainte de gradient de densité des particules (pour rappel présentée en figure 5.3) apparaît. Les particules qui étaient le plus loin des zones cibles aux instants d'observation ont pu s'en approcher quelque peu mais sans les atteindre. La consigne  $\mathbf{Y}$  est effectivement quasiment satisfaite, et l'erreur restante est trop faible pour que l'assimilation puisse, par le biais de la variable adjointe  $\lambda$ , générer suffisamment d'attraction.

Du point de vue de la multi-résolution, notons que les RMS normalisées de la figure 5.8(a) et la figure 5.8(b) montrent que les observations attendues et la convergence sont atteintes plus rapidement pour les basses résolutions que pour les hautes. De la figure

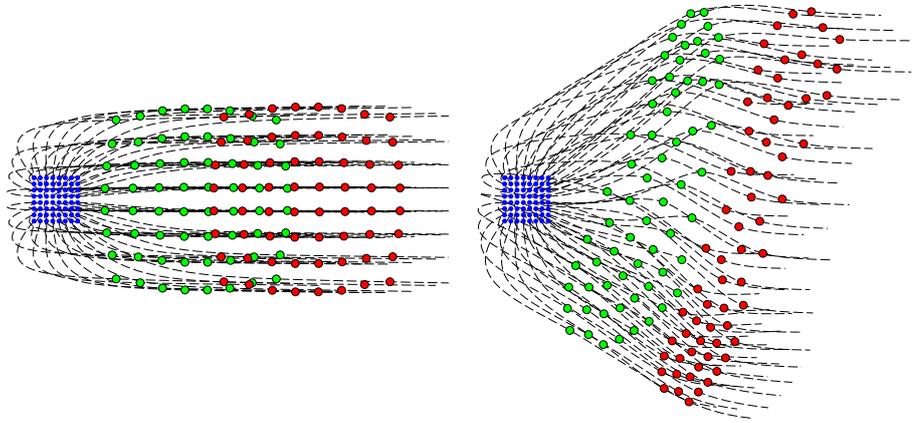
5.9(a) à la figure 5.9(e) on peut remarquer que les densités observées lorsque la convergence est quasiment atteinte sont très proches des observations de densité attendues montrées de la figure 5.4(a) à la figure 5.4(e). En outre, notons que la dynamique a été préservée autant que possible : les particules se repoussent tant bien que mal. L'essaim doit pourtant pour respecter l'observation  $\mathbf{Y}$  se concentrer plus fortement que son régime libre ne lui permet.

Cette expérimentation montre la capacité de cette approche à générer des trajectoires consistantes avec contraintes spécifiques sur la densité. Etudions maintenant le comportement de l'essaim que nous obtenons sous contraintes de divergence et vorticité.

**Contrôle par contraintes de divergence et vorticité** En plus du problème d'agrégation, nous proposons des observations Eulériennes de niveau encore supérieur basées sur la divergence et la vorticité. Comme mentionné plus haut, ces quantités sont particulièrement intéressantes à étudier puisqu'elles embarquent des propriétés de dynamique clés (dispersion, concentration et rotation relative des particules). Cependant, la production d'un champ de vecteurs sur la base de cartes de divergence et de vorticité n'est pas immédiate car ce problème nécessite la résolution d'équations de Poisson (par exemple à l'aide de transformées de Fourier) ce qui constitue une tâche délicate. Ainsi, la génération de trajectoires consistantes à partir valeurs spécifiques de divergence et de vorticité, sans passer par le calcul explicite de champs de vitesse, est une tâche originale et attractive que nous proposons de résoudre grâce au contrôle optimal Lagrangien par assimilation variationnelle.

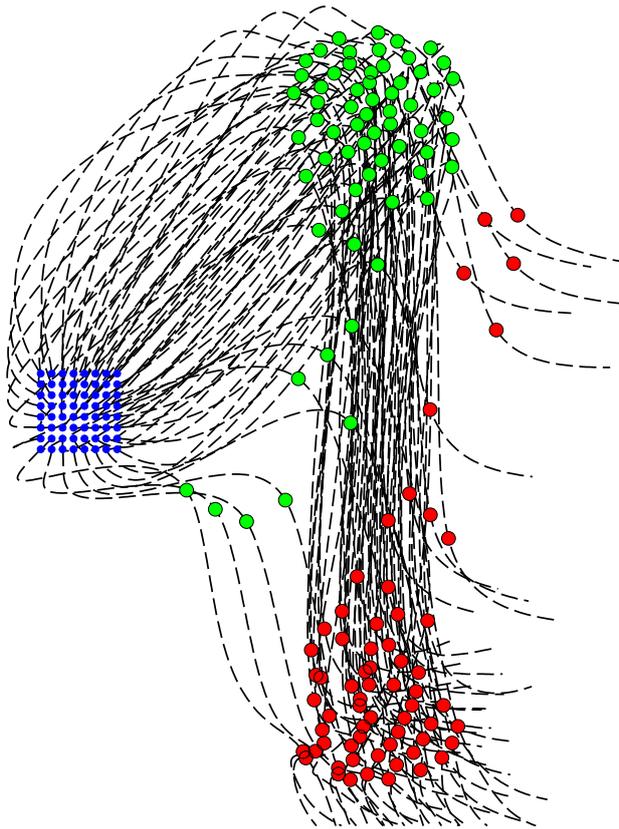
Dans ces exemples, nous cherchons à créer un dipôle fait de deux zones symétriques et homogènes dans lesquelles la vorticité est opposée et la divergence nulle. La figure 5.10 montre une schématisation du cas que nous visons à obtenir. La figure 5.10(b) montre l'observation  $\mathbf{Y}$  utilisée pour la vorticité qui est non homogène dans les zones concernées. En effet, la fonction poids utilisée pour l'évaluation étant le noyau Gaussien, la consigne d'observation doit être pré-lissée, tout comme les observations de densité, pour pouvoir correspondre à une vorticité Lagrangienne homogène. L'observation de divergence nulle est située dans les mêmes zones que là où se situe celle de vorticité.

Pour cette expérimentation, nous utilisons la méthode d'évaluation Eulérienne présentée en section 3.3.4 et illustrée en figure 3.12. Nous présentons en figure 5.11 les résultats de l'expérience en montrant de nouveau les trajectoires des particules. La vorticité observée  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  après 150 passes d'assimilation, visible en figure 5.12(a), s'accorde clairement à l'observation  $\mathbf{Y}$  de la figure 5.10(b). La divergence est elle aussi correctement contrôlée puisqu'elle est maintenue à une valeur faible comme montré dans la figure 5.12(b). L'erreur sur la vorticité, visible en figure 5.13, décroît exponentiellement à l'exception des premières itérations tandis que l'essaim n'est pas encore situé dans les zones d'observation. On peut remarquer que l'expérience menée possède un comportement proche de celui de l'agrégation étudié plus haut. L'essaim semble attiré vers les zones d'observation, sans aucune autre spécification que la vorticité et la divergence. En réalité la manière la plus simple, du point de vue de la fonction coût  $\mathcal{J}$ , pour les particules de créer de la vorticité est de générer un enroulement avec une modification de vitesse la plus faible possible. Ainsi l'essaim va plutôt chercher des vitesses plus faibles dans les zones d'observation plutôt que de grandes vitesses loin d'elles. Il est aussi à noter que l'axe principal de la vorticité, autrement dit le pivot de vitesses visible en figure 5.12(c), n'est pas situé au



(a) Intégration du modèle

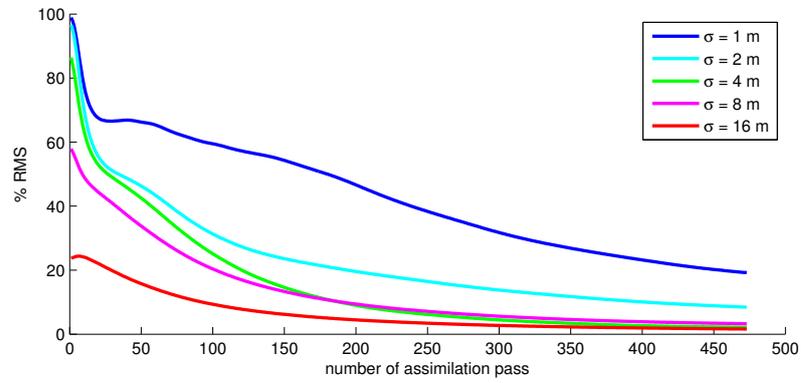
(b) Résultat après 10 passes d'assimilation



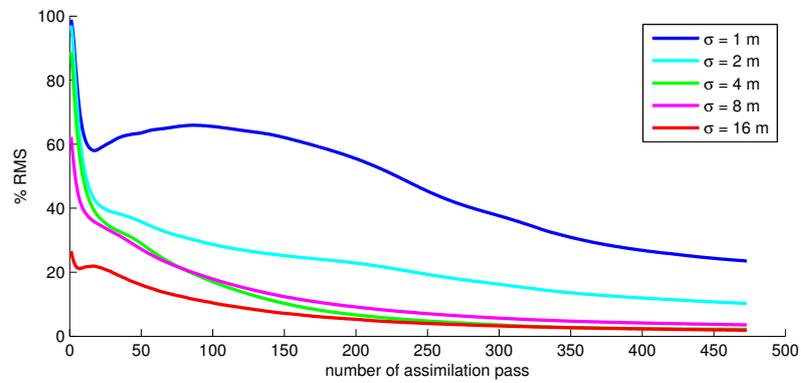
(c) Résultat après 300 passes d'assimilation

FIGURE 5.7 – **Expérience d'agrégation.** Les points verts représentent la configuration des particules à  $t_{obs} = 12 s$ , les points rouges à  $t_{obs} = 20 s$ , les bleus à  $t = 0 s$ .

5.1. Contrôle d'essai par assimilation variationnelle



(a) à  $t_{obs} = 12 s$



(b) à  $t_{obs} = 20 s$

FIGURE 5.8 – Evolution de l'erreur de l'expérience d'agrégation. RMS de  $R^{-1}\mathbb{H}(\mathbf{X})$  par rapport à  $R^{-1}\mathbf{Y}$ .

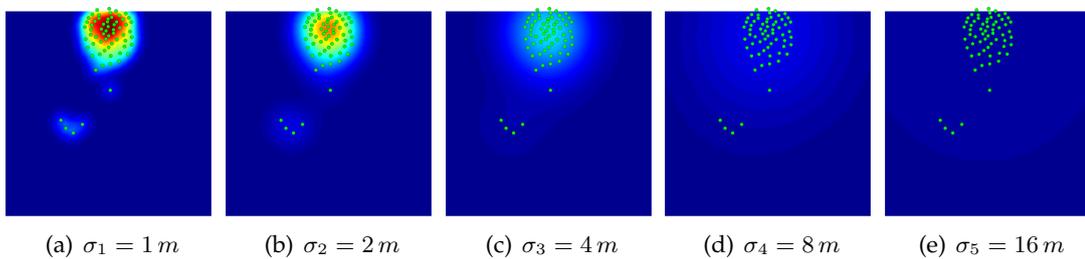


FIGURE 5.9 – Densité observée pour l'expérience d'agrégation Illustration de  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  avec superposition des particules à  $t_{obs} = 12 s$ .

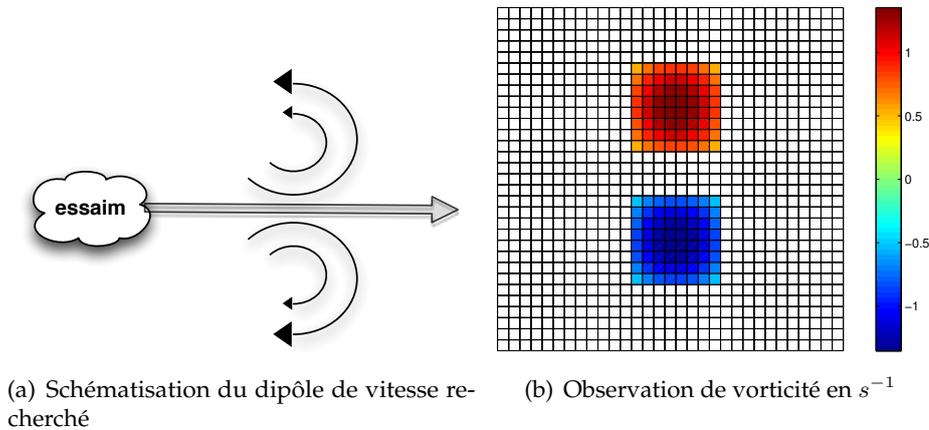


FIGURE 5.10 – **Présentation de l'expérience du dipôle.** Au lieu d'être seulement conduit par le modèle dynamique  $\mathbb{M}$ , nous demandons à l'essaim de créer sur son chemin un dipôle de vitesse en spécifiant uniquement deux valeurs de vorticité opposées et une divergence nulle.

milieu de chaque fragment de l'essaim, ce qui témoignerait d'une vitesse moyenne nulle. L'axe vient en réalité se placer naturellement sur la périphérie des zones pour maintenir la vitesse longitudinale moyenne initiale de l'essaim, qui est de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  vers l'Est.

La divergence initiale et celle visée étant toutes deux de très faible intensité, l'évolution de l'erreur au cours des itérations n'est pas significative. Cette erreur est principalement une conséquence du contrôle par contrainte de vorticité.

### 5.1.5 Conclusion et discussion

Dans cette section nous avons proposé un cadre complet pour la gestion du contrôle optimal d'un essaim de particules Newtonniennes par utilisation de l'assimilation variationnelle. Cette approche théorique est capable de gérer à la fois un modèle d'évolution et des observations plus générales de l'environnement, rendant possible la production de comportements d'essaims complexes tout en conservant la dynamique des particules.

Les observations ici proposées concernent des problématiques plus ou moins communes, comme la formation ou l'agrégation d'un essaim. Nous avons aussi introduit des opérateurs d'observation de plus haut niveau tels que la divergence et la vorticité Eulérienne de vecteurs, que nous avons expérimenté sur la vitesse des particules.

La variété des opérateurs d'observation expérimentés, ainsi que le succès que nous avons rencontré quant à atteindre les observations de consigne tout en préservant autant que possible la dynamique des particules et de l'essaim, suggère qu'un large panel d'autres comportements peut être manipulé. Cette section propose aussi une réflexion sur la gestion d'opérateurs potentiellement délicats à mettre en oeuvre tels que la densité en introduisant une approche multi-résolution. Une certaine idée de la covariance y est aussi exposée, susceptible d'être transposée à d'autres types d'opérateurs.

Rappelons que si l'approche en général est illustrée dans un cas en deux dimensions, où l'état de l'essaim est constitué des positions et vitesses des particules le composant, rien n'empêche de reproduire cette approche pour des systèmes en interaction en ayant une

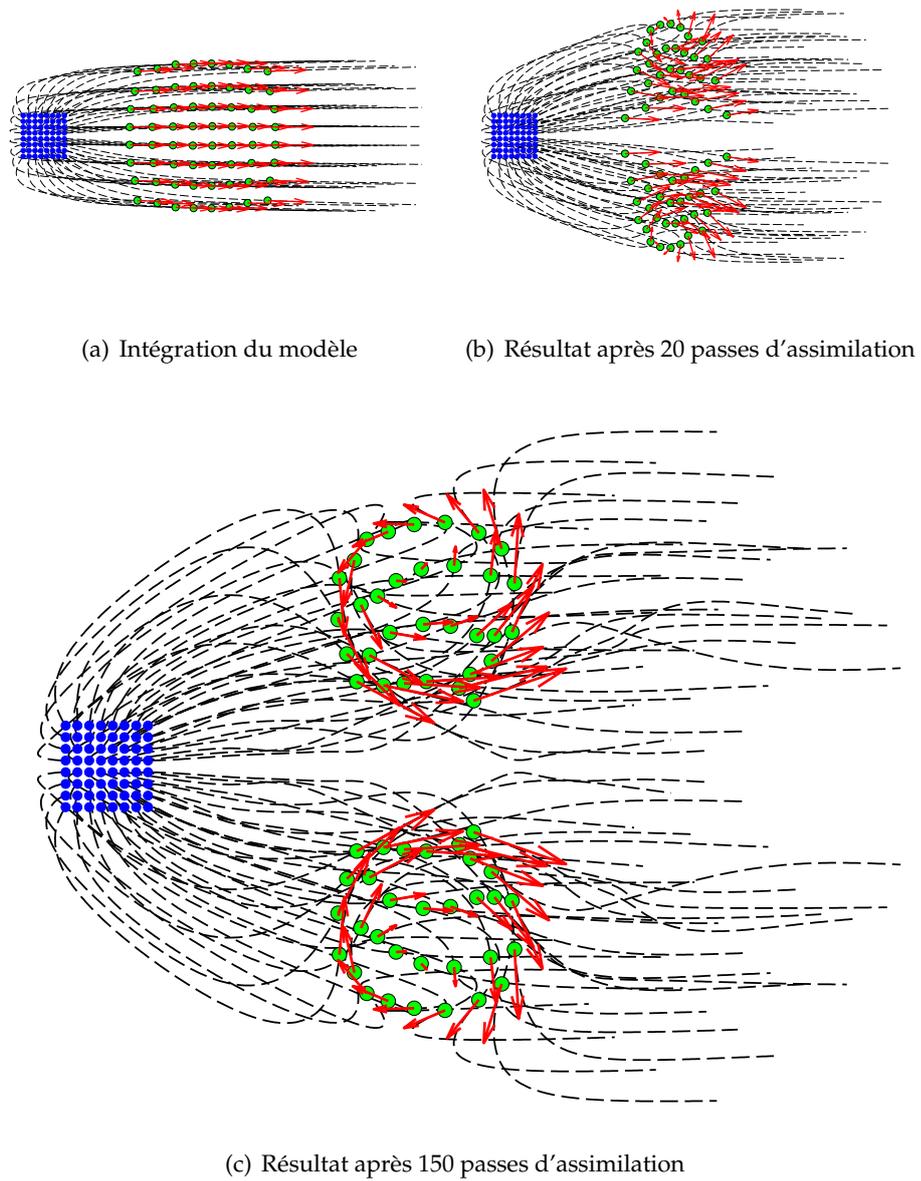


FIGURE 5.11 – Expérimentation du dipôle. Les points vers représentent la configuration de l'essaim à  $t_{obs} = 14 s$ , et les points bleus à  $t_0 = 0 s$

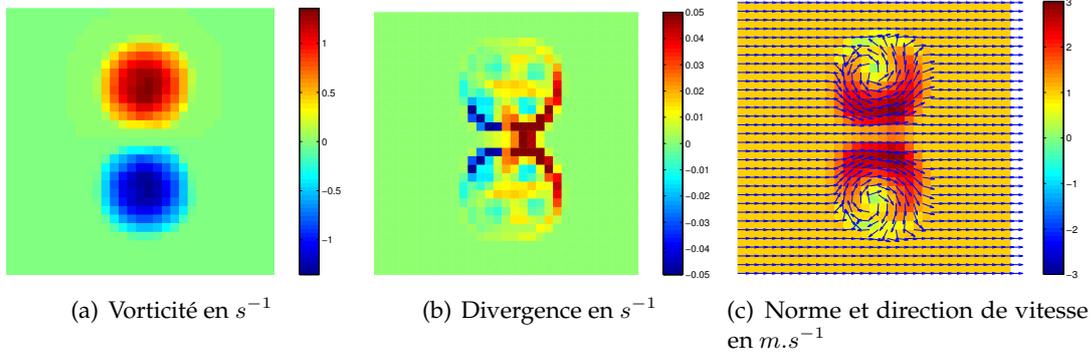


FIGURE 5.12 – Quantités observées pour l'expérience du dipôle. Illustration de  $\mathbb{H}(\mathbf{X})$  à  $t_{obs} = 14 s$  après 150 passes d'assimilation. La vitesse ne fait néanmoins pas partie des observations et est présentée à titre indicatif.

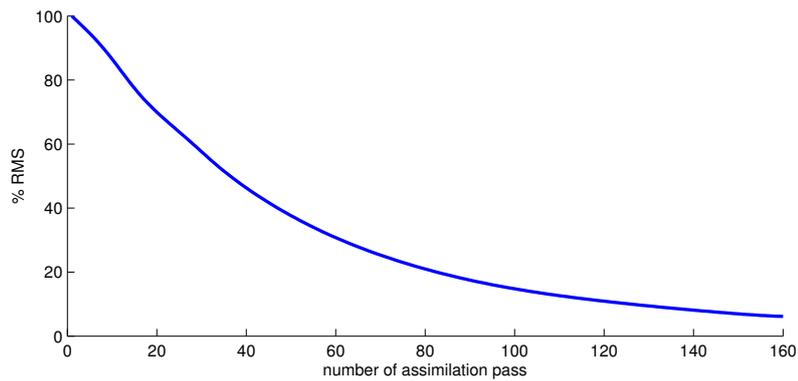


FIGURE 5.13 – Evolution de l'erreur de l'expérience du dipôle. RMS de  $R^{-1}\mathbb{H}(\mathbf{X})$  par rapport à  $R^{-1}\mathbf{Y}$  à  $t_{obs} = 14 s$ .

représentation d'état exotique par rapport à celle ici considérée, et basée sur des propriétés plus abstraites. D'une manière générale les domaines dans lesquels la théorie des graphes trouve une application (e.g. réseaux d'information, circulation routière, biologie, ... ) sont susceptibles de trouver un intérêt dans l'approche proposée. Il reste cependant nécessaire de disposer d'un modèle d'évolution et d'observations dérivables, ce qui n'est pas tout le temps possible. Les résultats présentés suggèrent aussi que le contrôle spatial Lagrangien et la déformation des trajectoires des particules qu'il implique, agit de façon analogique à des cordes que l'on étirerait et dont les propriétés mécaniques virtuelles correspondraient aux propriétés dynamiques des particules. Cette illustration apporte un certain regard sur l'impact produit par l'assimilation variationnelle sur l'évolution dynamique d'un état, indépendamment de sa description.

Si le contrôle optimal d'essaim par assimilation s'est révélé puissant, il existe cependant un certain nombre d'inconvénients à cette approche. Le premier provient de la théorie de l'assimilation variationnelle qui est construite sur une descente de gradient. Le contrôle est par conséquent exposé aux minima locaux de la fonction coût, et rien ne garantit que la solution obtenue à la convergence soit réellement optimale. Ceci est particulièrement vrai dans l'espace Lagrangien par rapport au cas Eulérien. Dans l'espace Lagrangien en effet les particules répulsives peuvent se gêner les unes les autres créant ainsi des murs d'énergie infranchissables selon la paramétrisation de l'assimilation, c'est à dire selon les covariances utilisées. Ajoutons que la vitesse de minimisation, autrement dit de descente de gradient, dépend fortement de ces mêmes covariances, compliquant davantage encore leur paramétrisation. Cet usage quelque peu en aveugle est notamment dû au fait que les covariances d'erreur d'initialisation, de modèle, ou d'observation reposent dans des espaces quantitatifs différents pour lesquels il est difficile de définir des relations *a priori*. Par conséquent, la mise en oeuvre du contrôle ici proposé en privilégiant telle variable de contrôle sur telle autre, par un facteur déterminé ayant un sens, et ce avec une vitesse de minimisation connue, est presque impossible.

En ce qui concerne les applications possibles et les perspectives de cette approche, nous pouvons par exemple mentionner le domaine des sciences environnementales géophysiques, comme la météorologie ou l'océanographie, pour lequel il est parfois utile de décrire certaines quantités par des particules Lagrangiennes correspondant à des événements d'intérêt (comme des vortex suivant des cyclones ou des anticyclones) afin de réduire la complexité calculatoire [24]. L'état étudié reste néanmoins soumis à une dynamique continue que le cadre proposé se trouve être parfaitement capable de prendre en compte. Un autre domaine d'application possible concerne le suivi de polluants ou de traceurs (comme des bouées dérivantes) dans l'océan. Ces objets ponctuels peuvent parfaitement se représenter par des particules tandis qu'ils sont conduits par le courant océanique. Là encore, le contrôle de ces traceurs peut se réaliser par assimilation variationnelle en exploitant le cadre proposé dans ce travail.

La manipulation des opérateurs utilisée ici quant à l'échange entre données Lagrangiennes et Eulériennes peut être en outre être exportée à d'autres techniques d'estimation que l'assimilation variationnelle, comme par exemple le filtre de Kalman et ses déclinaisons vues en section 2.2.2. Pour finir, nous avons utilisé une déclinaison de l'assimilation basée sur l'incertitude générale de la dynamique qui est considérée comme imparfaite (variable additive de contrôle sur le modèle). Il est néanmoins possible d'utiliser une autre déclinaison se basant sur une dynamique considérée cette fois-ci comme parfaite pour

estimer, en plus de l'état, la valeur de certains paramètres du modèle (variable quelconque de contrôle sur le modèle).

Nous pouvons aussi étendre l'approche vue dans cette section à des phénomènes plus ciblés. Pour commencer, de manière similaire à ce qui été vu dans le chapitre 3, le terme source constant et homogène de l'essaim peut être remplacé par le gradient d'un potentiel environnemental, créant un comportement global au sein du seul modèle. De même, l'interaction entre particules peut présenter certaines subtilités intrinsèques au type d'objet que représentent les particules, comme par exemple des individus. L'attention particulière portée sur la nature du sujet fait l'objet de l'étude de la section suivante, où nous proposons cette fois-ci de contrôler non plus un essaim aux comportements minimalistes, mais des foules humaines.

## 5.2 Contrôle de foules humaines

Le contrôle d'une foule, c'est à dire la possibilité d'obtenir un schéma voulu (configuration spatiale, dynamique particulière) à un instant donné, est un exercice difficile. La plupart des modèles de simulation n'autorisant pas ce niveau de contrôle, c'est souvent le rôle de l'animateur de tester différents jeux de paramètres du modèle et, par essais et corrections, d'essayer d'obtenir la situation désirée. On imagine bien que ce processus, au mieux fastidieux, est le plus souvent voué à l'échec, vue la complexité des dynamiques inter-individuelles mises en œuvre. Quelques récents travaux abordent ce problème en combinant à des stratégies d'évitement locales des champs de vitesse désirés (nommés alors champs de navigation) [17, 57, 100, 101]. Dans [57], Jin *et al.* construisent ces champs de vitesse à partir de combinaisons de fonctions bi-dimensionnelles à base radiale paramétrées par un utilisateur. Park [100] propose de contrôler le flux de la foule en spécifiant explicitement la trajectoire d'individus particuliers. Le choix de ces individus, et la spécification de leurs trajectoires restent cependant problématiques. Patil *et al.* proposent un champ de navigation qu'il est possible de définir intuitivement à l'aide d'une interface dédiée, ou de définir sur la base de mouvements réels issus de vidéos. Cette approche est donc par certains aspects similaire à l'idée exprimée dans cette thèse. D'autres approches considèrent les relations spatiales entre les individus d'une foule (exprimée sous la forme d'un graphe) comme une information à privilégier et à maintenir dans le processus d'animation. Des méthodes d'interpolation spectrales [131] ou de déformation de maillages [63] sont alors utilisées pour éditer un mouvement existant (c'est à dire de le déformer pour obtenir le schéma désiré). Malgré les réelles qualités de ces méthodes et les très bons résultats obtenus, il reste cependant à déplorer que les trajectoires ainsi obtenues perdent le plus souvent les caractéristiques dynamiques liées au modèle de simulation, celles-ci étant obtenues uniquement sur la base de considérations géométriques.

A l'inverse, le contrôle d'un essaim comme nous l'avons vu permet d'insuffler une variété de comportements à la simulation tout en maintenant la dynamique inhérente au modèle. Alors que dans la partie précédente les particules considérées ainsi que les forces s'y appliquant étaient rudimentaires, nous étudions maintenant des particules présentant une dynamique plus complexe correspondant à celle de mouvements de foule. Pour cela, nous commençons par détailler la dérivation de certaines forces relatives à la foule que nous avons introduites en section section 3.2, puis nous présenterons des expérimentations montrant la pertinence de l'approche proposée (section 5.2.2), mais aussi ses limites (section 5.2.3).

### 5.2.1 Dérivation par l'état des forces relatives à la foule

Nous considérons encore une fois que la foule est représentée par sa position  $\mathbf{y}$  et sa vitesse  $\mathbf{u}$ . L'espace d'état est donc de nouveau :  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$ . Le modèle dynamique conduisant *a priori* la foule est pris comme étant celui décrit dans la section 3.4. Etudions la dérivation de ses principaux termes.

### 5.2.1.1 Dérivation du terme source

Le terme source s'écrit pour rappel :

$$\mathbb{F}_{\text{source}} = \underline{\alpha} \mathbf{W}. \quad (5.41)$$

Nous supposons que  $\alpha$  est constant, ce qui signifie que la volonté des individus de se rendre à destination n'évolue pas. Leur direction préférentielle est obtenue grâce à la résolution de l'équation eikonale décrite en section 3.1.2.3. Nous disposons ainsi de  $W(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{dM}$  qui par passage dans l'espace Lagrangien donne  $W_i(y_i)$ . De la même manière la matrice Jacobienne  $\partial_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d \times dM}$  donne par passage dans l'espace Lagrangien  $\partial_{y_i} W_i(y_i)$ . Ainsi nous avons :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}} = \mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\partial_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x})), \quad (5.42)$$

et son adjoint se lit :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}} \right)^* = (\partial_{\mathbf{x}} W(\mathbf{x}))^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y}. \quad (5.43)$$

### 5.2.1.2 Dérivation du terme de friction

De la même manière que présenté en section 5.1.3.1, le terme de friction s'écrit :

$$\mathbb{F}_{\text{friction}} = -\underline{\mathbf{k}} \mathbf{u}, \quad (5.44)$$

et sa dérivation par  $\mathbf{u}$  :

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbb{F}_{\text{friction}} = -\underline{\mathbf{k}}, \quad (5.45)$$

qui est une matrice symétrique et donc égale à son adjoint.

### 5.2.1.3 Dérivation de la force sociologique

Nous utilisons ici la force sociologique introduite à l'équation 3.66. Celle-ci se base pour rappel sur la supposition que les individus cherchent à minimiser la densité qui les environne. Cette force s'écrit :

$$\mathbb{F}_{\text{sociologique}} = -\underline{\beta} \mathbf{A}_{G''^y} \mathbf{q}, \quad (5.46)$$

dans la mesure où nous ne considérons ici qu'une seule déviation standard pour chaque individu  $p_i : \underline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 1 m & 0 \\ 0 & 0.5 m \end{bmatrix}$ .

La dérivation de la force sociologique, compte tenu des propriétés de dérivation de l'adjacence vues section 3.3.5, et plus particulièrement à l'équation 3.39, s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{\text{sociologique}}}{\partial \mathbf{y}} = -\underline{\beta} \mathbf{L}_{G''^y} \mathbf{q}. \quad (5.47)$$

L'adjoint de cet opérateur se lit, grâce à l'équation 3.40 :

$$\left( \frac{\partial \mathbb{F}_{\text{sociologique}}}{\partial \mathbf{y}} \right)^* = -(\mathbf{D}_{(G''^y, \mathbf{q})}^T - \underline{\mathbf{q}} \mathbf{A}_{G''^y}^T) \underline{\beta}, \quad (5.48)$$

$G''$  étant une matrice symétrique.

### 5.2.1.4 Dérivation de la force corporelle

La force corporelle, introduite à l'équation 3.52, s'écrit pour rappel :

$$\mathbb{F}_{\text{body}} = \underbrace{\mathbf{A}_{b^y \kappa}}_{\text{composante de répulsion}} + \underbrace{\mathbf{A}_{b_{\text{slow}}^{y, \mathbf{u}} \nu}}_{\text{composante de frottement}}, \quad (5.49)$$

avec :

$$\mathbf{b}_{ij}(y_i, y_j) = g(r_{ij} - D_{ij})n_{ij}, \quad (5.50)$$

et :

$$\mathbf{b}_{\text{slow } ij}(y_i, y_j, u_i, u_j) = g(r_{ij} - D_{ij})((u_j - u_i) \cdot t_{ij})t_{ij}, \quad (5.51)$$

**Dérivation de la composante de répulsion** En reprenant la dérivation de la force inversement exponentielle en distance, vue en section 5.1.3.1, et de façon analogue à l'équation 5.11 et l'équation 5.13, nous écrivons :

$$\mathbf{b}_{ij}^{y'} = g(r_{ij} - D_{ij}) \frac{1}{D_{ij}^y} (t_{ij} \otimes t_{ij}) + h(r_{ij} - D_{ij})(n_{ij} \otimes n_{ij}), \quad (5.52)$$

avec :

$$h(r_{ij} - D_{ij}) = \frac{\partial g(r_{ij} - D_{ij})}{\partial D_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r_{ij} < D_{ij} \\ -1 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (5.53)$$

et l'expression totale de la dérivation de la répulsion mécanique se lit :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{b^y \kappa}}{\partial \mathbf{y}} = -\mathbf{L}_{b^y \kappa}. \quad (5.54)$$

**Dérivation de la composante de frottement** La dérivation de la partie de la force corporelle relative au frottement se fait de manière différente puisqu'elle dépend à la fois de la position  $\mathbf{y}$  et la vitesse  $\mathbf{u}$ . Afin d'isoler les dérivées partielles d'une fonction poids dépendant de plusieurs variables du graphe, nous introduisons la notation suivante :

$$\mathbf{b}_{\text{slow } ij}^{y, \mathbf{u}} = \mathbf{b}_{\text{slow } ij}^{\partial y, \mathbf{u}} + \mathbf{b}_{\text{slow } ij}^{y, \partial \mathbf{u}}, \quad (5.55)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{b}_{\text{slow } ij}^{y, \mathbf{u}}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{b}_{\text{slow } ij}^{y, \mathbf{u}}}{\partial u_i}. \quad (5.56)$$

La dérivation en position s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{slow } ij}^{\partial y, \mathbf{u}} &= g(r_{ij} - D_{ij})(u_j - u_i) \cdot t_{ij} \frac{1}{D_{ij}^y} (n_{ij} \otimes n_{ij}) \\ &\quad + h(r_{ij} - D_{ij})(u_j - u_i) \cdot t_{ij} (n_{ij} \otimes t_{ij}) \\ &\quad + g(r_{ij} - D_{ij})(u_j - u_i) \frac{1}{D_{ij}^y} (n_{ij} \otimes n_{ij} \otimes t_{ij}). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Cette matrice appartenant à  $\mathbb{R}^{d \times d}$  n'est pas symétrique. Dans l'optique de l'utilisation du modèle linéarisé adjoint  $(\partial_{\mathbf{X}} \mathbb{M})^*$ , sa transposée se lit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_{\text{slow}_{ij}}^{\partial \mathbf{y}, \mathbf{u}})^T &= g(r_{ij} - D_{ij})(u_j - u_i).t_{ij} \frac{1}{D_{ij}^y} (n_{ij} \otimes n_{ij}) \\ &+ h(r_{ij} - D_{ij})(u_j - u_i).t_{ij} (t_{ij} \otimes n_{ij}) \\ &+ g(r_{ij} - D_{ij})(u_j - u_i) \frac{1}{D_{ij}^y} (t_{ij} \otimes n_{ij} \otimes n_{ij}). \end{aligned} \quad (5.58)$$

La dérivation en vitesse s'écrit elle :

$$\mathbf{b}_{\text{slow}_{ij}}^{y, \partial \mathbf{u}} = g(r_{ij} - D_{ij})(t_{ij} \otimes t_{ij}). \quad (5.59)$$

Finalement la dérivation de la force corporelle par l'état  $\mathbf{X}$  se lit :

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{\text{body}}}{\partial \mathbf{X}} = - \left[ \underbrace{\mathbf{L}_{b^y, \kappa} + \mathbf{L}_{b_{\text{slow}}^{\partial y, u, \nu}}}_{\partial_{\mathbf{y}} \mathbb{F}_{\text{body}}} \quad \underbrace{\mathbf{L}_{b_{\text{slow}}^{y, \partial \mathbf{u}, \nu}}}_{\partial_{\mathbf{u}} \mathbb{F}_{\text{body}}} \right], \quad (5.60)$$

et son adjoint :

$$\left( \frac{\partial \mathbb{F}_{\text{body}}}{\partial \mathbf{X}} \right)^* = - \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{(b^y, \kappa)^T} + \underline{\kappa} \mathbf{A}_{b^y}^T & -\mathbf{D}_{(b_{\text{slow}}^{\partial y, u, \nu})^T} + \underline{\nu} \mathbf{A}_{b_{\text{slow}}^{\partial y, u}}^T \\ -\mathbf{D}_{(b_{\text{slow}}^{y, \partial \mathbf{u}, \nu})^T} + \underline{\nu} \mathbf{A}_{b_{\text{slow}}^{y, \partial \mathbf{u}}}^T & \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

### 5.2.1.5 Dérivation de la force d'obstacles

L'expression de la force d'obstacle est présentée à l'équation 3.53, pour rappel elle s'écrit :

$$\mathcal{O}_i(y_i) = (a_i e^{\frac{r_i - D_{i\mathcal{W}}}{b_i}} + \kappa g(r_i - D_{i\mathcal{W}})) n_{i\mathcal{W}} + \nu g(r_i - D_{i\mathcal{W}}) (u_i \cdot t_{i\mathcal{W}}) t_{i\mathcal{W}}. \quad (5.62)$$

Sa dérivation s'opère de la même manière que pour les forces corporelles de répulsion et de frottement, à ceci près que la relation à l'individu  $j$  est remplacée par la relation à l'obstacle le plus proche  $\mathcal{W}$ , que l'on suppose connu comme précisé en section 3.4.2. Un simple changement d'indice de  $j$  vers  $\mathcal{W}$  peut ainsi s'opérer pour obtenir le formalisme adéquat.

Maintenant que l'ensemble du modèle Lagrangien dédié à la foule a été dérivé comme requis pas l'assimilation variationnelle, nous nous penchons sur son application.

## 5.2.2 Contrôle de foules unidirectionnelles

La foule présente en certains cas une homogénéité dans son comportement. L'ensemble des individus peut par exemple se diriger dans une direction commune. A la lumière des théories évoquées et développements menés jusqu'ici, nous sommes en mesure d'éditer ce comportement selon diverses spécifications.

### 5.2.2.1 Formation

Dans cet exemple, schématisé en figure 5.14, un groupe d'individus en déplacement homogène est chargé de former les lettres *EG* à un instant donné  $t_{obs} = 15 s$  de la simulation. Aucune exigence sur la localisation de ces lettres, ni leur orientation n'est formulée. Cette forme est définie par une matrice d'adjacence caractérisant les distances entre positions des individus de façon similaire à la méthode proposée dans [131]. Cette matrice sert ainsi d'observation vis-à-vis de l'opérateur d'observation KSA vu en section 5.1.3.2. Les

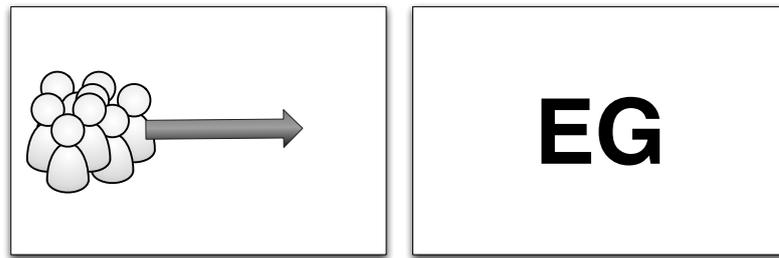


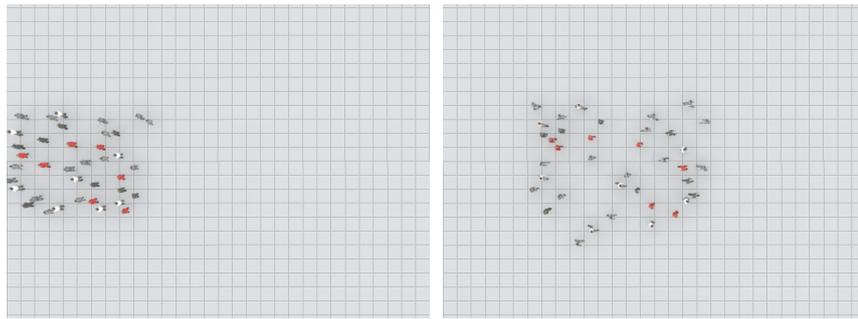
FIGURE 5.14 – Un groupe de piétons est chargé de former les lettres *EG* à un instant donné de la simulation.

résultats de cette expérimentation sont montrés en figure 5.15. Les figures 5.15(a), 5.15(b), 5.15(c) et 5.15(d) montrent différents instants du résultat obtenu après contrôle et avec rendu réaliste. Les figures 5.15(e) et 5.15(e) montrent les trajectoires des piétons avant et après contrôle, c'est à dire les trajectoires obtenues par la simple simulation du modèle, puis celles obtenues après assimilation de l'observation des lettres *EG* par l'opérateur KSA. Ces lettres peuvent être distinctement identifiées à  $t = t_{obs}$  sur la figure 5.15(c) ce qui atteste de la réussite de l'expérimentation en ce qui concerne l'observation. Sur les autres figures de cette séquence, on peut constater qualitativement que le modèle est respecté, que ce soit avant l'observation (figure 5.15(b)) ou après (figure 5.15(d)). En comparaison avec [131], les individus conservent le comportement issu du modèle, et ce comportement n'est ici pas le produit d'une interpolation de caractéristiques spatio-temporelles. Les piétons continuent ainsi de transporter leurs propriétés dynamiques. Le résidu d'innovation, visible en figure 5.15(g), montre en dehors de la convergence deux régimes distincts de diminution d'erreur. A partir de la dixième itération, cette évolution est en effet moins rapide. Ceci est dû à la re-configuration et la contraction du groupe qui vient mettre à l'épreuve le modèle ayant une composante répulsive.

### 5.2.2.2 Rendez-vous

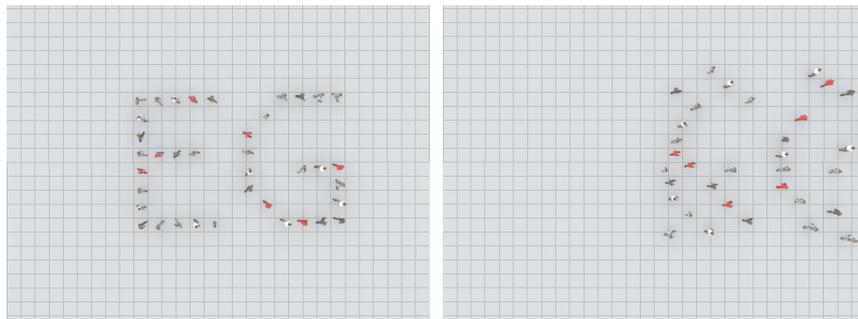
Une autre expérience qui présente un intérêt dans le domaine de l'édition de scènes de foules consiste à piloter un sous ensemble d'individus. On propose ici d'assigner à deux piétons d'une foule unidirectionnelle un point de rendez-vous à un instant  $t_{obs}$  en arrière de la foule. Cette expérience est schématisée en figure 5.16.

Nous avons donc ici besoin de spécifier à  $t_{obs}$  la position et la vitesse de deux des individus, autrement dit de spécifier le point de rendez-vous ainsi qu'une vitesse nulle.



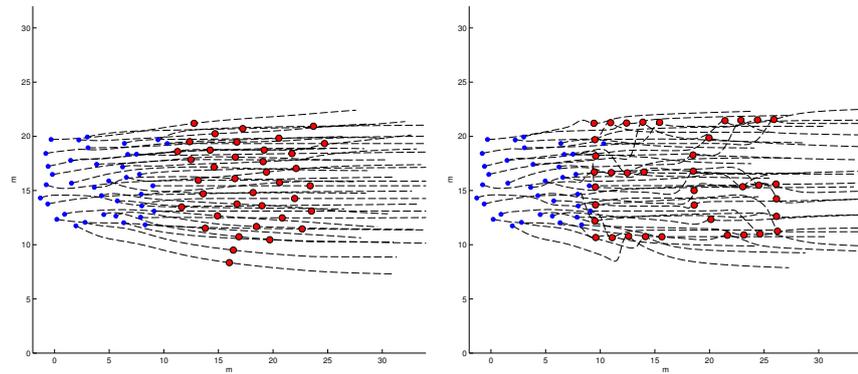
(a)  $t = 0 s$

(b)  $t = 10 s$



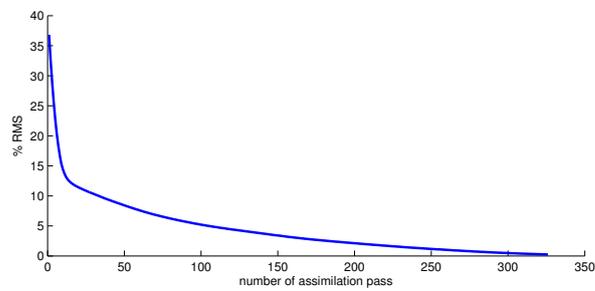
(c)  $t = t_{obs} = 15 s$

(d)  $t = 20 s$



(e) Trajectoires et positions (en rouge) des piétons à  $t_{obs}$  obtenues par simulation

(f) Trajectoires et positions (en rouge) des piétons à  $t_{obs}$  obtenues après 300 passes d'assimilation



(g) Evolution de l'erreur : RMS de  $R^{-1}\mathbb{H}(\mathbf{X})$  par rapport à  $R^{-1}\mathbf{Y}$ .

FIGURE 5.15 – Expérimentation par formation de lettres

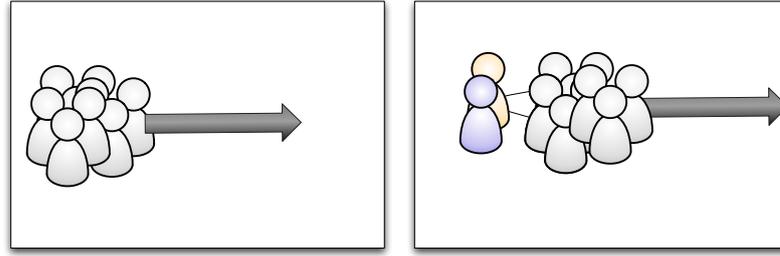


FIGURE 5.16 – **Expérience de rendez-vous.** Deux individus s’extraient du groupe et se rejoignent en un point à une vitesse nulle.

C’est donc directement l’état qui fait office d’observation. En utilisant :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{obs} \\ \mathbf{u}_{obs} \end{bmatrix}, \text{ et : } \mathbb{H}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

comme opérateur d’observation, il est ainsi aisé d’introduire la contrainte de rendez-vous. Nous considérons un groupe de  $N = 38$  piétons se dirigeant vert l’Est de l’environnement. Parmi ce groupe, deux individus se rejoignent à l’arrière de celui-ci à  $t_{obs} = 20$  s. Malgré la gêne que le groupe produit sur eux, ces deux piétons arrivent à se frayer un chemin au milieu des autres personnes, comme nous pouvons le voir dans la figure 5.17. Dans la mesure où l’optimisation est globale, les individus se situant sur le chemin des intéressés aident aussi à libérer un passage. Par exemple, lorsque que l’un d’entre eux voit que la personne qui les devance manifeste l’intention de faire demi tour, celui-ci s’écarte pour laisser passer l’intéressé. Ce comportement est donc qualitativement naturel, puisque le modèle réagit de façon cohérente aux contraintes qui lui sont demandées. Nous obtenons donc au final une scène réaliste du point de vue comportemental.

Afin d’illustrer la difficulté que constitue la détermination de trajectoires optimales pour ces deux individus, et pour le reste du groupe, nous présentons en figure 5.18 l’évolution des trajectoires au cours de l’assimilation. On peut voir plus particulièrement dans la figure 5.18(c) et la figure 5.18(d) que les trajectoires qu’ont pris les deux intéressés ne sont pas directes, et soumises à plusieurs bifurcations. Ceci est spécialement vérifiable en amont de l’observation, quand les individus évoluent à contre-courant du groupe et doivent se faufiler. Ces bifurcations sont dans un sens normales, puisque les individus se gênent naturellement les un les autres. Mais elles sont aussi la conséquence de variations incrémentales par rapport à un groupe homogène dont l’élasticité de cohésion est brisée. En aval des observations, les individus tentent de retrouver la position qu’ils avaient dans le groupe initialement.

### 5.2.2.3 Discussion

Dans ces expériences, la foule étudiée est unidirectionnelle. L’étude de variations du modèle (selon la diminution de  $\mathcal{J}$ ) est relativement aisée et fournit des résultats satisfaisants. Le contrôle optimal par l’assimilation variationnelle incrémentale est donc apte à contrôler une foule homogène dans le but d’obtenir certaines contraintes, ou observations. Néanmoins, nous avons pu constater dans l’expérience de rendez-vous que le contrôle d’individus particuliers au sein d’un groupe brise la formation globale initiale

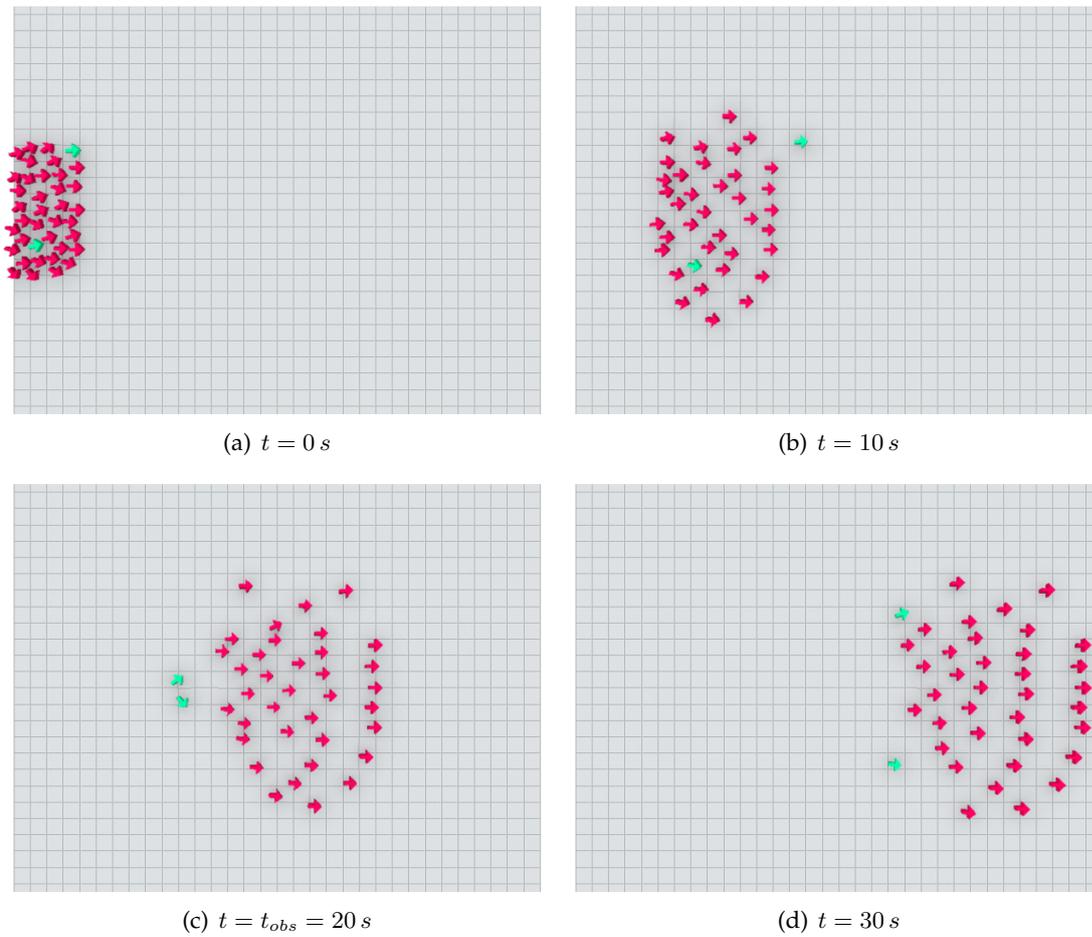


FIGURE 5.17 – **Expérience de rendez-vous.** Les piétons sont représentés par des flèches. Le point de rencontre des individus en vert est situé derrière le groupe et doit être atteint à  $t_{obs} = 20 s$ .

## 5.2. Contrôle de foules humaines

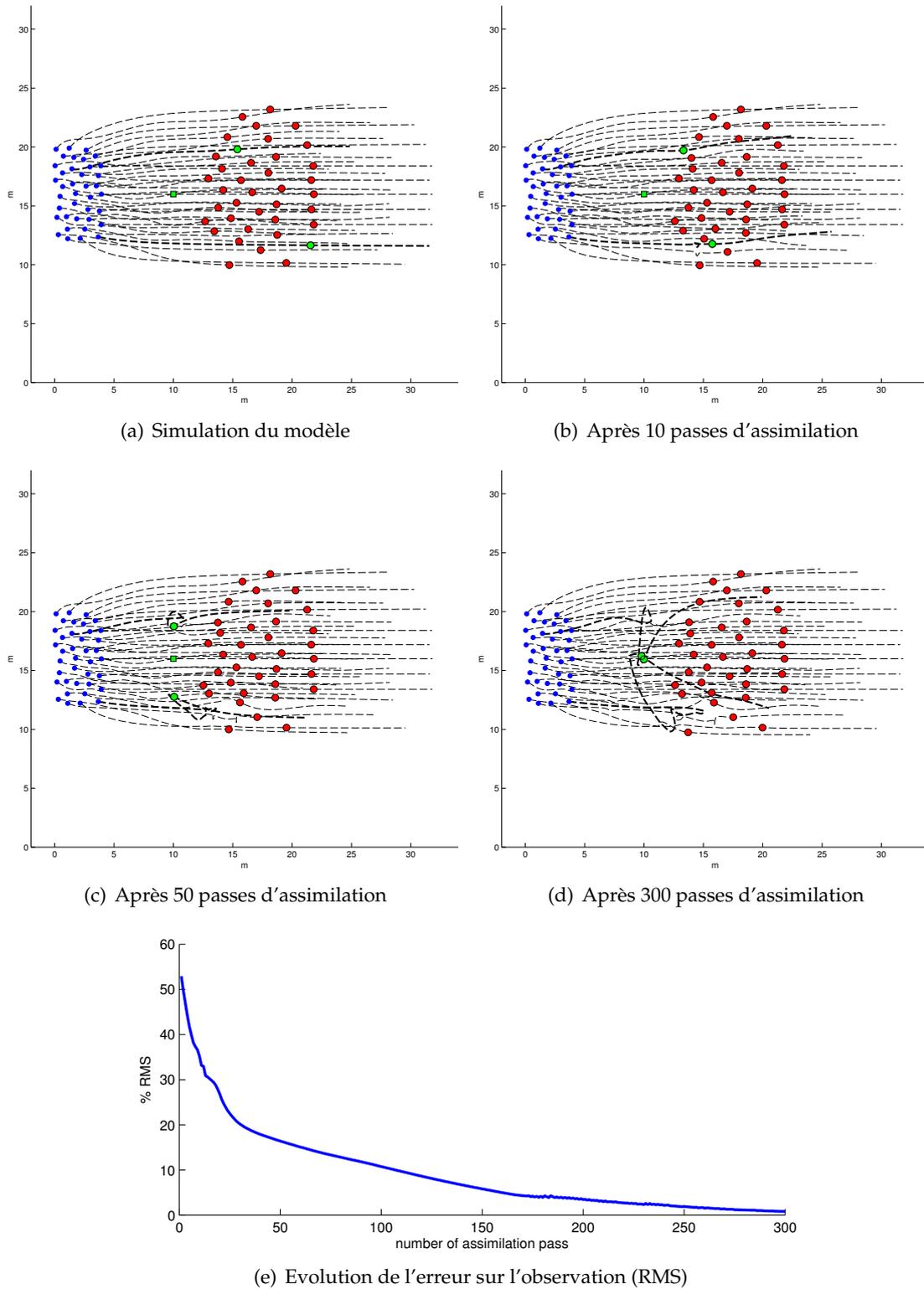


FIGURE 5.18 – **Expérience de rendez-vous.** Evolution des trajectoires des individus au cours de l'assimilation. Les points verts et rouges sont les positions des individus à  $t_{obs} = 20$  s. Les individus en vert cherchent à atteindre au même instant le point de rendez-vous représenté par le carré vert.

et entraîne des effets de distorsion de trajectoires qui ne sont pas nécessairement optimaux au sens global. Nous nous penchons dans la suite sur cette problématique.

### 5.2.3 Contrôle de foules multi-directionnelles et problématique d'emmêlement

La foule, lorsqu'elle n'est pas dirigée par un but commun, présente souvent un mélange important de populations. Des individus ayant pour objectifs des lieux différents peuvent être amenés à se frayer un chemin parmi d'autres personnes. En conséquence, ceux-ci se croisent et se dépassent. Ceci entraîne l'apparition d'emmêlement de trajectoires, qui peuvent créer des barrières énergétiques dans l'optique de minimiser une fonction de coût  $\mathcal{J}$ . Cette variabilité peut poser problème dans l'approche de contrôle optimal d'agents que nous proposons. Pour illustrer cette problématique, considérons deux individus qui se croisent en ayant des objectifs opposés. Nous considérons le modèle dit *mécanique* présenté en section 3.4 cette fois-ci dans un environnement sans obstacles. La force s'appliquant à l'essaim est donc :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\text{source}} + \mathbb{F}_{\text{friction}} + \mathbb{F}_{\text{body}}, \quad (5.64)$$

et dans les mêmes conditions que la simulation illustrée en figure 3.13, c'est à dire pour tous les individus  $p_i : m_i = 70 \text{ kg}$ ,  $\alpha_i = 140 \text{ N}$ ,  $k_i = 140 \text{ kg.s}^{-1}$ ,  $\kappa_i = 2000 \text{ N.m}^{-1}$ , et  $\nu_i = 2000 \text{ N.s.m}^{-2}$ . Le rayon des individus est pris tel que  $r_i = 0.5 \text{ m}$ , afin de mettre en évidence le phénomène à suivre.

Considérons deux individus provenant de chaque côté de l'environnement, et se dirigeant chacun vers le côté opposé, et dont une illustration de la simulation est proposée en figure 5.19. On peut clairement voir l'évitement par contact des deux individus en milieu de séquence. Nous cherchons à contrôler cette foule restreinte en apposant une observation en position de type  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}_{\text{obs}}$ ,  $\mathbb{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{y}$  à l'aide de l'assimilation variationnelle incrémentale vue en section 2.3.5 et utilisée dans la section 5.1. Nous allons voir que selon l'observation proposée, des barrières d'énergie sur la fonction coût  $\mathcal{J}$  peuvent apparaître. Dans les expériences à suivre, les covariances sont paramétrées telles que :  $Q_{\mathbf{u}} = I_{dN} 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-4}$  et  $R = I_{dN} 0.02 \text{ m}^2$ .

#### 5.2.3.1 Contrôle sans barrières

Nous considérons l'observation pour laquelle chaque individu doit atteindre un point se situant du même côté que lui dans l'environnement par rapport à l'autre personne. Cette observation est illustrée en figure 5.20(a). On peut voir que le segment (non représenté) reliant la position à  $t_{\text{obs}}$  de chaque individu à son observation ne coupe pas la trajectoire de l'autre individu. L'évolution des trajectoires au cours de l'assimilation, visible en figure 5.20<sup>4</sup>, montre que les individus modifient leurs comportements de manière naturelle en passant sur le point qui leur est dévolu. Notons que le crochet apparaissant dans les trajectoires après assimilation correspond à la mémoire du crochet d'évitement de la simulation.

4. La lenteur de la convergence est due à la paramétrisation des covariances d'erreur qui est identique, dans un souci d'objectivité, avec celle des expériences à venir dont les problèmes sont moins triviaux. Ces expériences nécessitent ainsi une certaine stabilité de trajectoire pour être démonstratif, et le choix est ainsi fait d'exagérer ralentir la vitesse de descente de gradient de  $\mathcal{J}$ .

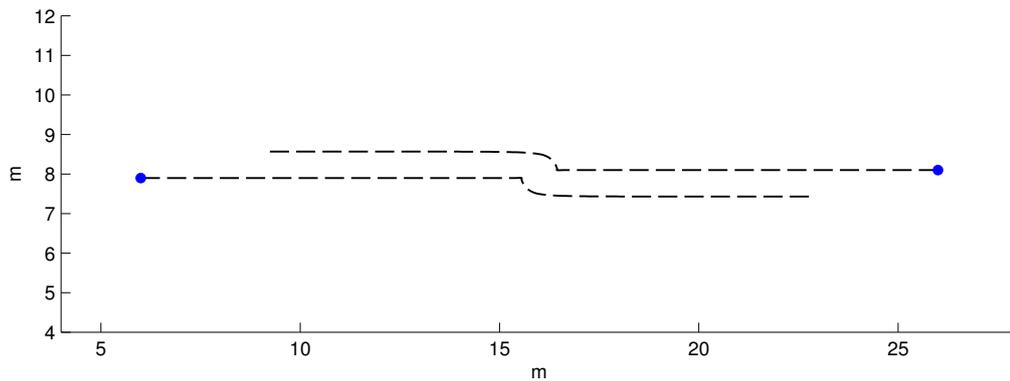


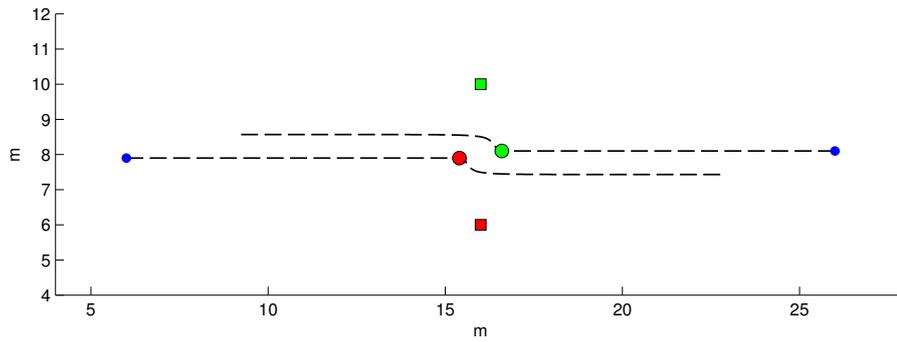
FIGURE 5.19 – Simulation de croisement d’individus par modélisation mécanique. Le point de départ en bleu et la trajectoire sont représentés.

### 5.2.3.2 Contrôle avec barrières

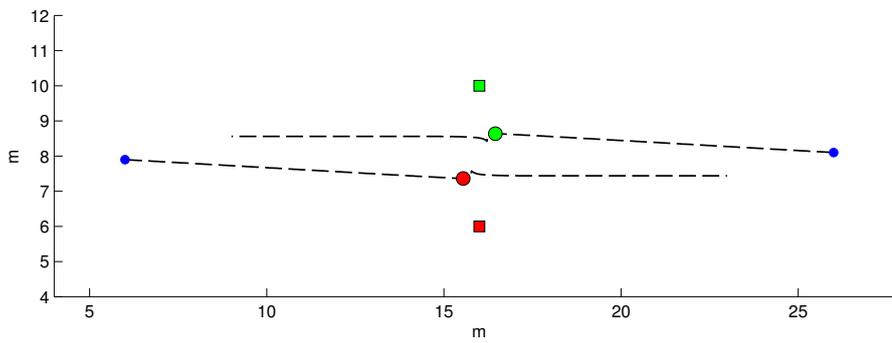
Nous considérons maintenant la même expérience, mais cette fois-ci les observations sont inversées, comme illustré en figure 5.21(a). Le segment (non représenté toujours) reliant la position à  $t_{obs}$  de chaque individu à son observation coupe cette fois la trajectoire de l’autre individu. Lors de l’assimilation incrémentale, présentée en figure 5.21, on peut clairement voir que l’enroulement relatif des individus est conservé. L’assimilation incrémentale n’est en effet pas capable de démêler les trajectoires puisque comme nous l’avons vu précédemment dans la section 5.1, celle-ci peut seulement étirer des trajectoires en tirant sur celles-ci au moment de l’observation. Seulement dans le modèle ici considéré, comme les précédents d’ailleurs, chaque position des trajectoires comporte un fort niveau de répulsion, empêchant ces dernières de se confondre à un même instant et ainsi de se ré-agencer. D’un point de vue mathématique, les petites variations de trajectoire d’état  $d\mathbf{X}$  sur lesquelles se basent l’assimilation incrémentale sont incompatibles avec de grandes modifications sur  $\mathbf{X}$  qu’imposent l’obtention d’un résultat tel que celui de l’expérience sans barrières.

### 5.2.3.3 Discussion

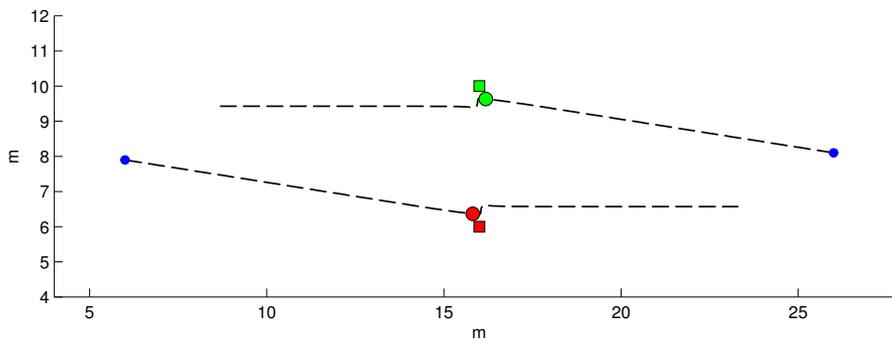
Cette problématique d’emmêlement de trajectoires s’avère gênante pour le contrôle optimal de la foule. Cette dernière en effet, lorsqu’elle sort du cadre unidirectionnel, exhibe nombre de croisements ou de personnes se faufilant. L’assimilation variationnelle incrémentale n’est pas capable de générer une solution réaliste, comme nous l’avons vu en figure 5.21, même si elle reste optimale au sens du modèle linéarisé. L’hypothèse selon laquelle les variations de trajectoire respectant le modèle non linéaire peuvent être approchées par sa linéarisation n’est dans le cas posé pas adéquate. Il est ainsi nécessaire de faire appel, du moins ponctuellement, à ses propriétés comportementales non linéaires permettant de correctement restituer sa dynamique initiale. Une approche allant dans ce sens est proposée dans la section suivante.



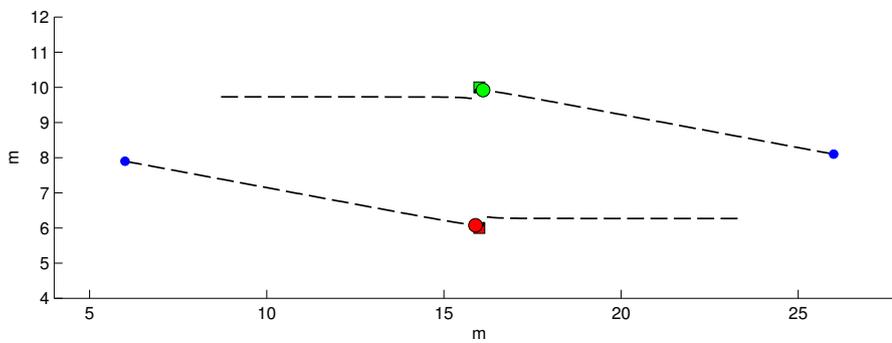
(a) Simulation



(b) Après 20 passes d'assimilation



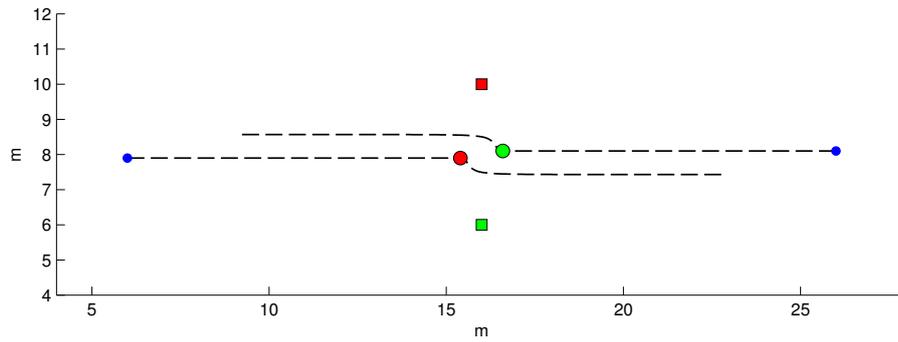
(c) Après 100 passes d'assimilation



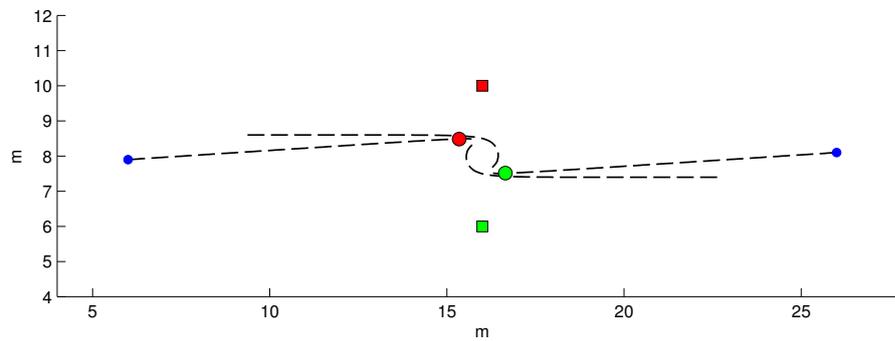
(d) Après 200 passes d'assimilation

FIGURE 5.20 – Assimilation incrémentale par observation en position sans barrières. L'observation est à  $t_{obs} = 10$  s.

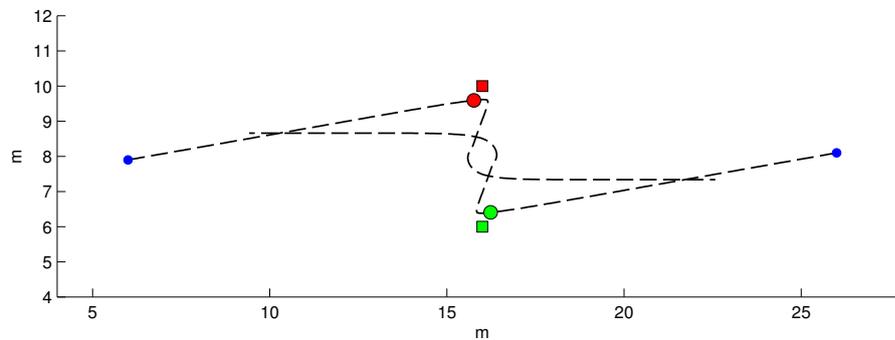
## 5.2. Contrôle de foules humaines



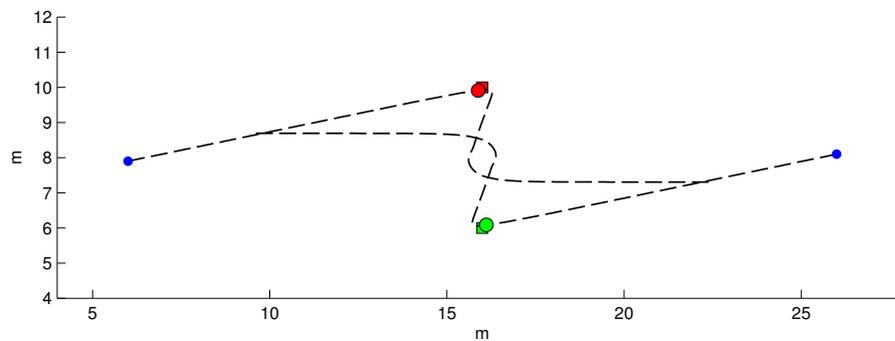
(a) Simulation



(b) Après 20 passes d'assimilation



(c) Après 100 passes d'assimilation



(d) Après 200 passes d'assimilation

FIGURE 5.21 – Assimilation incrémentale par observation en position avec barrières. L'observation est à  $t_{obs} = 10$  s.

### 5.2.3.4 Fractionnement incrémental

Nous proposons ici une variation à l'assimilation incrémentale. Dans la mesure où la variation de trajectoire  $d\mathbf{X}$  que génère celle-ci ne permet pas de remédier à la problématique d'emmêlement, nous proposons de faire reposer l'assimilation en partie sur la simulation du modèle  $\mathcal{M}$ . Pour cela, le temps de la séquence étudiée est fractionné. La trajectoire adjointe  $\underline{\lambda}$  obtenue lors de l'intégration arrière du modèle linéarisé adjoint n'est utilisée que sur une portion de la séquence, le modèle non linéarisé prenant par la suite le relais. Cette méthode est illustrée en figure 5.22 et décrite par l'algorithme 4. Elle présente l'intérêt de conserver le degré de liberté combinatoire initial du modèle que sa version linéarisée ne possédait pas (comme nous l'avons vu avec la problématique d'emmêlement et de barrières énergétiques de la section précédente). Il est ainsi possible de s'approcher de l'observation en restant au plus proche de la dynamique du modèle, et non plus à sa dynamique dérivée. De plus, la continuité de l'état  $\mathbf{X}$  sur le temps est préservée. L'inconvénient de cette méthode est que le modèle est simulé plusieurs fois au cours de la séquence. Ceci entraîne une perte sur l'information récoltée par l'adjoint  $\lambda$ , puisque la simulation va écraser les corrections apportées sur la fin de la séquence. Cette méthode permet essentiellement de trouver la dynamique optimale en début de séquence. Les autres fractions de la séquence servant à corriger plus ponctuellement la solution optimale trouvée. L'avantage allant de pair avec cet inconvénient, est que le problème de mémoire de la trajectoire adjointe optimale, comme la conservation du crochet d'évitement illustré en figure 5.20, disparaît. Le comportement de cette méthode face à la problématique d'emmêlement est présenté en figure 5.23. Nous pouvons voir que les trajectoires gardent leur aspect relatif à la simulation. Cependant, les individus sont tout de même tirés vers leur observation respective. Par conséquent, d'une passe d'assimilation à l'autre, les deux trajectoires changent leur combinatoire réciproque (figure 5.23(b) et figure 5.23(c)). Par la suite, les trajectoires continuent d'être tirées par leur observation. Malgré la continuité des trajectoires, nous pouvons voir en figure 5.23(d) qu'à convergence celles-ci exhibent un net virage. Ce virage intervient à  $t = \frac{1}{3}20 s$ , lors du changement de fraction de séquence. Nous avons en effet ici expérimenté cette méthode en divisant par 3 la séquence durant 20 s. Ce virage de l'état constitue une certaine violation de la dynamique du modèle. Elle provient du fait que la correction emmagasinée par la trajectoire adjointe  $\lambda^0$  est plus importante que celle emmagasinée par  $\lambda^1$  (voir figure 5.22). La correction de trajectoire apportée lors de l'intégration avant du modèle linéarisé est ainsi plus importante que dans les fractions de séquence suivante. Un remède à l'apparition de tels virages sur l'état consiste à paramétrer la covariance de modèle  $Q$  de telle sorte que la confiance accordée en celui-ci soit de plus en plus faible avec l'indice de fraction. Cependant une telle paramétrisation est délicate à mener puisque l'évaluation en soi de la confiance accordée au modèle est une tâche largement empirique. Une autre solution consiste à fractionner la séquence autant de fois qu'elle est discrétisée en temps. C'est à dire qu'à chaque pas de temps  $\Delta t$  de la séquence correspond une fraction s'étendant de  $t$  à  $t_f$ . Cette solution est difficile à mettre en pratique puisqu'elle peut évidemment rapidement faire exploser la complexité du calcul.

Appliquons maintenant cette approche afin de gérer un croisement de flux multiples de personnes pour lequel la problématique d'emmêlement est importante.

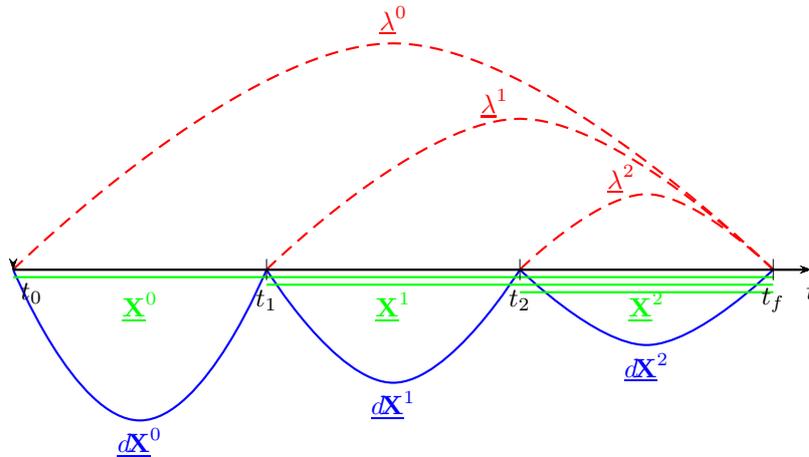


FIGURE 5.22 – Illustration de l'assimilation incrémentale fractionnée. Ceci constitue une seule passe d'assimilation au sens fractionné.

**Data** : Trajectoire  $\underline{\mathbf{X}}$

**Result** : Solution optimale d'une séquence fractionnée en  $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_f$

**for**  $n = 0$  à  $n = f - 1$  **do**

– Intégration du modèle  $\mathbb{M}$  sur l'intervalle  $[t_n, t_f]$  pour obtenir  $\underline{\mathbf{X}}^n$

**while** Convergence non atteinte sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  **do**

– Intégration arrière de  $(\partial_{\underline{\mathbf{X}}}\mathbb{M})^*$  sur l'intervalle  $[t_n, t_f]$  pour obtenir  $\underline{\lambda}^n$

– Intégration avant de  $\partial_{\underline{\mathbf{X}}}\mathbb{M}$  sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  pour obtenir  $\underline{d}\underline{\mathbf{X}}^n$

– Incréments :  $\underline{\mathbf{X}}^{n+1} = \underline{\mathbf{X}}^n + \underline{d}\underline{\mathbf{X}}^n$  sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$

**for**  $p = n + 1$  à  $p = f - 1$  **do**

– Intégration du modèle  $\mathbb{M}$  sur l'intervalle  $[t_p, t_f]$  pour obtenir  $\underline{\mathbf{X}}^p$

– Intégration arrière de  $(\partial_{\underline{\mathbf{X}}}\mathbb{M})^*$  sur l'intervalle  $[t_p, t_f]$  pour obtenir  $\underline{\lambda}^p$

– Intégration avant de  $\partial_{\underline{\mathbf{X}}}\mathbb{M}$  sur l'intervalle  $[t_p, t_{p+1}]$  pour obtenir  $\underline{d}\underline{\mathbf{X}}^p$

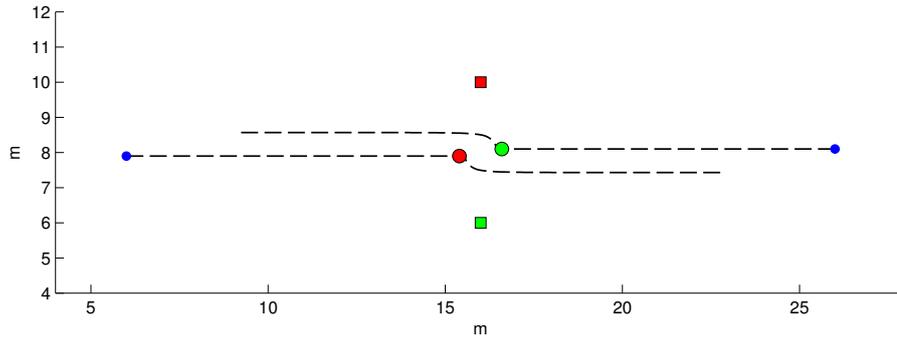
– Incréments :  $\underline{\mathbf{X}}^{p+1} = \underline{\mathbf{X}}^p + \underline{d}\underline{\mathbf{X}}^p$  sur l'intervalle  $[t_p, t_{p+1}]$

**end**

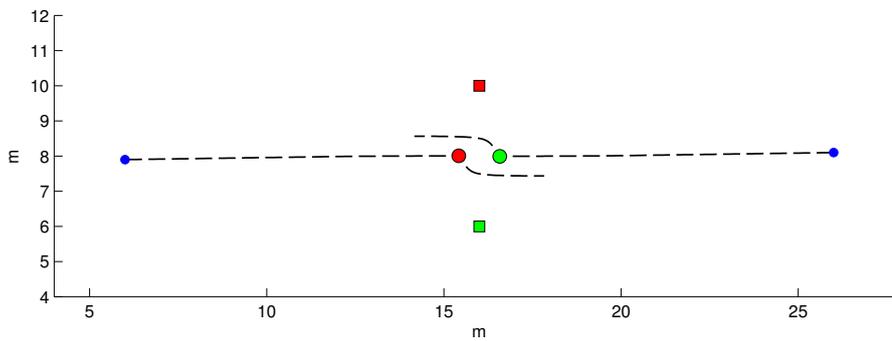
**end**

**end**

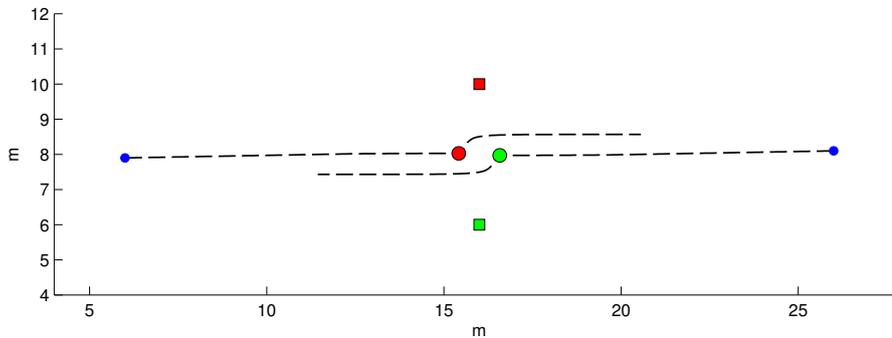
**Algorithme 4** : Méthode d'assimilation incrémentale par fractionnement de séquence



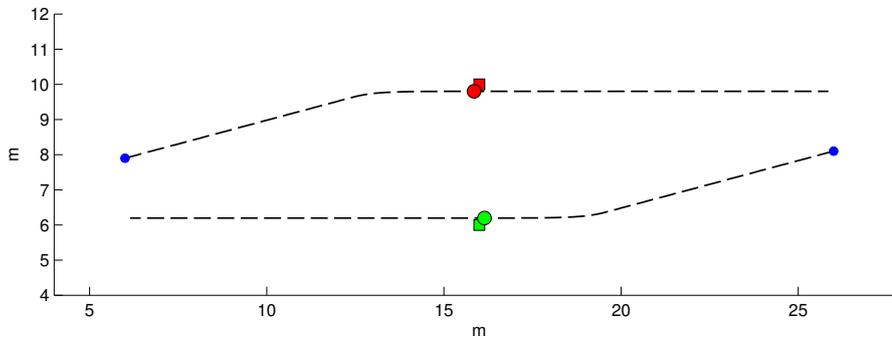
(a) Simulation



(b) Après 4 passes d'assimilation



(c) Après 5 passes d'assimilation



(d) Après 200 passes d'assimilation

FIGURE 5.23 – Assimilation incrémentale par fractionnement de séquence et par observation en position. La problématique de barrière est ainsi contournée. L'observation est à  $t_{obs} = 10$  s.

### 5.2.3.5 Régulation de flux de personnes par contraintes en vorticité

En ayant proposé une solution à la problématique d’emmêlement des trajectoires, nous proposons d’étudier maintenant un cas de mouvements de foules pour lequel de nombreuses barrières d’énergie sont susceptibles d’apparaître : le cas d’un carrefour d’affluences. Nous considérons un environnement dans lequel quatre groupes distincts de piétons proviennent des quatre points cardinaux de la scène. Chaque groupe a l’intention de se rendre à l’opposé de l’environnement, possède les mêmes propriétés dynamiques, et se met en route au même instant. Ce scénario est illustré en figure 5.24. En conséquence, une forte congestion est crée au moment où les individus se rencontrent au centre de la scène. Ils se faufilent, se dépassent et se bloquent, en brisant l’intégrité du groupe auquel ils appartiennent. Ces mouvements créent ainsi des barrières énergétiques sur la fonction d’énergie  $\mathcal{J}$ , comme illustré précédemment en figure 5.21, en vue de sa minimisation par utilisation de l’assimilation variationnelle. Le contrôle optimal de cette foule est donc particulièrement difficile.

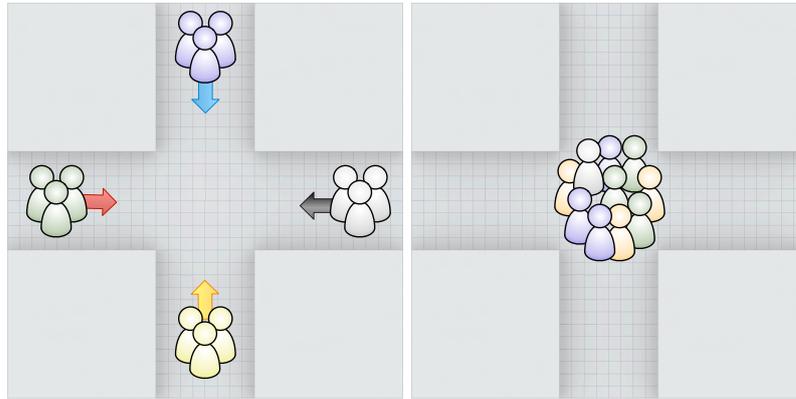


FIGURE 5.24 – **Carrefour d’affluence.** Chaque groupe cherche à atteindre le côté opposé créant ainsi une forte congestion.

Afin de réguler le flux de personnes, nous introduisons une observation de vorticité dans la zone de croisement. L’idée est de créer une circulation globale minimisant les blocages inter-individus. Ce type de phénomène émerge parfois à l’état naturel. Lorsqu’un grand nombre de personnes entrent en conflit dynamique, et s’agr gent, un sens de circulation apparaît petit à petit. Par exemple, plutôt que d’entrer dans la mêlée de groupes, sans a priori sur le point d’entrée, les individus peuvent identifier certains endroits de la congestion plus favorables à leur déplacement souhaité. Ceci se répétant pour d’autres individus, un sens de circulation se crée. Nous proposons ainsi de provoquer artificiellement ce phénomène à l’aide du contrôle optimal.

**Modèle et opérateur d’observation** Nous utilisons ici le modèle de foule proposé en section 3.4.3. Chacun des quatre groupes est constitué de 16 individus, donnant un total de  $N = 64$  piétons. Les paramètres sont tels que : pour tous les individus  $p_i$  on a  $m_i = 70 \text{ kg}$ ,  $\alpha_i = 140 \text{ N}$ ,  $k_i = 140 \text{ kg.s}^{-1}$ ,  $a_i = 2000 \text{ N}$ ,  $b_i = 0.08 \text{ m}$ ,  $\kappa_i = 2000 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $\nu_i = 2000 \text{ N.s.m}^{-2}$ ,  $r_i = 0.3 \text{ m}$ ,  $\underline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 1.0 \text{ m} & 0 \\ 0 & 0.5 \text{ m} \end{bmatrix}$ ,  $\beta_i = 70 \text{ N.m}^{-3}.\text{ped}^{-1}$  et  $\phi_i = 0 \text{ rad}$ . On rappelle que ce dernier paramètre et la valeur qui lui est attribuée indiquent que les

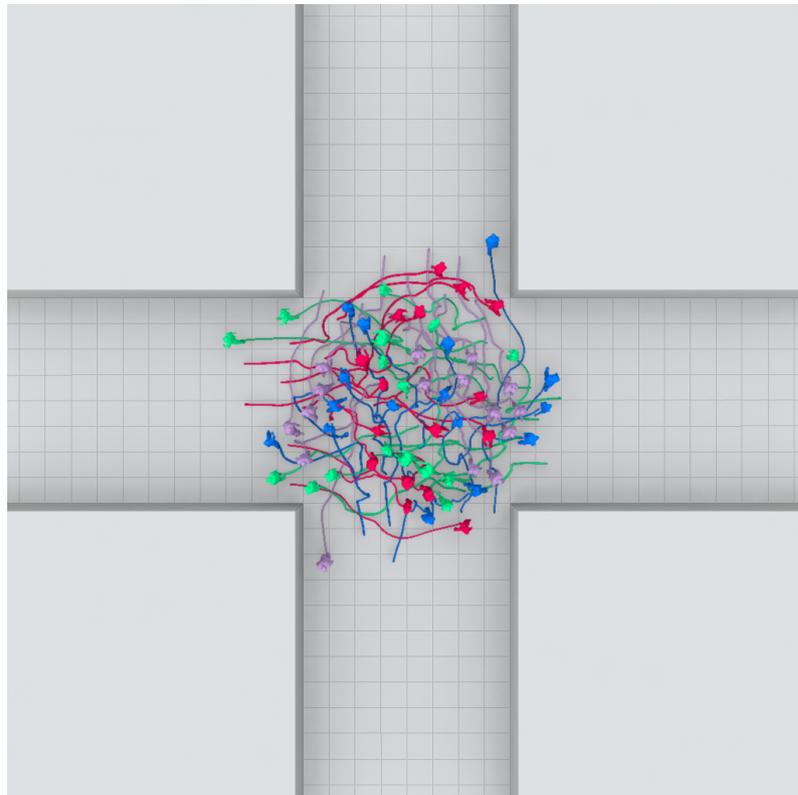
piétons ne réagissent pas socialement aux individus se situant derrière eux. L'orientation des piétons est ici considérée comme égale à l'orientation vers leur objectif, c'est à dire  $W_i$  (voir l'équation 3.69). Ceci a pour conséquence de briser la symétrie de l'adjacence sociale de l'équation 3.66. La linéarisation et l'adjoint de ce modèle sont disponibles à l'équation 5.9 et en section 5.2.1. Quant à l'observation en vorticité, elle est pour rappel introduite en section 5.1.3.2, et ses développements nécessaires à l'assimilation sont visibles en annexe B. Les covariances d'erreur de modèle et d'observation sont respectivement de  $Q_u = I_{dN} 0.1 m^2 \cdot s^{-4}$  et  $R = I_{dN} 0.1 s^{-2}$ .

**Simulation** Après l'intégration du modèle de foule, et dans les conditions expérimentales présentées plus haut, nous obtenons comme prévu une forte congestion visible en figure 5.25. En prêtant attention aux vitesses au moment du plus fort de la congestion (figure 5.25(b)) nous constatons qu'aucune circulation particulière n'existe. Les individus se frayent un passage tant bien que mal sans qu'aucune stratégie collective n'émerge. La vorticité ne présente ainsi aucune dominante particulière de polarité (figure 5.25(c)).

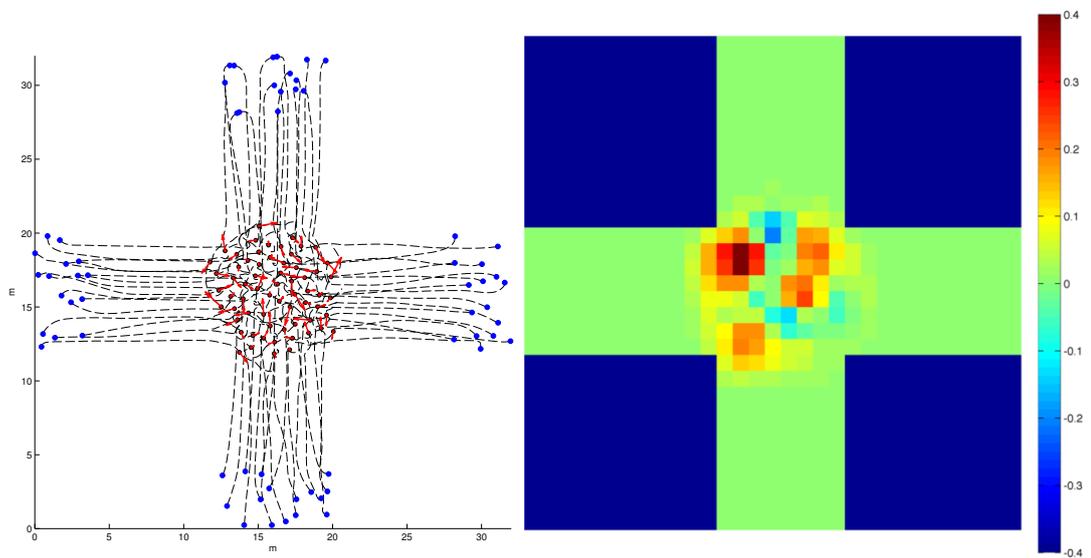
**Observation** L'observation en vorticité, illustrée en figure 5.26, est ainsi appliquée en ce lieu et cet instant de congestion, en assignant un sens de circulation positif. L'intensité de la vorticité est prise arbitrairement, en considérant une vitesse de circulation empiriquement acceptable. De par la complexité du cas étudié, nous n'attendons pas que la foule respecte parfaitement l'intensité de cette observation. L'idée est essentiellement de provoquer un sens de vorticité homogène au milieu du carrefour susceptible de fluidifier la circulation des personnes. Afin d'appuyer suffisamment cette contrainte, l'observation est appliquée pendant une seconde de  $t_{obs} = 16 s$     $t = 17 s$ .

**Résultats** Nous utilisons pour le contrôle optimal du problème posé la méthode d'assimilation variationnelle incrémentale par contrôle additif et par fractionnement de séquence. On peut en effet constater en figure 5.25(a) que le niveau d'emmêlement des trajectoires est important et sont fortement sujettes à la problématique de barrières d'énergie sur la fonction  $\mathcal{J}$  vue en section 5.2.3.2. Pour y remédier, et comme vu précédemment, nous fractionnons ainsi la séquence en trois sous séquences de durée égales.

Les résultats de l'expérience sont visibles en figure 5.27. Nous pouvons y voir que la congestion obtenue après la simple simulation du modèle a ici disparu, laissant la place à une circulation globale de la foule. Dans la figure 5.27(b), les vitesses affichent nettement une dominante d'alignement relatif. Cette dominante se vérifie aussi dans la figure 5.27(c) où nous obtenons une vorticité presque homogène d'environ  $0.3 s^{-1}$  dans la zone de congestion, soit proche des  $0.4 s^{-1}$  de l'observation de la figure 5.26. Plusieurs aspects positifs se dégagent donc de cette expérience. Tout d'abord, comme le montre la figure 5.27(a), les piétons échappent à la problématique de barrières d'énergie soulevée par l'assimilation incrémentale. Les piétons sortent en effet de la zone de convergence sans avoir emmagasiné de contournements parasites qui briseraient la dynamique propre de la foule. Cette dynamique justement est comme nous pouvons le voir préservée. Les piétons conservent une formation anisotrope en sortie de carrefour qui correspond bien à la modélisation ici utilisée pour la foule. Ensuite, il est remarquable de constater que malgré le fort degré d'emmêlement, l'information d'observation arrive à remonter dans le



(a) Rendu de la simulation avec distinction des groupes à  $t = 23 s$ . Les trajectoires récentes sont affichées.



(b) Trajectoires et vitesses instantanées en rouge à  $t_{obs} = 16 s$  (c) Vorticité ( $s^{-1}$ ) observée après simulation à  $t_{obs} = 16 s$ . Les zones en bleu sont les obstacles de l'environnement.

FIGURE 5.25 – Résultat de la simulation d'un carrefour d'affluences.

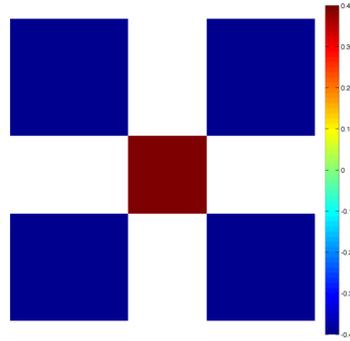
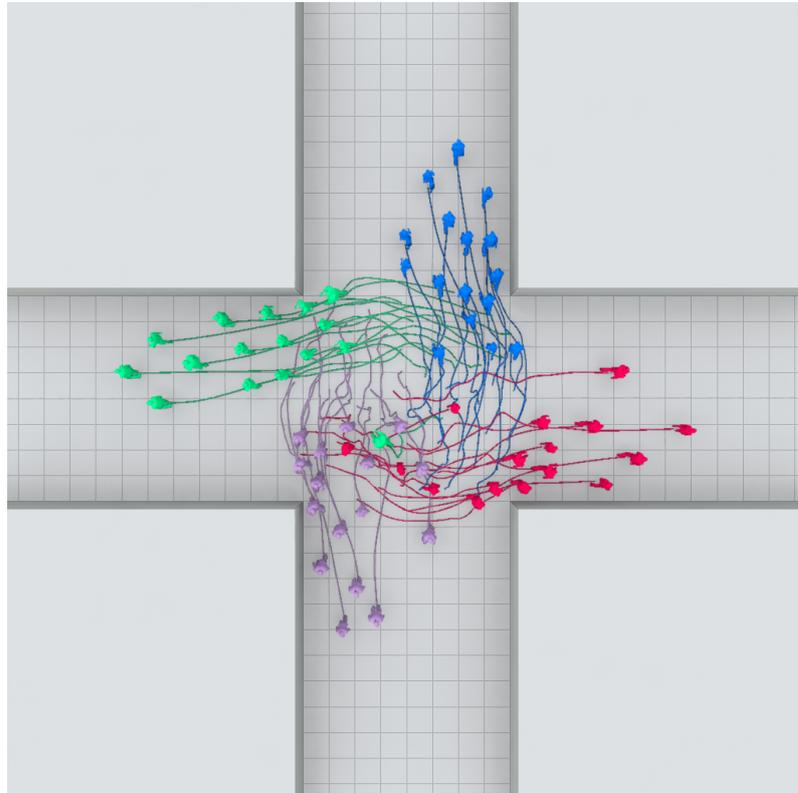


FIGURE 5.26 – **Observation en vorticité.** Valeurs en  $s^{-1}$ . L'observation est à  $t_{obs} = 16$  s et dure une seconde. Les zones en bleu sont les obstacles de l'environnement.

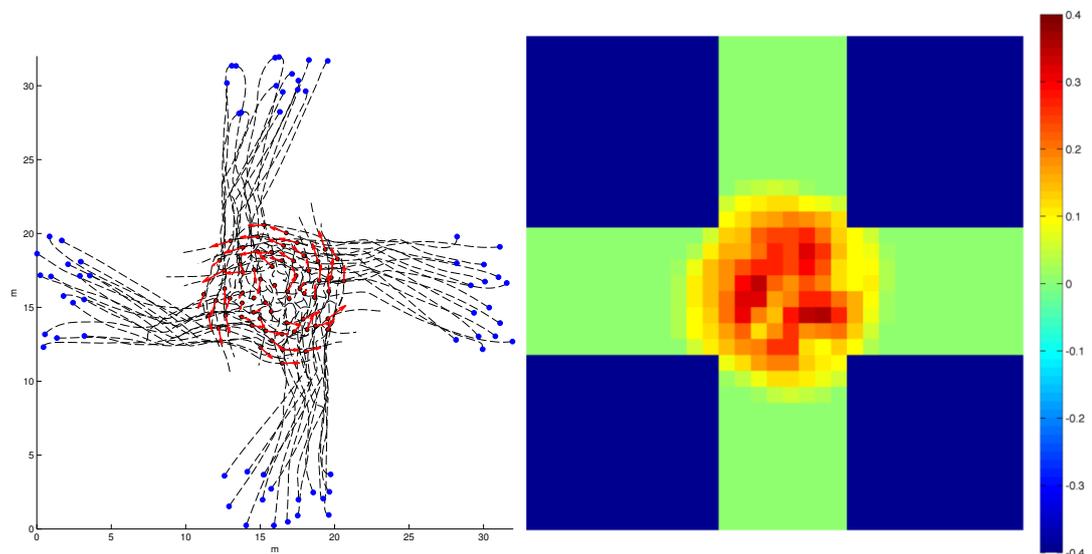
temps sans être trop bruitée. Elle reste en effet significative alors que le grand nombre de contacts inter-individus auraient pu complètement atténuer cette information. Une telle combinatoire d'emmêlement est en effet susceptible d'égarer l'information véhiculée par l'état adjoint<sup>5</sup>  $\lambda_{opt}^k$  et de lui faire perdre en route le message délivré par l'observation à destination du modèle. Néanmoins, nous retrouvons les virages de trajectoire propre à la méthode de fragmentation de l'assimilation. L'essentiel de la correction de trajectoire en vue d'obtenir l'observation de vorticité se situe ainsi dans la première partie de la séquence, où chaque groupe prend rapidement le parti de se diriger sur la droite de son couloir.

**Discussion** L'utilisation de l'assimilation variationnelle incrémentale et de l'observation en vorticité permet de réguler des flux de foules relativement complexes. En conservant la dynamique propre de la foule, il est ainsi possible de contrôler de manière centralisée plusieurs groupes de personnes ayant des objectifs divers. Cette diversité de comportement global crée néanmoins un emmêlement qui nous oblige à utiliser des méthodes dérivées. Le fractionnement de séquence permet de faire une utilisation cohérente de l'information d'observation vis-a-vis du modèle, quand celle-ci s'avère délicate à utiliser avec le modèle linéarisé. L'utilisation judicieuse et tout à tour de la modélisation et de sa linéarisation donne ainsi des résultats satisfaisants. Il paraît alors intéressant d'étudier le comportement de l'assimilation lorsque elle est dépourvue de l'utilisation de modèle linéarisé, ce qui fait l'objet de la section suivante.

5. On rappelle que, comme défini en section 2.3.2.2, on écrit :  $\lambda_{opt}^k = \sum_{l=0}^k \lambda^l$ .



(a) Rendu après assimilation variationnelle avec distinction des groupes à  $t = 23$  s. Les trajectoires récentes sont affichées.



(b) Trajectoires et vitesses instantanées en rouge à  $t_{obs} = 16$  s

(c) Vorticité ( $s^{-1}$ ) observée après assimilation à  $t_{obs} = 16$  s. Les zones en bleu sont les obstacles de l'environnement.

FIGURE 5.27 – Résultats après contrôle optimal par assimilation variationnelle d'un carrefour d'affluences sous contrainte de vorticité. 33 passes d'assimilation fragmentée sont ici effectuées.

### 5.2.3.6 Assimilation non-incrémentale

L'assimilation non-incrémentale, introduite en section 2.3.4, et décrite par l'algorithme 2, permet de se passer de l'intégration du modèle linéarisé  $\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M}$ . En reprenant les mêmes conditions expérimentales que pour les cas tests du contrôle avec (section 5.2.3.2) et sans barrière d'énergie (section 5.2.3.1), nous cherchons à voir le comportement de cette méthode d'assimilation vis-à-vis de la problématique d'emmêlement. La figure 5.28 montre ainsi l'évolution des deux trajectoires. A convergence, dans la figure 5.28(d), on constate que l'assimilation non-incrémentale permet d'atteindre les observations, sans problème d'emmêlement. De plus, les virages de trajectoire obtenus avec la méthode incrémentale (figure 5.23(d)) par fractionnement sont ici absents. Notons que l'assimilation non-incrémentale possède une *mémoire* adjointe différente de sa dérivée incrémentale (cette mémoire s'illustre notamment dans la figure 5.20(d)). La sommation des trajectoires adjointes  $\underline{\mathbf{X}}$  au cours des passes d'assimilation est susceptible de conserver des corrections devenues obsolètes. Ceci est particulièrement vrai pour des systèmes Lagrangiens combinatoires.

### 5.2.3.7 Expérience du type *pachinko*

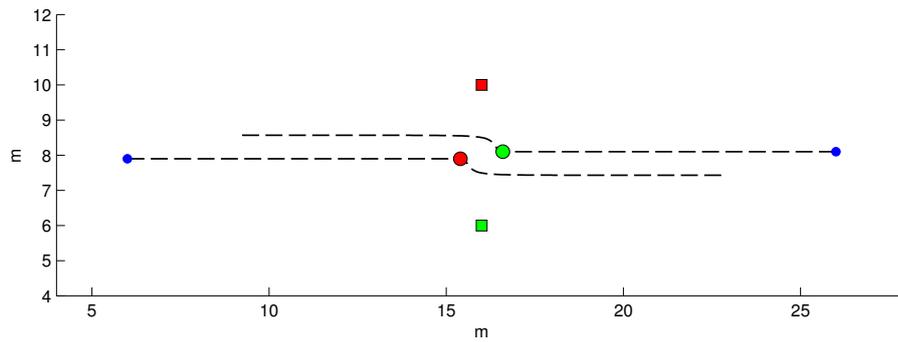
Pour illustrer et comparer le comportement des différentes méthodes d'assimilation vues jusqu'ici, nous nous proposons de considérer un environnement présentant des caractéristiques booléennes. Nous nous inspirons ainsi des conditions expérimentales de la planche de Galton<sup>6</sup> ayant servi à montrer la corrélation de la loi normale avec la loi binomiale. Notons toutefois que l'analogie avec cette dernière expérience s'arrête à la conception globale du support expérimental. Ces conditions se rapprochent aussi des machines à jeu japonaises appelées *pachinko*, dans lequel l'utilisateur cherche, et surtout espère, trouver un chemin particulier pour une bille dirigée par la gravité dans un parcours d'obstacles. Ici, nous considérons un individu dépourvu de comportement de répulsion sociale (comme dans les sections 5.2.3.1 et 5.2.3.2) se frayant un chemin parmi d'autres personnes immobiles et inamovibles. Ces personnes diffèrent des obstacles au sens où elles ne sont pas prises en compte lors de la recherche d'un chemin optimal générant  $W_i$ . En conséquence, nous obtenons un individu se déplaçant en ligne droite jusqu'à percuter un individu immobile.

Nous utilisons encore une fois le modèle de test précédent l'expérience du carrefour d'affluence, toujours dépourvu de composante sociale. Les paramètres sont tels que pour tous les individus  $p_i$  :  $\alpha_i = 140 N$  et  $k_i = 140 kg.s^{-1}$ . Les propriétés mécaniques des individus sont ici assouplies pour faciliter l'expérimentation, et sont telles que :  $\kappa_i = 500 N.m^{-1}$ , et  $\nu_i = 200 N.s.m^{-2}$ . Le piéton mobile a pour masse  $m_0 = 70 kg$ , et les autres une masse considérée comme infinie. Leur rayon est  $r_i = 0.5 m$ , toujours dans l'optique de faciliter la présentation des phénomènes en jeu.

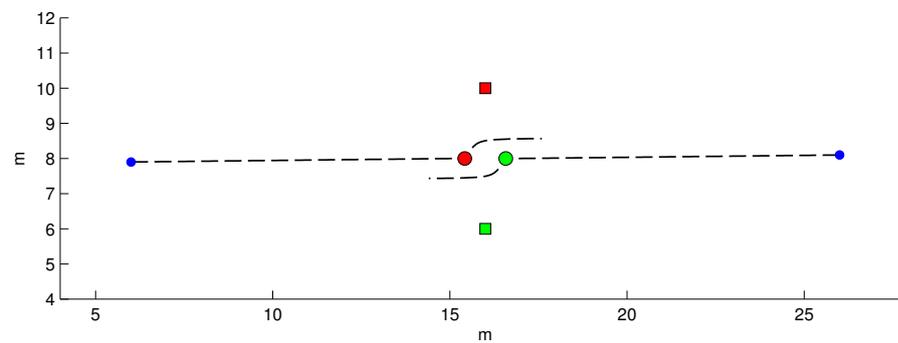
**Simulation** La simulation des conditions expérimentales précédentes est visible en figure 5.29. On peut voir que l'individu mobile suit bien une trajectoire rectiligne tant qu'il n'entre pas en contact avec les individus immobiles. Notons que le rayon affiché

6. Une présentation de cette expérience est disponible à l'adresse : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Planche\\_de\\_Galton](http://fr.wikipedia.org/wiki/Planche_de_Galton)

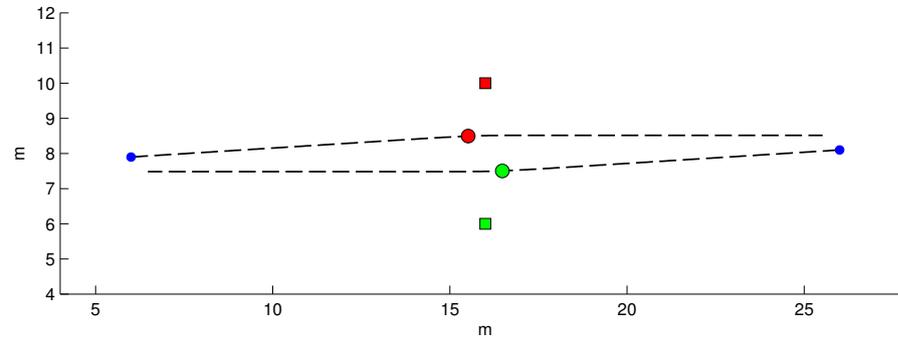
## 5.2. Contrôle de foules humaines



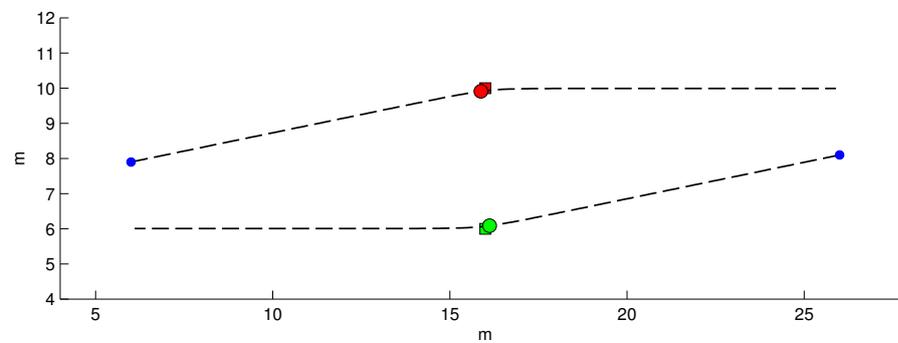
(a) Simulation



(b) Après 3 passes d'assimilation



(c) Après 20 passes d'assimilation



(d) Après 200 passes d'assimilation

FIGURE 5.28 – Assimilation non-incrémentale par observation en position. L'observation est à  $t_{obs} = 10 s$ .

des individus est inférieur à leur rayon modélisé. A différents instant de la séquence, on suppose l'existence d'observations en position. Nous cherchons maintenant à voir comment les différentes méthodes d'assimilation se comportent dans ces conditions. Pour chacune d'entre elles, les covariances de modèle et d'observations sont identiques, et valent :  $Q_{u_0} = I_d 10 m^2 . s^{-4}$  pour le seul piéton mobile, et  $R = I_{dN} 0.1 m^2$  pour chaque observation.

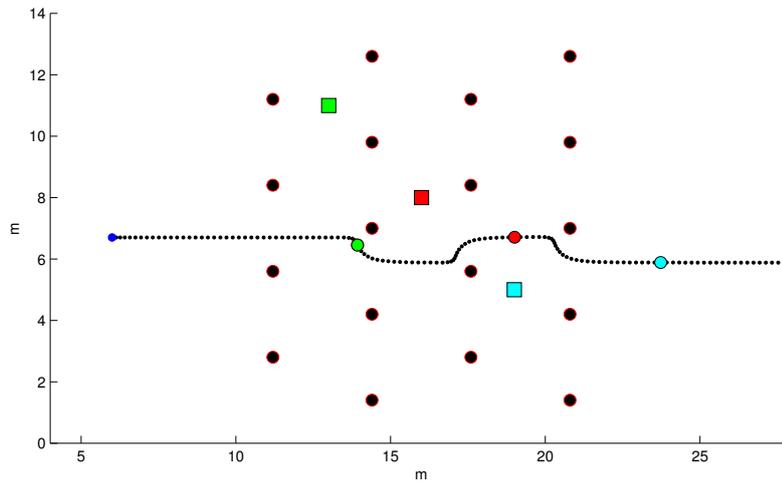


FIGURE 5.29 – Expérience du pachinko : simulation du parcours d'un individu asocial. Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à  $t_{obs,1} = 9 s$ ,  $t_{obs,2} = 16 s$  et  $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des individus fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps  $t$ , à un intervalle de  $2\Delta t = 0.2 s$ .

**Assimilation incrémentale** La figure 5.30 montre que l'assimilation incrémentale a un comportement purement élastique par rapport au problème posé. La correction de la trajectoire se fait uniquement sur des considérations locales. Lorsqu'existe un contact entre l'individu principal et les autres, le modèle dérivé induit une raideur forte par rapport aux instants où le piéton est libre. Nous pouvons ainsi voir qu'à convergence, en figure 5.30(c), la trajectoire n'a pas pu s'extirper de certains individus immobiles. Ces individus sont historiquement ceux que le piéton principal a percuté en premier lieu lors de la simulation, mais aussi ceux que la trajectoire a été amenée à faire rencontrer lors de l'assimilation. L'emprise que peut avoir le contact entre individus sur la trajectoire a donc un impact significatif sur la trajectoire finale. Son optimalité, au sens commun, est d'ailleurs toute relative. On constate que durant son trajet, l'individu mobile a beaucoup fait varier sa vitesse, et pris un chemin qui n'apparaît pas comme le plus court. On note particulièrement une accélération importante entre l'observation 1 et 2, et une décélération tout aussi importante autour de l'observation 3. L'assimilation incrémentale est en réalité condamnée à rechercher des minima locaux. Aucune variation importante de la trajectoire n'est possible, expliquant ainsi que l'individu persiste à passer entre les mêmes personnes immobiles. Le choix de passer à droite ou à gauche d'un obstacle physique induit une variation potentiellement importante de trajectoire, et plutôt que de changer en amont ce choix, l'individu préfère essayer de le gravir coûte que coûte<sup>7</sup>.

7. Une analogie triviale peut consister à imaginer la fonction  $\mathcal{J}$  comme une montagne, et son gradient comme un instrument de glisse. On peut alors se figurer l'assimilation incrémentale comme interdisant aux

Voyons maintenant les résultats obtenus par les autres techniques d'assimilation abordées plus haut, et faisant elles appel à l'intégration du modèle non linéarisé  $\mathbb{M}$ .

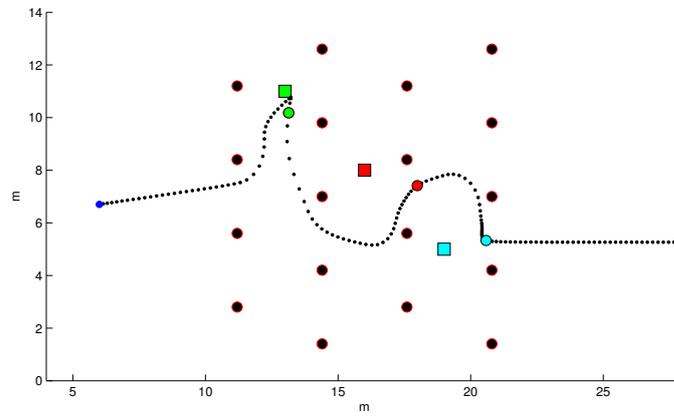
**Assimilation incrémentale par fractionnement de séquence** Nous étudions ici dans les mêmes conditions expérimentales le comportement de l'assimilation incrémentale par fractionnement de séquence. Les instants de fractionnement sont fixés à  $t_1 = 9.5 s$ ,  $t_2 = 19 s$ , et  $t_3 = 28.5 s$ . L'algorithme 4 est appliqué en supposant la convergence de la première fraction de séquence après 200 passes d'assimilation, la deuxième après 400 passes, et la troisième après 800 passes.

La figure 5.31 montre l'évolution de la trajectoire obtenue au cours du contrôle optimal. On peut voir en figure 5.31(a) que c'est essentiellement la première fraction de séquence qui est impactée par les premières passes d'assimilation. Cette constatation est conforme à ce qui été vu précédemment concernant la concentration de la correction sur la première fraction. Un peu plus tard cependant, la variation sur cette première sous séquence permet de modifier considérablement le chemin aval. Le modèle  $\mathbb{M}$  a permis à l'individu de reconsidérer la meilleure façon de contourner l'obstacle, ce dont le modèle linéarisé est comme nous l'avons vu incapable. A l'itération 200 (figure 5.31(c)), la première fraction de séquence est figée, bien que le point d'observation n'ait pas été tout à fait atteint. La modification de trajectoire se concentre désormais sur la seconde sous séquence. A l'itération 400 (figure 5.31(d)), la deuxième observation est ainsi presque atteinte, et cette fraction de trajectoire se fige. Entre temps, la trajectoire aval a aussi modifié ses choix de contournement. Pour finir, la troisième observation est atteinte (figure 5.31(e)). Le résultat final donne une trajectoire quelque peu curieuse. Le problème vient du fait que dans chaque fraction considérée, c'est à chaque fois l'assimilation incrémentale et le modèle linearisé  $\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M}$  qui régissent l'évolution de la trajectoire. Ceci, comme nous l'avons vu plus haut, génère une trajectoire potentiellement alambiquée lorsqu'elle rentre dans l'emprise d'un des individus immobiles. On voit d'ailleurs clairement dans la figure 5.31(e) que l'amont des observations 1 et 2 sont chacune sous l'emprise d'un des piétons immobiles. Néanmoins, et en fin de compte, la trajectoire obtenue passe bien entre les obstacles adéquats. Elle ne reste pas cantonnée à son parcours initial, et tente d'emprunter un raccourci de l'observation 1 à l'observation 3. Il n'y pas de contournement de personnes intempestif, contrairement à ce que nous avons vu dans la version simplement incrémentale de l'assimilation.

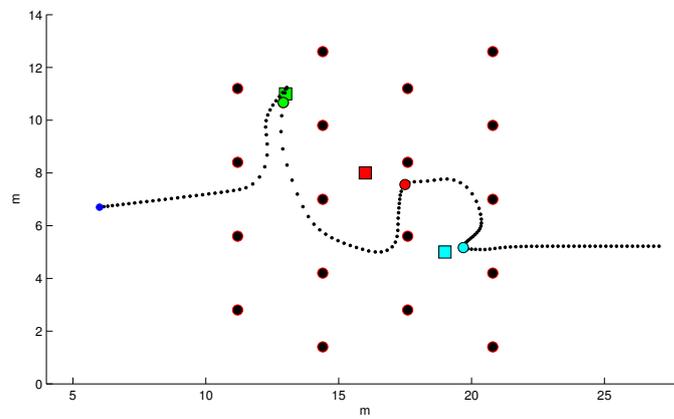
**Assimilation non-incrémentale** Cette fois-ci nous ne faisons pas appel au modèle linéarisé  $\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M}$ . Seul son adjoint  $(\partial_{\mathbf{X}}\mathbb{M})^*$  est mis à contribution, comme pour toutes les méthodes d'assimilation vues ici. On espère par conséquent échapper aux problèmes engendrés par les méthodes incrémentales. Le résultat du contrôle optimal par assimilation non-incrémentale est visible en figure 5.32. On peut voir en figure 5.32(a) que dans les premières itérations une trajectoire cohérente au sens du parcours à emprunter se dégage. Néanmoins la mémoire adjointe produit déjà un effet négatif sur la cohérence dynamique de la trajectoire. L'individu reste bloqué un certain temps autour du moment de la troisième observation ( $t_{obs,3}$ , en bleu clair), contre toute logique dynamique. En réalité

---

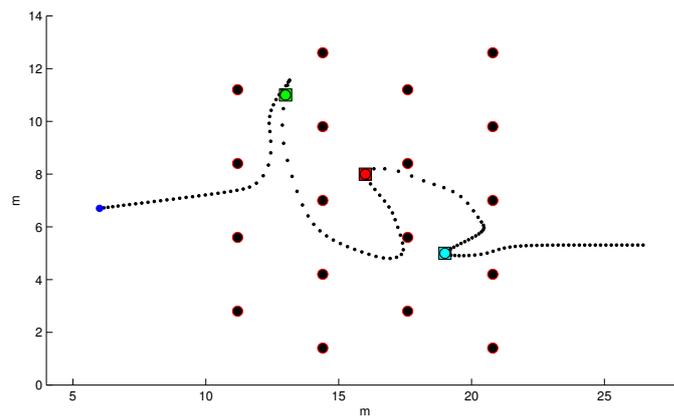
skis de se décoller du sol au mépris des lois de la mécanique. Les variables de contrôles représenteraient alors l'énergie potentielle pour  $\epsilon_0$  et l'énergie cinétique pour  $\epsilon_{\mathbb{M}}$  de l'objet glissant qui pourrait être vu comme l'état  $\mathbf{X}$ .



(a) Après 10 passes d'assimilation



(b) Après 20 passes d'assimilation



(c) Après 200 passes d'assimilation

FIGURE 5.30 – Expérience du *pachinko* : assimilation incrémentale par observations en position. Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à  $t_{obs,1} = 9 s$ ,  $t_{obs,2} = 16 s$  et  $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des particules fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps  $t$ , à un intervalle de  $2\Delta t = 0.2 s$ .

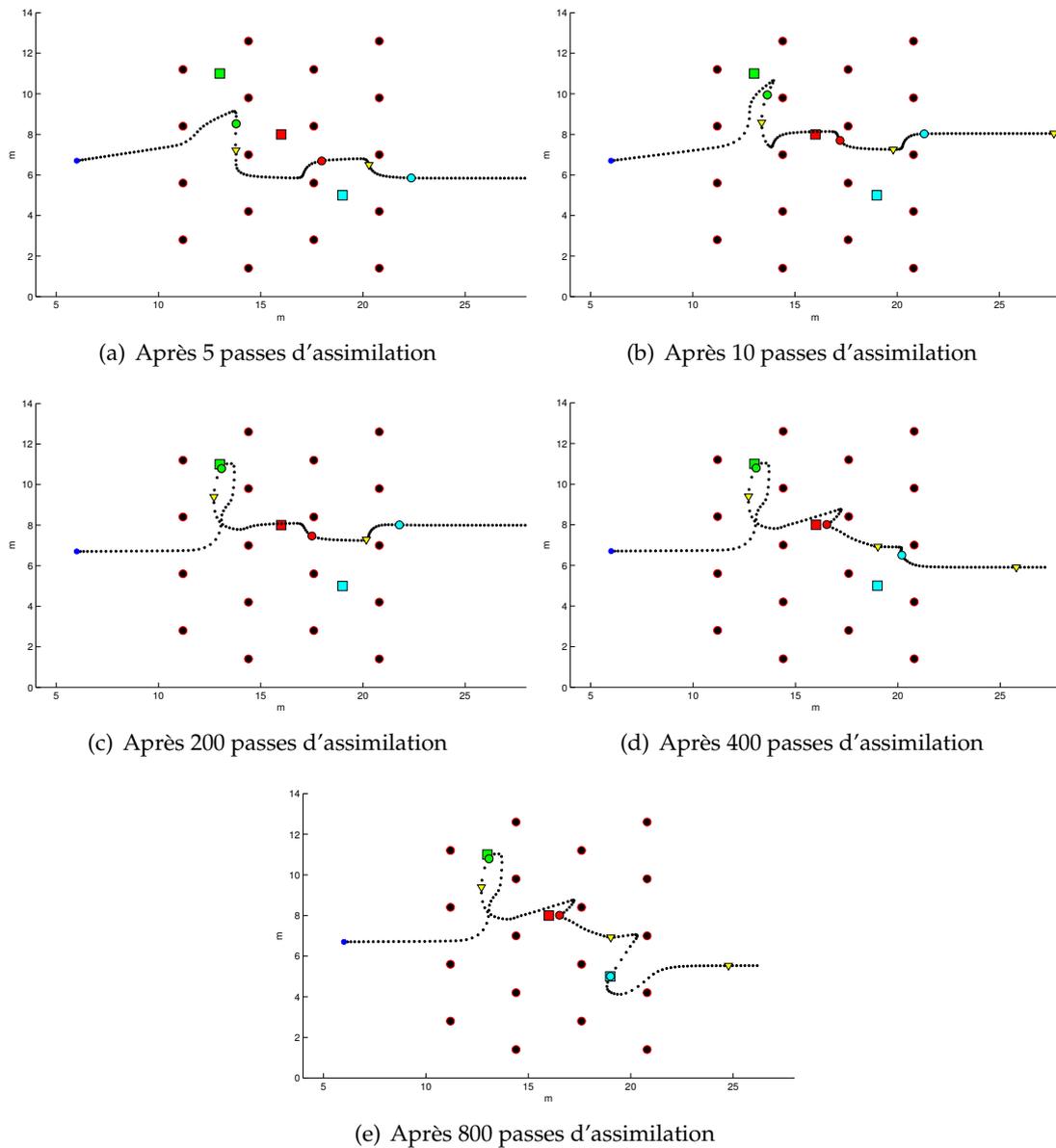


FIGURE 5.31 – Expérience du *pachinko* : assimilation incrémentale par fractionnement de séquence et par observations en position. Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à  $t_{obs,1} = 9 s$ ,  $t_{obs,2} = 16 s$  et  $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs cerclés de rouge sont des individus fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps  $t$ , à un intervalle de  $2\Delta t = 0.2 s$ . Les triangles jaunes indiquent les instants de fractionnement.

la trajectoire adjointe totale  $\lambda_{\text{opt}}$  contient potentiellement des informations de correction obsolètes par rapport à la trajectoire d'état  $\underline{X}$  initiale obtenue par la simulation (voir figure 5.29). Il est aussi à supposer qu'un conflit existe entre l'attraction de l'individu vers la troisième observation en position, et la répulsion occasionnée par l'individu immobile à ce moment là. A l'itération 10 (figure 5.32(b)), le parcours a encore changé, entraînant une réadaptation de la trajectoire adjointe totale. Cette réadaptation (figure 5.32(c)) a pour conséquence de reproduire l'effet mémoriel constaté à  $t = t_{\text{obs},3}$  dans la figure 5.32(a), cette fois-ci de manière plus évidente. A l'itération 30 (figure 5.32(d)), un parcours vraisemblablement optimal a été trouvé. Et finalement à l'itération 200 (figure 5.32(e)), la convergence est atteinte. Cependant la trajectoire obtenue n'est pas tout à fait optimale. Entre les instants  $t_{\text{obs},2}$  et  $t_{\text{obs},3}$ , on constate que l'individu a rebondi sur une personne immobile. Cette inflexion provient de la mémoire adjointe qui à un moment donné a emmagasiné trop d'information poussant l'individu dans cette direction. Cependant, la lecture globale de la trajectoire finale indique qu'une grande partie des informations obsolètes a été atténué au cours de la convergence finale. On peut ainsi supposer que pour des petites variations de trajectoire, l'assimilation non-incrémentale a la capacité, grâce à l'intégration du modèle  $\mathbb{M}$ , de lisser l'historique de la trajectoire adjointe optimale  $\lambda_{\text{opt}}$ . Néanmoins cette mémoire peut être source de divergence. Dans le cas de conditions expérimentales chaotiques notamment, des écarts de parcours très importants peuvent se créer entre deux itérations d'assimilation. La dernière trajectoire adjointe totale  $\lambda_{\text{opt}}$  calculée peut alors dans ce cas contenir une information suffisamment décalée par rapport aux observations pour provoquer une correction encore plus grande, et ainsi de suite, menant au problème d'absence de descente de gradient et potentiellement à la divergence.

**Discussion sur l'expérience du pachinko** Ce cas test du pachinko permet de réaliser la sensibilité de trois méthodes d'assimilation différentes. On peut essentiellement retenir que l'assimilation incrémentale, est comme attendu très sujette au problème des minima locaux sur la fonction d'énergie  $\mathcal{J}$ . Ces minima peuvent se traduire par une trajectoire d'état  $\underline{X}$  non optimale au sens de la dynamique première du modèle  $\mathbb{M}$  dans le cas d'apparition d'emmêlement de trajectoires Lagrangiennes. Cette méthode est effet incapable de surmonter les barrières d'énergie provoquées par des forces de répulsion, et l'assimilation incrémentale ne peut que cantonner la trajectoire première de simulation dans un « canyon » d'énergie dont le tracé suit le parcours initial de l'état.

L'assimilation incrémentale fractionnée permet de lever en partie cette limitation. En faisant appel à certains instants de la séquence à l'intégration du modèle, cette méthode permet de redonner sa chance à la trajectoire d'emprunter un parcours différent en aval des instants de fractionnement. Malgré tout, l'intégration du modèle linéarisé dans ces intervalles laisse réapparaître les problèmes sus-cités. Il est ainsi impératif de correctement choisir ces intervalles, ce qui constitue une tâche délicate de paramétrisation du contrôle optimal puisqu'il est très difficile d'anticiper la pertinence de telle ou telle fragmentation. On peut notamment voir dans l'expérience du pachinko ici menée, en figure 5.31(d) plus particulièrement, que le premier instant a joué un rôle important dans la correction aval de la trajectoire. Il est probable que si cet instant fût quelques pas de temps plus tard, le résultat final eût été significativement différent.

L'assimilation non-incrémentale quant à elle présente une solution intéressante au problème d'emmêlement de trajectoires Lagrangiennes. L'abandon de l'intégration du

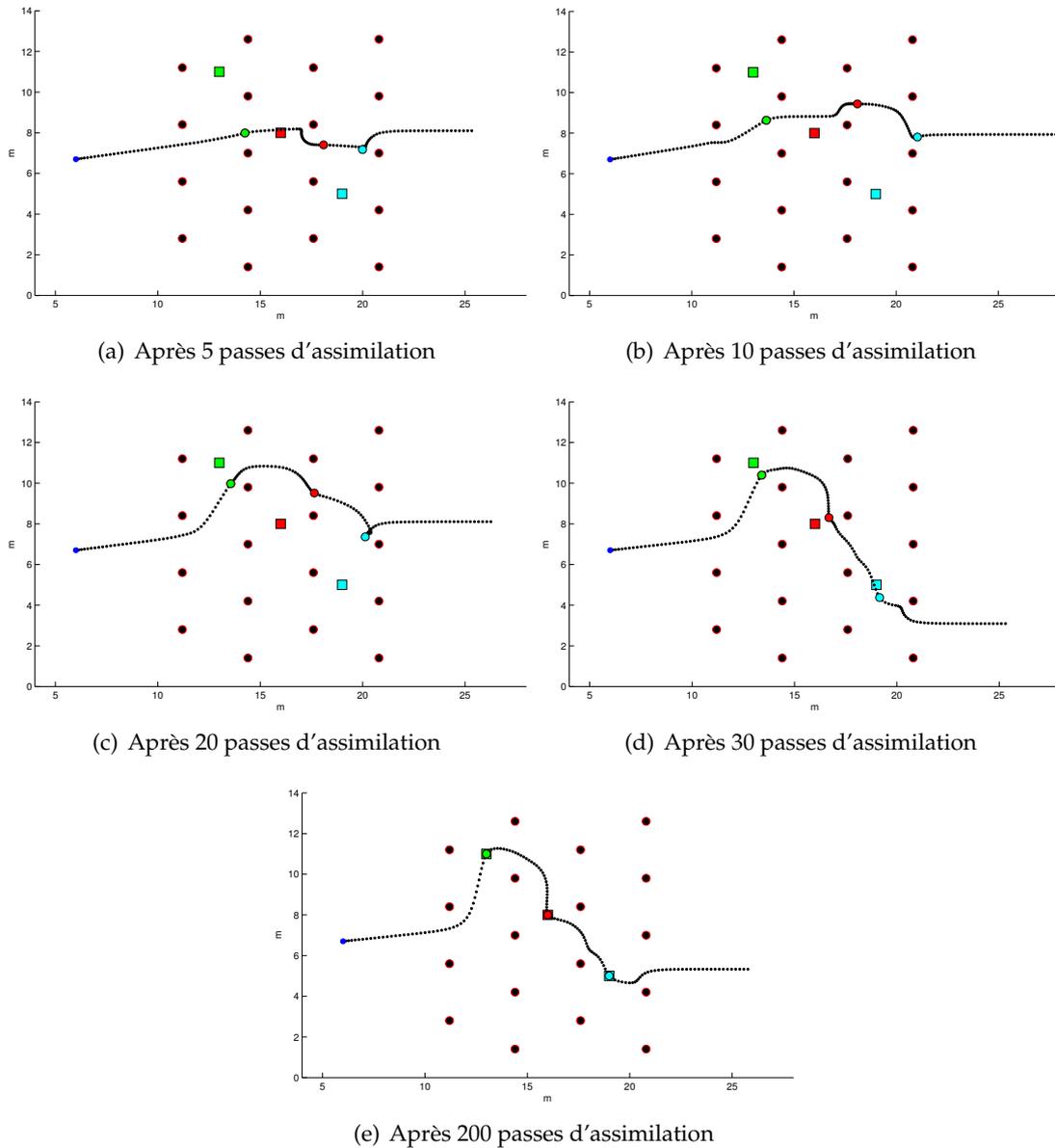


FIGURE 5.32 – Expérience du *pachinko* : assimilation non-incrémentale par observations en position. Les observations en vert, rouge et bleu clair sont respectivement à  $t_{obs,1} = 9 s$ ,  $t_{obs,2} = 16 s$  et  $t_{obs,3} = 22 s$ . Les points noirs ceclés de rouge sont des individus fixes faisant office de butoirs. La trajectoire est représentée par la position dans le temps  $t$ , à un intervalle de  $2\Delta t = 0.2 s$ .

modèle linéarisé  $\partial_{\mathbf{x}}\mathbb{M}$  permet d'éviter à la trajectoire d'état de tomber dans le premier piège venu de minimum local sur  $\mathcal{J}$ . A la place, l'intégration sur toute la séquence du modèle  $\mathbb{M}$  donne à la trajectoire d'état  $\underline{\mathbf{X}}$ , et à chaque itération, la chance de retrouver un parcours suffisamment acceptable au sens de la dynamique originelle, en prenant tout de même en compte les informations d'observation fournies par la trajectoire adjointe totale  $\underline{\mathbf{X}}_{\text{opt}}$ . Cependant, l'information accumulée par celle-ci, autrement dit la mémoire adjointe, est susceptible de provoquer des variations importantes à chaque itération, rendant cette méthode potentiellement instable ou même divergente.

#### 5.2.4 Discussion sur le contrôle optimal foules multi-directionnelles

Nous avons pu voir dans cette section que les foules multi-directionnelles constituent un phénomène délicat à gérer par le contrôle optimal par assimilation variationnelle. L’emmêlement des trajectoires Lagrangiennes induit par le croisement d’individus au sein d’une foule rend compliquée toute variation globale de l’état. La répulsion des personnes crée autant d’obstacles à la minimisation de la fonctionnelle d’énergie servant au contrôle optimal. Certaines méthodes, comme l’assimilation incrémentale fractionnée, permettent de contourner cette problématique sans totalement s’en affranchir. En faisant une utilisation raisonnée à la fois du modèle et de sa linéarisation, il est possible de cumuler les avantages qu’offre leur intégration temporelle. Pour le premier, cet avantage se traduit par un rappel fort sur la dynamique première de la foule, avec les caractéristiques d’évitement et de croisement qu’elle comporte. Pour le second, il se traduit par une convergence robuste du problème posé, bien que la solution soit souvent un minimum local au sens de la fonctionnelle d’énergie. L’assimilation non-incrémentale constitue une alternative intéressante, dans la mesure où elle ne repose que sur l’intégration du modèle. L’éventail de solutions possible au problème d’optimalité sur la foule se voit ainsi considérablement élargi puisque la dynamique du modèle offre alors l’accès à toutes les possibilités combinatoires sur l’emmêlement. Si son espace de solution s’agrandit, la garantie de convergence est cependant *a priori* moindre que la méthode d’assimilation non-incrémentale.

### 5.3 Conclusion

Le contrôle centralisé de particules Lagrangiennes offre une approche intéressante pour l'analyse de la foule. Nous avons pu voir dans ce chapitre que l'utilisation de l'assimilation variationnelle comme contrôleur optimal permet de diriger efficacement des agents en interaction dont la modélisation est incertaine. Du point de vue du contrôle, il est ainsi possible d'éditer le comportement d'essaims dans l'optique d'obtenir certains phénomènes émergents. Le choix de ces phénomènes, ou observations, se fait sur des bases diverses. Ils peuvent être conçus sur des considérations dynamiques continues, comme l'observation de champs de vitesse, de carte de vorticité ou encore de divergence. Ce lien entre la description Lagrangienne d'un sujet et l'application de contraintes dynamiques continues permet de remonter aux informations propres des agents que constitue leur état. Nous sommes ainsi en mesure de suivre la trajectoire d'un nombre important d'agents dirigés par plusieurs types de modélisation, dont celle de la foule avec ce qu'elle comporte comme dynamique sociale, et sous contraintes d'observations multiples et variées. Ces observations peuvent être de natures différentes, notamment Lagrangienne. Les observations de formation permettent de s'appuyer sur des relations de distance entre propriété pour retrouver certains comportements. Par exemple l'observation de distance en position entre agents amène la possibilité de préciser, plus ou moins explicitement selon le degré de liberté laissé, des configurations relatives de particules. Ceci s'avère particulièrement utile pour l'industrie de l'infographie, puisqu'il est alors possible de concilier la modélisation de divers phénomènes (foule, animaux, poissons..) avec des contraintes originales et reconnaissables. Cette approche ouvre aussi la voie à des méthodes d'assimilation basées sur des données réelles. En premier lieu, il est en théorie possible, grâce à l'utilisation de champs de vitesse provenant de vidéos, de retrouver la trajectoire d'état d'une foule riche en individus là où les méthodes stochastiques auraient montré leurs limites. L'apprentissage sur des quantités directement propres aux piétons se voit donc facilitée, et laisse entrevoir de nouvelles approches sur l'analyse de la foule.

Ajoutons que des modèles encore différents sont envisageables, tels que les modèles fluides par description Lagrangienne, plus connus sous le nom de *smooth particles hydrodynamics* (SPH) [62]. Dans des contextes plus divers, la notion de particule spatiale peut aussi être abandonnée au profit de modèles plus abstraits basés sur la théorie des graphes.

# 6

## Conclusion et Perspectives

La synthèse de mouvements de foules humaines est une tâche délicate. La connaissance qu'il est possible d'avoir de ce phénomène se limite essentiellement à des constatations générales sur certains comportements individuels ou collectifs. Ces comportements sont formalisés à l'aide de *modèles* censés être capables de reproduire les caractéristiques principales et émergentes de la foule. La construction de ces modèles constitue toutefois un domaine de recherche très ouvert. En effet, la profondeur et la variété des mécanismes sociologiques liant les individus est telle que la perspective de proposer un modèle unifié capable de restituer la dynamique des foules liée à la totalité de ces mécanismes paraît difficile.

Ainsi se pose la question de la représentation de la foule, et par extension celle de la représentation des individus. La définition des propriétés composant l'état d'une personne est délicate puisque beaucoup d'entre elles sont liées à des comportements qui, s'ils sont parfois observés, sont incompris ou inconnus. Dès lors, la question de savoir quelle est la représentation d'état de la foule se pose. Certaines propriétés d'individus sont facilement identifiables et mesurables, notamment la corpulence des individus sur la base de statistiques à différentes échelles régionales, et permettent de quantifier facilement plusieurs variables de modèles utilisés pour simuler la foule. Les autres, qui représentent souvent la grande majorité de ces variables, sont donc inconnues et sont souvent calibrées empiriquement pour restituer le phénomène attendu (comme la congestion d'individu, la panique, la création de files, etc.).

Le problème de ces calibrations empiriques est qu'elles ne permettent pas de comprendre la foule dans son ensemble. Chacune d'entre elles est en général effectuée pour que le modèle auquel les paramètres sont attachés soit capable de répondre à la restitution d'un phénomène précis. Elles ne renseignent finalement pas sur l'état réel de la foule qui elle, contrairement à chacun de ces modèles, est naturellement capable d'exhiber tous les phénomènes étudiés. L'étude qualitative de la foule montre donc ses limites dès lors qu'on cherche à appréhender sa phénoménologie dans son ensemble.

L'analyse quantitative de la foule permet ainsi d'utiliser des données réelles issues d'observations diverses pour estimer la valeur des propriétés et états la constituant. La capture de mouvements appliquée à la gestuelle d'humains a notamment permis des avancées considérables dans ce domaine. Cette approche n'est cependant pas transposable à la foule. Il est en effet matériellement très difficile d'équiper et suivre un grand nombre d'individus. De plus, une expérimentation dans un cadre contrôlé risque de modifier la nature du phénomène observé. On peut ainsi imaginer que des personnes se sachant

observées soient par exemple plus respectueuses les unes des autres, modifiant donc leurs caractéristiques sociales au cours de cette expérience<sup>1</sup>. Cet aspect est négligeable pour la capture de gestuelle, où ce sont surtout des caractéristiques biomécaniques (supposées indépendantes de facteurs psychologiques) qui sont étudiées, mais pas dans le cas de l'analyse de la foule.

D'autres techniques de mesure permettent néanmoins de récolter des données. Les images et les vidéos de scènes montrant des groupes d'individus contiennent ainsi des informations précieuses sur le comportement de la foule. Ces observations sont matériellement peu difficiles à mettre en place et à rendre discrètes pour éviter l'intrusion. Les caméras de surveillance dans les zones sensibles permettent à l'heure actuelle de collecter une quantité conséquente d'information sur la foule.

L'utilisation de cette information est toutefois délicate car elle se cache au sein de données de bas niveau que sont les variations spatio-temporelles (dans le cas de la vidéo) de la luminance. Leur traitement fait l'objet de nombreuses techniques qui se basent pour la grande majorité d'entre elles sur des modèles d'observation spécifiques. Il est ainsi possible, à partir d'*a priori* sur le sujet étudié au sein de la scène, d'acquérir certaines informations sur son état représenté. Les techniques de reconnaissance dans une image se basent ainsi sur une modélisation spatiale des individus (souvent construite à partir de gradients de luminance) afin d'en détecter l'existence, la position et parfois le contour. Les techniques de suivi proposent elles d'utiliser la continuité temporelle de l'existence des individus pour analyser la trajectoire de ces derniers à l'aide de modèles d'évolution stochastiques, comme les filtres de Kalman ou les filtres particulaires. Bien que ces techniques aient fait la preuve de leur efficacité au cours des dix dernières années, elles peinent cependant à suivre un nombre important de piétons au sein d'une scène. Le nombre de particules stochastiques nécessaires à l'estimation d'états de grandes dimensions, et dirigés par des modèles d'évolution fortement non linéaires, est en effet trop important pour que leur gestion au cours du suivi se fasse à un coût calculatoire raisonnable.

Les techniques variationnelles permettent de procéder à l'estimation d'états de grandes tailles grâce au calcul de gradients d'énergie induit par des erreurs à définir. Les méthodes adjointes, utilisées par l'assimilation de données variationnelle, proposent ainsi de contrôler l'incertitude induite par le modèle d'observation et par le modèle d'évolution de l'état. Cette technique de contrôle optimal permet de minimiser progressivement l'écart entre une observation du phénomène considéré et la trajectoire d'état obtenue par la simulation d'un modèle d'évolution, toujours sous supervision de ce dernier. Ces techniques ont principalement été utilisées dans le domaine de l'analyse géophysique (océanographie, météorologie), dans lequel les échelles modélisées et la discrétisation spatiale du domaine étudié engendrent souvent un espace d'état de grande dimension.

En adaptant la modélisation à des comportements généralistes de la foule, ces techniques ont montré dans cette thèse leur efficacité quant à l'estimation de propriétés intéressantes à partir de vidéos telles que l'inconfort, et décrites localement sur une grille Eulérienne induisant un espace d'état de grande dimension. Cette propriété d'inconfort proposée pour la représentation et la modélisation de la foule est supposée constituée de diverses quantités provoquant la contrariété des individus vis-à-vis de leurs exigences, et éventuellement portant atteinte à leur sécurité (comme la pression). Son estimation

---

1. Il est cependant envisageable de justement mesurer l'impact psychologique de la mesure, à supposer qu'on dispose d'une très bonne estimation de ces propriétés dans des conditions « normales » (foule témoin).

---

permet alors d'envisager l'adaptation de systèmes de surveillance automatisés pour la détection de situations dangereuses dans les zones de forte affluence.

L'estimation de propriétés locales n'est cependant pas forcément adaptée à l'analyse d'un phénomène pouvant présenter de fortes disparités. Certaines zones peuvent ainsi présenter tour à tour une grande densité d'individus, puis leur absence totale. De plus, il est intéressant de pouvoir remonter à des propriétés individuelles sur la base de données réelles. Toutefois la description utilisée historiquement dans le cadre géophysique de l'assimilation n'est pas adaptée à l'estimation de propriétés ponctuelles et mouvantes dans l'espace que peuvent représenter les piétons. C'est pourquoi nous avons proposé parmi les travaux conduits de transposer le cadre d'assimilation variationnelle Eulérien dans un cadre Lagrangien. A partir d'un modèle *agent* développé pour exhiber des comportements continus de l'espace, et d'observations provenant d'espaces divers et notamment Eulérien, nous sommes ainsi en mesure de contrôler individuellement une foule sous des contraintes extérieures diverses. Ces contraintes peuvent être issues d'une description Eulérienne, comme des champs de vitesse potentiellement issus de l'analyse du mouvement dans une vidéo. Des cartes de quantités de haut niveau témoignant de la dynamique de la foule, comme la vorticité ou la divergence en vitesse, peuvent aussi servir à contrôler la foule selon des critères physiques observés. Mais ces contraintes peuvent aussi être issues d'une description Lagrangienne, permettant l'édition de mouvements de foules originaux comme la formation de motifs par les individus. La création de tous ces effets trouvent notamment un intérêt particulier dans l'industrie de l'infographie, où la synthèse de groupes aux effets scénaristiques peut être recherchée. L'avantage de l'approche proposée ici est que l'obtention des contraintes d'observations par le sujet se fait avec un respect maximal de la dynamique induite par son modèle d'évolution. C'est à dire que le contrôle optimal se charge en théorie de trouver le meilleur compromis possible entre des contraintes extérieures et dynamiques potentiellement antagonistes. Le résultat obtenu continue ainsi d'exhiber les comportements émergents du modèle d'évolution, qui au sens du contrôle peuvent être perçus comme le *réalisme*, et au sens de l'estimation comme d'interpolant dynamique.

Cependant, l'application des théories variationnelles sur lesquelles se base le procédé d'assimilation étudié engendre un formalisme lourd pour des systèmes Lagrangiens comparé à celui engendré par une modélisation basée sur des quantités et opérateurs Eulériens. Dans ce dernier cas en effet, la plupart des opérations de dérivations et transposition qu'implique l'utilisation de variables adjointes peuvent s'écrire plutôt facilement. Ce n'est par contre pas le cas pour des systèmes Lagrangiens. C'est pourquoi nous avons également été amenés à proposer un formalisme compact s'appuyant sur la théorie des graphes. Les opérateurs dédiés à ce domaine d'étude s'avèrent en effet parfaitement adaptés à l'écriture d'équations Lagrangiennes précises et condensées, en se dispensant de l'écriture explicite et fastidieuse de relations inter-particules dans des espaces de taille quelconque. Nous avons de même été amenés à étendre ce formalisme pour permettre la manipulation de données issues d'espaces différents, et plus particulièrement Eulériens. En représentant aussi les propriétés issues de cette dernière description comme un graphe connexe à celui du système Lagrangien, nous proposons des opérateurs d'inter-adjacence permettant d'écrire facilement le passage entre les deux descriptions considérées. Les caractéristiques de tous ces opérateurs vis-à-vis de la dérivation ont également été présentées afin de répondre aux besoins de la théorie de l'assimilation variationnelle.

Si nous avons pu nous pencher en détail sur une méthode d'estimation s'étant avérée efficace, les problématiques de quantification de ses performances, ainsi que celle de la modélisation de la foule reste ouverte. La modélisation de ce phénomène reste en effet subjective et se base essentiellement sur des *a priori*, alors que l'assimilation s'appuie grandement sur celle-ci. L'analyse vidéo de la foule manque à l'heure actuelle de critères de comparaison sur la qualité de telle modélisation ou tel estimateur de ses propriétés. Il est dès lors difficile d'isoler dans quelle proportion l'une ou l'autre est adaptée au phénomène traité. C'est pourquoi nous proposons également dans ce document une base de données dédiée à l'analyse vidéo de la foule. L'utilisation de bases de données a en effet prouvé son intérêt quant à l'amélioration de méthodes dédiées, notamment dans le domaine de l'analyse du mouvement apparent. Le but est alors d'appliquer diverses techniques aux cas de figures proposés, et de confronter leurs résultats avec une *vérité terrain* gardée secrète. Si certaines bases dédiées au suivi individuel existent déjà, leur vérité terrain est construite sur l'appréciation et le marquage manuel d'un utilisateur, ce qui peut engendrer certaines erreurs sur les données de référence. De plus, le nombre d'individus présentés dans les scènes, et les conditions dans lesquelles ceux-ci évoluent, ne permettent pas de considérer cette base comme appropriée à l'analyse de la foule. A la place, nous synthétisons des scènes de foules avec autant de réalisme que possible. Ce réalisme passe à la fois par la dynamique comportementale qui est choisie, et par la simulation graphique utilisée. Grâce à l'utilisation d'effets divers d'éclairage, ombrage, et d'autres encore, il est possible de proposer des scènes suffisamment réalistes pour considérer que leur utilisation par des techniques d'estimation ne génère pas, ou peu, de bruit de synthèse dû au décalage entre le rendu virtuel et l'acquisition photographique d'images. L'avantage principal de cette approche pour construire une base donnée dédiée à la foule, est que la vérité terrain est immédiatement fournie par la simulation comportementale des individus, et elle est de plus parfaite. L'autre point fort est qu'il est possible pour une même simulation de foule de choisir des paramètres de caméra (pointe de vue) et d'éclairage (ensoleillé ou nuageux) différents, permettant de quantifier les performances de telle ou telle technique d'estimation sous des conditions différentes et infinies tout en fixant le phénomène étudié. Cette caractéristique n'est évidemment pas possible pour une base constituée de données réelles de foule.

Pour revenir à l'assimilation variationnelle sur laquelle nous nous sommes penchés dans ce document, plusieurs problématiques ont été mises à jour concernant son application à des foules composées de groupes aux objectifs différents. Cette technique de contrôle se base en effet sur le calcul de gradients de trajectoire d'état, et donc par conséquence sur des gradients de trajectoires individuelles. Or, dans le cas de la simulation d'une foule multi-directionnelle, comme un carrefour d'affluence qui a été étudié dans ce document, l'emmêlement des trajectoires crée à cause de la répulsion des piétons des minima locaux sur la fonction d'énergie sur laquelle l'assimilation variationnelle est basée. En conséquence, si les trajectoires peuvent être infléchies pour respecter l'observation, leur configuration d'emmêlement initiale ne peut être modifiée. Ceci a pour effet de produire des comportements qui ne sont pas fidèles au modèle d'évolution, mais seulement au modèle d'évolution dérivé, et qui sont dans le cas courant irréaliste au sens de la dynamique et de la combinatoire induite par le modèle. Pour remédier à cette problématique, nous avons présenté certaines approches qui se sont avérées susceptibles à l'avenir de gérer ces difficultés. Puisque celles-ci proviennent de l'étape d'intégration temporelle du modèle linéarisé, nous proposons d'y avoir recours de façon parcimonieuse. Dans un premier

temps en fractionnant temporellement la séquence afin de limiter son empreinte sur l'historique de la trajectoire, et dans un second temps en l'abandonnant totalement au profit de la technique d'assimilation non-incrémentale. Les caractéristiques de contrôle de chacune de ces méthodes sont présentées dans un environnement faiblement chaotique dans lequel de petites variations d'état peuvent générer de grandes variations de trajectoire, ce qui constitue l'essence de la problématique d'emmêlement. Si l'assimilation incrémentale s'avère incapable de préserver certains comportements de la dynamique première dans un tel environnement, les variantes fractionnées et non-incrémentales apportent une réponse intéressante au problème posé, avec chacune des façons différentes de converger vers des trajectoires propres. Ces expérimentations permettent ainsi d'évaluer dans quelle mesure chacune de ces déclinaisons de l'assimilation variationnelle permet de répondre à la problématique de contrôle de divers situations de foules humaines. Précisons toutefois qu'une des forces de l'utilisation de telles techniques réside dans la littérature y étant consacrée durant les vingt dernières années dans le domaine de l'analyse de fluides géophysiques, et qu'il est à penser que certains développements ayant fait leurs preuves dans ce domaine sont transposables efficacement à l'analyse de systèmes Lagrangiens tels que le phénomène de foule représenté par des agents en interactions.

Les travaux menés dans cette thèse proposent ainsi une approche transversale de l'étude de la foule afin de poser les concepts et techniques permettant d'en améliorer la compréhension, l'analyse et la synthèse. Cette approche constitue une façon originale d'apprécier des phénomènes *a priori* infiniment complexes quant aux mécanismes qu'ils mettent en jeu et dont la modélisation est par nature approximative et donc incertaine.

## 6.1 Perspectives

Parmi ces phénomènes complexes, citons notamment le projet *Living Earth Simulator*<sup>2</sup>[48] qui doit s'atteler prochainement à simuler globalement et à plusieurs échelles la vie humaine, allant de l'individu jusqu'à la démographie, en passant par des mécanismes urbains, socio-économiques et même financiers. L'approche proposée dans ce document se rapproche des objectifs de ce projet visant à simuler le plus fidèlement possible des mécanismes *a priori* hors de portée de toute modélisation, en récoltant le plus d'informations possibles sur le phénomène modélisé qui n'est rien de moins que l'existence humaine<sup>3</sup>. L'assimilation variationnelle associée aux outils de descriptions multiples que nous avons proposés s'inscrivent en effet dans ces objectifs de mesure, calibration, estimation et simulation.

De manière plus immédiate, l'utilisation de particules Lagrangiennes de suivi d'anomalies de fluides géophysiques a trouvé un écho dans le domaine l'estimation stochastique que nous pensons ainsi probablement retrouvable par le biais des techniques ici présentées.

Notons que dans ces travaux, nous ne nous sommes pas penchés sur l'information finale contenue par les variables de contrôle à convergence. Ces variables contiennent pourtant des données précieuses concernant les degrés de liberté laissés au modèle, et donc d'un point de vue stochastique sur la confiance qui lui est apportée. Son étude peut donc servir à l'estimation de la covariance des modèles de foules utilisés, la rapprochant

---

2. <http://www.futurict.eu>

3. Avec peut-être l'ambition de répondre à son pourquoi ?

ainsi du cadre comparatif de méthodes d'estimation que nous avons abordé quant à la base de données dédiée. Cette variable de contrôle, tout comme celle concernant la condition initiale peut aussi servir à mieux définir l'erreur globale du système d'optimalité duquel dérive le contrôle optimal. Nous n'avons en effet présenté ici que des erreurs quadratiques sur l'observation, et pas sur l'énergie dynamique totale qui a dû être fournie à la simulation (l'intégration temporelle du bruit du modèle), ni sur celle issue de la modification de la condition initiale. Nous n'avons d'ailleurs ici pas présenté son influence sur les expériences menées, et l'impact que peut avoir sa libération sur le contrôle de la foule reste à effectuer.

Certaines expériences ont aussi semblé montrer que la minimisation de la divergence au sein d'une foule laisse émerger des comportements intéressants comme une fluidification générale des déplacements. Cette étude reste néanmoins aussi à mener pour correctement évaluer dans quelles proportions, et avec quelle portée, cette opération présente un intérêt.

Le contrôle de foule par contraintes de mouvement apparent d'une vidéo reste également à mener dans le but de vérifier si cette approche est adaptée à l'estimation de propriétés individuelles comme la position et la vitesse afin de procéder au suivi d'individus. Dans ce cadre, nous avons pu voir que l'assimilation variationnelle s'appuie sur un espace d'état qu'il est difficile de modifier au cours des itérations et de l'estimation (d'où son utilisation principalement dans un contexte Eulérien dont la dimension est en général fixée). Dans le cas de la foule, et dans un contexte Lagrangien, rien ne garantit que le nombre d'individus présents dans la scène simulée, préalable à l'assimilation, correspondent au nombre d'individus présents dans la séquence vidéo observée. En d'autres termes, l'assimilation ne pourra pas faire varier le nombre d'individus qu'elle traite, quand bien même ce nombre ne correspond pas aux conditions posées par le système d'optimalité. La problématique de comptage reste donc ouverte car si nous avons pu voir que l'assimilation Eulérienne est capable de modifier la « masse » totale<sup>4</sup> comme nous l'avons vu avec le contrôle du potentiel d'inconfort (supposé contenir la densité), elle ne l'est revanche pas dans le cas du modèle agent qui été utilisé dans le dernier chapitre. On peut cependant imaginer faire varier la quantité individuelle de présence, jusqu'ici fixée à 1, grâce à une modélisation neutre et incertaine de son évolution représentée par la relation  $\frac{\partial q}{\partial t} = \epsilon_q$ . La variation de « masse » induite pose alors la question de sa régularisation à la fonction Dirac représentant l'existence d'un individu naturellement indivisible. Il est possible d'envisager des lois de « mitose » et de fusion dans le cas où celle-ci respectivement dépasse la valeur unitaire d'un certain seuil, ou au contraire se trouve être trop faible. Cette procédure reste théoriquement complexe à formaliser et à mener à bien.

Le formalisme présenté dans ce document a autant que possible tenté d'être conduit dans un cadre généraliste, quelle que soit la dimension spatiale  $d = \{1, 2, 3\}$ . Il en a été de même la plupart du temps pour le code de calcul développé lors de cette thèse, et l'implémentation finale du cas tridimensionnel reste à faire. A la lumière des résultats que nous avons obtenus, des expérimentations dans cette dimension sont susceptibles de fournir des résultats intéressants quand au contrôle de phénomènes divers tels que des bancs de poisson ou des volées d'oiseau. La prise en compte de différents types d'agents en interaction a d'ailleurs elle aussi été prise en compte lors du développement du code

4. Cette masse est celle prise au sens conservatif n'est pas celle des piétons  $m$  et est vue comme leur quantité individuel  $q$  étant un Dirac.

de calcul. Enfin notons que les problématiques ici posées sont particulièrement adaptées à la parallélisation de celui-ci, notamment au sein de processeurs graphiques ayant fait la preuve de leur performance pour le calcul distribué et étant largement diffusés dans les machines actuelles.



# Références

- [1] S. ALI et M. SHAH : A lagrangian particle dynamics approach for crowd flow segmentation and stability analysis. *In CVPR*, pages 1–6, 2007.
- [2] S. ALI et M. SHAH : Floor fields for tracking in high density crowd scenes. *In ECCV*, pages II : 1–14, 2008.
- [3] E.L. ANDRADE, S. BLUNSDEN et R.B. FISHER : Hidden markov models for optical flow analysis in crowds. *In Pattern Recognition, 2006. ICPR 2006. 18th International Conference on*, volume 1, pages 460–463, 2006.
- [4] Ernesto L. ANDRADE, Scott BLUNSDEN et Robert B. FISHER : Modelling crowd scenes for event detection. *In ICPR (1)*, pages 175–178, 2006.
- [5] E. ARNAUD : *Méthodes de filtrage pour du suivi dans des séquences d'images - Application au suivi de points caractéristiques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, mention Traitement du Signal et Télécommunications, November 2004.
- [6] Simon BAKER et Iain MATTHEWS : Lucas-kanade 20 years on : A unifying framework. *International Journal of Computer Vision*, 56(3) :221–255, 2004.
- [7] Simon BAKER, Daniel SCHARSTEIN, J. P. LEWIS, Stefan ROTH, Michael J. BLACK et Richard SZELISKI : A database and evaluation methodology for optical flow. *In ICCV*, pages 1–8, 2007.
- [8] Simon BAKER, Daniel SCHARSTEIN, J. P. LEWIS, Stefan ROTH, Michael J. BLACK et Richard SZELISKI : A Database and Evaluation Methodology for Optical Flow. *International Journal of Computer Vision*, 92(1) :1–31, novembre 2010.
- [9] John L. BARRON, David J. FLEET et Steven S. BEAUCHEMIN : Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 12(1) :43–77, 1994.
- [10] Michael J. BLACK et Allan D. JEPSON : Eigenttracking : Robust matching and tracking of articulated objects using a view-based representation. *International Journal of Computer Vision*, 26 :63–84, 1998.
- [11] M.J. BLACK : *Robust incremental optical flow*. Thèse de doctorat, Yale University, Department of Computer Science, 1992.
- [12] Jean-Yves BOUGUET : Pyramidal implementation of the lucas kanade feature tracker description of the algorithm, 2000.
- [13] Adriana BRAUN, Soraia R. MUSSE, Luiz P. L. de OLIVEIRA et Bardo E. J. BODMANN : Modeling individual behaviors in crowd simulation. *In Computer Animation and Social Agents, 2003. 16th International Conference on*, pages 143–148, Washington, DC, USA, may 2003. IEEE Computer Society.
- [14] Gabriel J. BROSTOW et Roberto CIPOLLA : Unsupervised bayesian detection of independent motion in crowds. *In CVPR (1)*, pages 594–601, 2006.
- [15] T. BROX, A. BRUHN, N. PAPENBERG et J. WEICKERT : High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. *In European Conference on Comput. Vis. (ECCV'04)*. Springer-Verlag, 2004.
- [16] G. BURGERS, P. JAN VAN LEEUWEN et G. EVENSEN : Analysis Scheme in the Ensemble Kalman Filter. *Monthly Weather Review*, 126 :1719–+, 1998.
- [17] S. CHENNEY : Flow tiles. *In Symposium on Computer Animation, SCA'04*, pages 233–242, Grenoble, France, août 2004. ACM SIGGRAPH/Eurographics.

- 
- [18] G.E. CHRISTENSEN et H.J. JOHNSON : Consistent image registration. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 20(7) :568–582, july 2001.
- [19] I. COHEN et G. MEDIONI : Detecting and Tracking Moving Objects in Video Surveillance. *In Proceedings of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, 1999.
- [20] T. CORPETTI, P. HÉAS, E. MÉMIN et N. PAPADAKIS : Pressure image assimilation for atmospheric motion estimation. *Tellus Series A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 61(1) :160–178, 2009.
- [21] T. CORPETTI, E. MÉMIN et P. PÉREZ : Dense Estimation of Fluid Flows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(3) :365–380, 2002.
- [22] Nicolas COURTY et Thomas CORPETTI : Crowd motion capture. *Journal of Visualization and Computer Animation*, 18(4-5) :361–370, 2007.
- [23] C. CURIO, J. EDELBRUNNER, T. KALINKE, C. TZOMAKAS et W. von SEELEN : Walking pedestrian recognition. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 1(3) : 155–163, sep 2000.
- [24] A. CUZOL, P. HELLIER et E. MÉMIN : A low dimensional fluid motion estimator. *International Journal of Computer Vision*, 75(3) :329–349, 2007.
- [25] Anthony C. DAVIES, Jia Hong YIN et Sergio A. VELASTIN : Crowd monitoring using image processing. *Electronics and Communication Engineering Journal*, 7 :37–47, 1995.
- [26] Reinhard DIESTEL : *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 3rd édition, 2005.
- [27] E. W. DIJKSTRA : A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1 :269–271, 1959.
- [28] Arnaud DOUCET, Email ARNAUDISMACJP et Adam M JOHANSEN : A tutorial on particle filtering and smoothing : Fifteen years later. *Handbook of Nonlinear Filtering*, 1(December) :4–6, 2008.
- [29] Arnaud DOUCET, Nando DE FREITAS et Neil GORDON : *Sequential Monte Carlo methods in practice*. 2001.
- [30] Arnaud DOUCET, Simon GODSILL et Christophe ANDRIEU : On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10 :197–208, July 2000.
- [31] T. DRIEMEYER : *Rendering with mental ray*. Springer, New York, 2001.
- [32] Geir EVENSEN : Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, 99(C5) :10143–10162, 1994.
- [33] J.T. FEDDEMA, C. LEWIS et D.A. SCHOENWALD : Decentralized control of cooperative robotic vehicles : theory and application. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 18(5) :852–864, oct 2002.
- [34] Li FEI-FEI, Robert FERGUS et Pietro PERONA : One-shot learning of object categories. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 28(4) :594–611, 2006.
- [35] David J. FLEET et Allan D. JEPSON : Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*, 5(1) :77–104, 1990.

- [36] Pierre F. GABRIEL, Jacques G. VERLY, Justus H. PIATER et André GENON : The state of the art in multiple object tracking under occlusion in video sequences. *In In Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems (ACIVS)*, 2003, pages 166–173, 2003.
- [37] B. GALVIN, B. MCCANE, K. NOVINS, D. MASON et S. MILLS : Recovering motion fields : an analysis of eight optical flow algorithms. *In Proc. British Mach. Vis. Conf.*, Southampton, 1998.
- [38] V. GAZI, B. FIDAN, Y. S. HANAY et M. Ilter KOKSAL : Aggregation, foraging, and formation control of swarms with non-holonomic agents using potential functions and sliding mode techniques. *Turkish J. Elect. Eng. Comput. Sci.*, 15(2) :149–168, July 2007.
- [39] V. GAZI et K.M. PASSINO : Stability analysis of swarms. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(4) :692 – 697, april 2003.
- [40] Veysel GAZI et Baris FIDAN : Coordination and control of multi-agent dynamic systems : Models and approaches. *In Erol SAHIN, William SPEARS et Alan WINFIELD, éditeurs : Swarm Robotics*, volume 4433 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 71–102. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [41] Stephen J. GUY, Jatin CHHUGANI, Sean CURTIS, Pradeep DUBEY, Ming C. LIN et Dinesh MANOCHA : PLEdestrians : A least-effort approach to crowd simulation. *In Zoran POPOVIC et Miguel A. OTADUY, éditeurs : Proceedings of the 2010 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, SCA 2010, Madrid, Spain, 2010*, pages 119–128. Eurographics Association, 2010.
- [42] P.E. HART, N.J. NILSSON et B. RAPHAEL : A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *Systems Science and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 4(2) :100 –107, july 1968.
- [43] P. HEAS, C. HERZET et E. MEMIN : Bayesian inference of models and hyper-parameters for robust optic-flow estimation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, PP(99) :1, 2011.
- [44] P. HÉAS, E. MÉMIN, D. HEITZ et P.D. MININNI : Bayesian selection of scaling laws for motion modeling in images. *In International Conference on Computer Vision (ICCV'09)*, 2009.
- [45] D. HEITZ, E. MÉMIN et C. SCHNOERR : Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Experiments in Fluids*, 48(3) :369–393, novembre 2009.
- [46] D. HELBING, I. FARKAS et T. VICSEK : Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407(1) :487–490, 2000.
- [47] Dirk HELBING : A fluid dynamic model for the movement of pedestrians. *COMPLEX SYSTEMS*, 6 :391, 1992.
- [48] Dirk HELBING : *Pluralistic modeling of complex systems*, 2010.
- [49] Dirk HELBING, Anders JOHANSSON et Habib Zein AL-ABIDEEN : Dynamics of crowd disasters : An empirical study. *Phys. Rev. E*, 75(4) :046109, Apr 2007.
- [50] Dirk HELBING et Peter MOLNAR : Social force model for pedestrian dynamics. *PHYSICAL REVIEW E*, 51 :4282, 1995.
- [51] L. F. HENDERSON : The Statistics of Crowd Fluids. *Nature*, 229 :381–383, février 1971.

- [52] Serge HOOGENDOORN et Piet H.L. BOVY : Simulation of pedestrian flows by optimal control and differential games. *Optimal Control Applications and Methods*, 24(3) :153–172, 2003.
- [53] Berthold K. P. HORN et Brian G. SCHUNCK : Determining optical flow. *Artif. Intell.*, 17(1-3) :185–203, 1981.
- [54] R. L. HUGHES : The Flow of Human Crowds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35 :169–182, 2003.
- [55] M. ISARD et A. BLAKE : A mixed-state condensation tracker with automatic model-switching. In *Computer Vision, 1998. Sixth International Conference on*, pages 107–112, jan 1998.
- [56] J.C.S. JACQUES JUNIOR, S.R. MUSSE et C.R. JUNG : Crowd analysis using computer vision techniques. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 27(5) :66–77, sept. 2010.
- [57] Xiaogang JIN, Jiayi XU, C.C.L. WANG, Shengsheng HUANG et J. ZHANG : Interactive control of large-crowd navigation in virtual environments using vector fields. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 28(6) :37–46, nov.-dec. 2008.
- [58] R. E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng.*, 82 :35–45, 1960.
- [59] M. KAMACHI et J.J. O'BRIEN : Continuous data assimilation of drifting buoy trajectory into an equatorial pacific ocean model. *Journal of Marine Systems*, 6(1-2) :159–178, 1995.
- [60] Zia KHAN, Tucker R. BALCH et Frank DELLAERT : Mcmc data association and sparse factorization updating for real time multitarget tracking with merged and multiple measurements. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 28(12) :1960–1972, 2006.
- [61] Ron KIMMEL et James A. SETHIAN : Optimal algorithm for shape from shading and path planning. *J. Math. Imaging Vis.*, 14 :237–244, May 2001.
- [62] Petros KOUMOUTSAKOS, Georges-Henri COTTET et Diego ROSSINELLI : Flow simulations using particles - bridging computer graphics and CFD, septembre 01 2008.
- [63] Taesoo KWON, Kang Hoon LEE, Jehhee LEE et Shigeo TAKAHASHI : Group motion editing. *ACM Trans. Graph.*, 27(3), 2008.
- [64] Fabrice LAMARCHE : *Humanoïdes virtuels, réaction et cognition : une architecture pour leur autonomie*. These, Université Rennes 1, décembre 2003.
- [65] Jean-Claude LATOMBE : *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1991.
- [66] S M LAVALLE : Rapidly-exploring random trees : A new tool for path planning. In, 129(98-11) :98–11, 1998.
- [67] François-Xavier LE DIMET et Olivier TALAGRAND : Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus A*, 38A(2) :97–110, 1986.
- [68] Kang Hoon LEE, Myung Geol CHOI, Qyoun HONG et Jehhee LEE : Group behavior from video : a data-driven approach to crowd simulation. In *Symposium on Computer Animation*, pages 109–118, 2007.

- [69] Bastian LEIBE, Edgar SEEMANN et Bernt SCHIELE : Pedestrian detection in crowded scenes. *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, 1 :878–885, 2005.
- [70] V. LEMPITSKY, S. ROTH et C. ROTHER : FusionFlow : Discrete-Continuous Optimization for Optical Flow Estimation. *In Proc. IEEE Comp. Vis. Patt. Rec. (CVPR)*, 2008.
- [71] Alon LERNER, Yiorgos CHRYSANTHOU et Dani LISCHINSKI : Crowds by example. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics)*, 26(3), 2007.
- [72] J.L. LIONS : *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971.
- [73] Bruce D. LUCAS et Takeo KANADE : An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *In IJCAI*, pages 674–679, 1981.
- [74] S. MARTINEZ, J. CORTES et F. BULLO : Motion coordination with distributed information. *Control Systems, IEEE*, 27(4) :75–88, aug. 2007.
- [75] Tom MATHES et Justus H. PIATER : Robust non-rigid object tracking using point distribution models. *In In : Proc. of the British Machine Vision Conference*, pages 849–858, 2005.
- [76] J.L. MEAD : Assimilation of simulated float data in lagrangian coordinates. *Ocean Modelling*, 8(4) :369 – 394, 2005.
- [77] Ramin MEHRAN, Alexis OYAMA et Mubarak SHAH : Abnormal crowd behavior detection using social force model. *In CVPR*, pages 935–942, 2009.
- [78] E. MEMIN et P. PEREZ : Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7(5) :703–719, may 1998.
- [79] I. MIKIC, S. KRUCINSKI et J.D. THOMAS : Segmentation and tracking in echocardiographic sequences : active contours guided by optical flow estimates. *IEEE transactions on medical imaging*, 17(2) :274–84, avril 1998.
- [80] A. MITICHE et P. BOUTHEMY : Computation of image motion : a synopsis of current problems and methods. *Int. Journ. of Comp. Vis.*, 19(1) :29–55, 1996.
- [81] Anne MOLCARD, Andrew C. POJE et Tamay M. ÖZGÖKMEN : Directed drifter launch strategies for lagrangian data assimilation using hyperbolic trajectories. *Ocean Modelling*, 12(3-4) :268 – 289, 2006.
- [82] Mehdi MOUSSAÏD, Niriaska PEROZO, Simon GARNIER, Dirk HELBING et Guy THE-RAULAZ : The walking behaviour of pedestrian social groups and its impact on crowd dynamics. *PLoS ONE*, 5(4) :e10047, 04 2010.
- [83] Soraia R. MUSSE, Cláudio R. JUNG, Julio C. S. JACQUES et Adriana BRAUN : Using computer vision to simulate the motion of virtual agents. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18(2) :83–93, 2007.
- [84] S.R. MUSSE, M. PARAVISI, R. RODRIGUES, J.C.S. Jacques JR et C.R. JUNG : Using synthetic ground truth data to evaluate computer vision techniques. *In Proc. of int. workshop on PETS*, pages 25–32, Rio de Janeiro, Brazil, octobre 2007.
- [85] H.H. NAGEL : Extending The Oriented Smoothness Constraint Into The Temporal Domain and The Estimation Of Derivatives Of Optical Flow. *In Proc. First European Conference On Comput. Vis.*, pages 139–148, Antibes, France, 1990. Springer.

- [86] Rahul NARAIN, Abhinav GOLAS, Sean CURTIS et Ming C. LIN : Aggregate dynamics for dense crowd simulation. *ACM Trans. Graph.*, 28(5), 2009.
- [87] P. NESI : Variational Approach To Optical Flow Estimation Managing Discontinuities. *Image and Vision Computing*, 11(7) :419–439, 1993.
- [88] Maëlle NODET : Variational assimilation of Lagrangian data in oceanography. *Inverse Problems*, 22(1), 2006.
- [89] Kenji OKUMA, Ali TALEGHANI, Nando de FREITAS, James J. LITTLE et David G. LOWE : A boosted particle filter : Multitarget detection and tracking. *In ECCV (1)*, pages 28–39, 2004.
- [90] R. OLFATI-SABER : Flocking for multi-agent dynamic systems : algorithms and theory. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(3) :401 – 420, march 2006.
- [91] R. OLFATI-SABER et R.M. MURRAY : Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(9) :1520 – 1533, sept. 2004.
- [92] M. OTTE et H. NAGEL : Optical flow estimation : Advances and comparisons. *In Jan-Olof EKLUNDH, éditeur : Computer Vision — ECCV '94*, volume 800 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 49–60. Springer Berlin / Heidelberg, 1994.
- [93] T. M. ÖZGÖKMEN, A. MOLCARD, T. M. CHIN, L. I. PITERBARG et A. GRIFFA : Assimilation of drifter observations in primitive equation models of midlatitude ocean circulation. *Journal of Geophysical Research (Oceans)*, 108 :3238, juillet 2003.
- [94] N. PAPADAKIS : *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs*. Thèse de doctorat, université de Rennes 1, Mention Mathématiques et Applications, 2007.
- [95] N. PAPADAKIS et E. MEMIN : Variational Assimilation of Fluid Motion from Image Sequence. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 1(4) :343, 2008.
- [96] Nicolas PAPADAKIS, Thomas CORPETTI et Étienne MÉMIN : Dynamically consistent optical flow estimation. *In ICCV*, pages 1–7, 2007.
- [97] Nicolas PAPADAKIS et Étienne MÉMIN : A variational technique for time consistent tracking of curves and motion. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 31(1) :81–103, 2008.
- [98] N. PAPPENBERG, A. BRUHN, T. BROX, S. DIDAS et J. WEICKERT : Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping. *Int. J. Comput. Vision*, 67(2) :141–158, 2006.
- [99] Sébastien PARIS, Julien PETTRÉ et Stéphane DONIKIAN : Pedestrian reactive navigation for crowd simulation : a predictive approach. *Computer Graphics Forum, Eurographics'07*, 2007.
- [100] Min PARK : Guiding flows for controlling crowds. *The Visual Computer*, 26 :1383–1391, 2010.
- [101] Sachin PATIL, Jur P. van den BERG, Sean CURTIS, Ming C. LIN et Dinesh MANOCHA : Directing crowd simulations using navigation fields. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, 17(2) :244–254, 2011.
- [102] N. PELECHANO, J. M. ALLBECK et N. I. BADLER : Controlling individual agents in high-density crowd simulation. *In Dimitris METAXAS et Jovan POPOVIC, éditeurs*

- : *Symposium on Computer Animation*, pages 99–108, San Diego, California, United States, 2007. Eurographics Association.
- [103] S. PELLEGRINI, A. ESS, K. SCHINDLER et L. van GOOL : You’ll never walk alone : Modeling social behavior for multi-target tracking. *In Computer Vision, 2009 IEEE 12th International Conference on*, pages 261–268, 29 2009-oct. 2 2009.
- [104] J. PETTRE, Jean-Paul LAUMOND et Daniel THALMANN : *A navigation graph for real-time crowd animation on multilayered and uneven terrain*, pages 81–90. Citeseer, 2005.
- [105] Julien PETTRÉ, Jan ONDŘEJ, Anne-Hélène OLIVIER, Armel CRETUAL et Stéphane DONIKIAN : Experiment-based modeling, simulation and validation of interactions between virtual walkers. *In Proceedings of the 2009 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA ’09*, pages 189–198, New York, NY, USA, 2009. ACM.
- [106] A. POLUS, J. SCHOFER et A. USHPIZ : Pedestrian flow and level of service. *Journal of Transportation Engineering*, 109(1) :45–56, 1983.
- [107] L. C. POLYMERAKOS, D. P. BERTSEKAS et J. N. TSITSIKLIS : Implementation of efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :278–283, 1998.
- [108] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE et E. MISHCHENKO : *The mathematical theory of optimal processes (International series of monographs in pure and applied mathematics)*. Interscience Publishers, 1962.
- [109] F. PORIKLI : Trajectory distance metric using hidden markov model based representation. *In IEEE European Conference on Computer Vision, PETS Workshop*, 2004.
- [110] P.B. QUANG, C. MUSSO et F. LE GLAND : An insight into the issue of dimensionality in particle filtering. *In Information Fusion (FUSION), 2010 13th Conference on*, pages 1–8, july 2010.
- [111] F. Z. QURESHI et D. TERZOPOULOS : Surveillance in virtual reality : System design and multi-camera control. *In CVPR*, pages 1–8, 2007.
- [112] Vincent RABAUD et Serge BELONGIE : Counting crowded moving objects. *In CVPR (1)*, pages 705–711, 2006.
- [113] Craig W. REYNOLDS : Flocks, herds and schools : A distributed behavioral model. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21 :25–34, August 1987.
- [114] Craig W. REYNOLDS : Steering behaviors for autonomous characters, mai 1999.
- [115] Céline ROBERT, Eric BLAYO et Jacques VERRON : Comparison of reduced-order, sequential and variational data assimilation methods in the tropical pacific ocean. *Ocean Dynamics*, 56 :624–633, 2006.
- [116] M. RODRIGUEZ, J. SIVIC, I. LAPTEV et J.-Y. AUDIBERT : Data-driven crowd analysis in videos. *In Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2011.
- [117] Mikel RODRIGUEZ, Saad ALI et Takeo KANADE : Tracking in unstructured crowded scenes. *In ICCV*, pages 1389–1396. IEEE, 2009.
- [118] P. RUHNAU, T. KOHLBERGER, C. SCHNOERR et H. NOBACH : Variational optical flow estimation for particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 38(1) :21–32, 2004.

- [119] P. RUHNAU et C. SCHNOERR : Optical Stokes Flow Estimation : An Imaging-Based Control Approach. *Exp.in Fluids*, 42(1) :61–78, 2007.
- [120] C. RUNGE : Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten. *Ztschr. für Math. u. Phys.*, 46 :224–243, 1901.
- [121] H. SAKAINO : Fluid Motion Estimation Method based on Physical Properties of Waves. In *Proceedings of the 21st IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR 08*, 2008.
- [122] J A SETHIAN : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4) :1591–1595, 1996.
- [123] J. A. SETHIAN : Fast marching methods. *SIAM Rev.*, 41 :199–235, June 1999.
- [124] Heung-Yeung SHUM et Richard SZELISKI : Construction of panoramic image mosaics with global and local alignment. *International Journal of Computer Vision*, 48 :151–152, 2002.
- [125] Leonid SIGAL, Alexandru BALAN et Michael BLACK : Humaneva : Synchronized video and motion capture dataset and baseline algorithm for evaluation of articulated human motion. *International Journal of Computer Vision*, 87 :4–27, 2010.
- [126] E.P. SIMONCELLI, E.H. ADELSON et D.J. HEEGER : Probability distributions of optical flow. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1991. Proceedings CVPR '91., IEEE Computer Society Conference on*, pages 310–315, jun 1991.
- [127] D. SUN, S. ROTH et M.J. BLACK : Secrets of optical flow estimation and their principles. In *Proc. 2010 IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 2432–2439, 2010.
- [128] D. SUN, E.B. SUDDERTH et M.J. BLACK : Layered Image Motion with Explicit Occlusions , Temporal Consistency , and Depth Ordering. *ReCALL*, pages 1–9, 2010.
- [129] D. SUTER : Motion Estimation and Vector Splines. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 939–942, Seattle, USA, 1994.
- [130] Daniel L. SWETS, Bill PUNCH, Daniel L. SWETS et Bill PUNCH : Genetic algorithms for object localization in a complex scene. In *In : IEEE International Conference on Image Processing*, pages 595–598, 1995.
- [131] Shigeo TAKAHASHI, Kenichi YOSHIDA, Taesoo KWON, Kang Hoon LEE, Jehee LEE et Sung Yong SHIN : Spectral-based group formation control. *Comput. Graph. Forum*, 28(2) :639–648, 2009.
- [132] Olivier TALAGRAND : Variational assimilation. adjoint equations. In R. SWINBANK, V.P. SHUTIAEV et W.A. LAHOZ, éditeurs : *Data assimilation for the earth system*, volume 26 de *NATO science series : Earth and environmental sciences*, pages 37–54. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [133] Olivier TALAGRAND et Philippe COURTIER : Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. i : Theory. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 113(478) :1311–1328, 1987.
- [134] G. R. TAYLOR, A. J. CHOSAK et P. C. BREWER : OVVV : Using virtual worlds to design and evaluate surveillance systems. In *VS*, pages 1–8, 2007.
- [135] Demetri TERZOPOULOS, Xiaoyuan TU et Radek GRZESZCZUK : Artificial fishes : Autonomous locomotion, perception, behavior, and learning in a simulated physical world. *Artificial Life*, 1(4) :327–351, 1994.

- [136] O. TETRIAK et L. PASTOR : Velocity estimation from image sequences with second order differential operators. *In Int. Conf. on Pattern Recognition*, Montreal, 1984.
- [137] Daniel THALMANN et Soraia Raupp MUSSE : *Crowd Simulation*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2007.
- [138] Olivier TITAUD, Arthur VIDARD, Innocent SOUOPGUI et François-Xavier LE DIMET : Assimilation of image sequences in numerical models. *Tellus A*, 62(1) :30–47, 2010.
- [139] Adrien TREUILLE, Seth COOPER et Zoran POPOVIĆ : Continuum crowds. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3) :1160–1168, juillet 2006.
- [140] Branislav ULICNY, Pablo De Heras CIECHOMSKI et Daniel THALMANN : Crowdbrush : interactive authoring of real-time crowd scenes. *In R BOULIC et D KEditors PAI, éditeurs : Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH Eurographics symposium on Computer animation*, pages 243–252. Eurographics Association, 2004.
- [141] Jur P. van den BERG, Ming C. LIN et Dinesh MANOCHA : Reciprocal velocity obstacles for real-time multi-agent navigation. *In ICRA*, pages 1928–1935. IEEE, 2008.
- [142] Sergio A. VELASTIN, Boghos A. BOGHOSSIAN et Maria Alicia VICENCIO-SILVA : A motion-based image processing system for detecting potentially dangerous situations in underground railway stations. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies*, 14(2) :96 – 113, 2006.
- [143] J. WEBER et J. MALIK : Robust Computation of Optical Flow in a Multi-Scale Differential Framework. *Int. J. Comput. Vis.*, 14(1), 1995.
- [144] A. WEDEL, T. POCK, J. BRAUN, U. FRANKE et D. CREMERS : Duality TV-L1 Flow with Fundamental Matrix Prior. *In Image Vision and Computing*, Auckland, New Zealand, 2008.
- [145] J. WEICKERT et C. SCHNÖRR : Variational optic-flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *J. Math. Imaging and Vision*, 14(3) :245–255, 2001.
- [146] W. Michael WHITTLE : *An Introduction to Gait Analysis*. Elsevier, 2007.
- [147] D. L. WILSON, A. J. BADDELEY et R. A. OWENS : A new metric for grey-scale image comparison. *Intern. J. Computer Vision*, 24 :5–17, 1997.
- [148] Bo WU et Ram NEVATIA : Detection of multiple, partially occluded humans in a single image by bayesian combination of edgelet part detectors. *In Proceedings of the Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1 - Volume 01*, pages 90–97, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society.
- [149] L. XU, J.N. CHEN et J.Y. JIA : A Segmentation Based Variational Model for Accurate Optical Flow Estimation. *In Eur. Conf. Comp. Vis.*, pages I : 671–684, 2008.
- [150] Tao YANG, Quan PAN, Jing LI et S.Z. LI : Real-time multiple objects tracking with occlusion handling in dynamic scenes. *In Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, volume 1, pages 970 – 975 vol. 1, june 2005.
- [151] WA. YASNOFF, W. GALBRAITH et J.W. BACUS : Error measures for objective assessment of scene segmentation algorithms. *Anal Quant Cytol.*, 5(107-121), 1979.
- [152] J. YUAN, C. SCHNOERR et E. MÉMIN : Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *Journ. of Mathematical Imaging and Vision*, 28(1) :67–80, 2007.

- [153] Beibei ZHAN, Dorothy MONEKOSSO, Paolo REMAGNINO, Sergio VELASTIN et Li-Qun XU : Crowd analysis : a survey. *Machine Vision and Applications*, 19 :345–357, 2008.
- [154] Fumin ZHANG : Geometric cooperative control of particle formations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(3) :800 –803, march 2010.
- [155] Tao ZHAO et Ramakant NEVATIA : Tracking multiple humans in crowded environment. *In CVPR (2)*, pages 406–413, 2004.
- [156] Georges Kingsley ZIPF : *Human behavior and the principle of least effort*. Addison-Wesley Press., 1949.

# A

## Critères de comparaison quantitative

Chaque technique d'analyse de foule est susceptible de générer des types de sortie divers, comme les trajectoires des individus, des cartes de segmentation de population, des champs de vitesses ou des quantités scalaires telles que la densité ou encore la pression. Cette annexe présente quelques techniques de mesure d'erreur qui peuvent être utilisées pour évaluer de façon objective les différentes approches d'analyse.

### A.1 Comparaisons basées sur la segmentation des individus par populations

Dans le cas où une approche donnée propose de segmenter les piétons dans une scène, plusieurs outils dédiés à la comparaison objective des cartes segmentées ont été définis dans [151]. Une direction possible à prendre pour la comparaison d'une carte de segmentation considérée comme vraie  $S_{ref}$  avec une estimation  $S$  est de s'appuyer sur le nombre de points, donc d'individus, incorrectement étiquetés. Par exemple, certains auteurs ont proposé deux critères d'intersection  $E_1$  et  $E_2$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(S_{ref}, S) = \frac{\text{card}(S_{ref} - S_{ref} \cap S)}{\text{card}(S_{ref})}, \\ E_2(S_{ref}, S) = \frac{\text{card}(S - S_{ref} \cap S)}{\text{card}(S)}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.1a)} \\ \text{(A.1b)} \end{array}$$

Ces critères normalisés peuvent correspondre respectivement au nombre de pixels non affectés à la présence humaine et au nombre de pixels indûment attribués à la foule étudiée. Une autre possibilité consiste à se baser sur la distance la plus courte séparant les résultats incorrects de l'objet de référence [147] procurant aussi une comparaison quantitative entre segmentations.

### A.2 Comparaison de vitesses

La vitesse de la foule, qu'elle soit décrite pour pour chaque individu de la foule ou issue d'un champs dense, peut être comparée selon plusieurs critères. La mesure d'erreur la plus commune est l'erreur angulaire définie dans [35] et rendue populaire depuis la revue d'état de l'art effectuée dans [9]. Cette erreur se définit pour une vitesse continue

dans le domaine  $\Omega$  comme :

$$ang(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{ref}) = \frac{1}{\int_{\Omega} d\mathbf{x}} \int_{\Omega} \arccos \left( \frac{\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_{ref}^h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{u}^h(\mathbf{x})\| \|\mathbf{u}_{ref}^h(\mathbf{x})\|} \right) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.2})$$

et pour une vitesse à valeur sur une grille  $\mathcal{C}$  définissant l'espace de l'image :

$$ang(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{ref}) = \frac{1}{\sum_{c_m} \Delta \mathbf{x}_{c_m}} \sum_{c_m \in \mathcal{C}} \arccos \left( \frac{\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_{c_m}) \cdot \mathbf{u}_{ref}^h(\mathbf{x}_{c_m})}{\|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_{c_m})\| \|\mathbf{u}_{ref}^h(\mathbf{x}_{c_m})\|} \right), \quad (\text{A.3})$$

où  $\mathbf{u}^h$  et  $\mathbf{u}_{ref}^h$  correspondent aux coordonnées homogènes du champ de vecteur définis respectivement par  $\mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta t \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{u}_{ref}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{ref} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta t \end{bmatrix}$  avec  $\Delta \mathbf{x}$  la taille de maille moyenne de la grille relatives aux tailles  $\Delta \mathbf{x}_{c_m}$ , et  $\Delta t$  l'intervalle de temps séparant deux images analysées. Il est à noter que dans la communauté d'analyse d'image, on considère  $\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = 1 \text{ pixel.image}^{-1}$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  étant de même unité.

Bien que ce critère ait été largement utilisé pour la comparaison de vitesses au cours des vingt dernières années, certaines limitations en ressortent. Par exemple, les erreurs dans les flux de grande échelle sont moins pénalisés que celles dans les flux de petite échelle. Pour cette raison, l'erreur *finale*, ou *endpoint error*, est utilisée en plus de l'erreur angulaire pour compléter l'évaluation de l'erreur. L'erreur finale est définie [92] comme :

$$ep(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{ref}) = \frac{1}{\sum_{c_m} \Delta \mathbf{x}_{c_m}} \sum_{c_m \in \mathcal{C}} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{c_m}) - \mathbf{u}_{ref}(\mathbf{x}_{c_m})\|, \quad (\text{A.4})$$

qui témoigne de la magnitude de la différence entre deux champs de vitesses.

### A.3 Comparaison de trajectoires

Les approches par suivi fournissent le plus souvent des trajectoires d'individus. La comparaison d'une trajectoire estimée  $\underline{y} = y(t)$  avec  $t \in \{t_0, t_1, \dots, t_T\}$  (introduit dans la section 2.1.1) avec une trajectoire de référence  $\underline{y}_{ref}$  peut être simplement accomplie par l'utilisation de la distance moyenne des points qui composent les trajectoires grâce à la norme  $L$  :

$$dist(\underline{y}, \underline{y}_{ref}) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^T \|y(t_n) - y_{ref}(t_n)\|_L, \quad (\text{A.5})$$

en supposant l'intervalle de temps  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  constant. Cette mesure est la plus simple possible. Cependant, d'autres statistiques comme la médiane, la variance, la distance minimale et maximale, ou d'autres encore peuvent aussi être menées. Il est aussi à noter que des méthodes d'indexation plus avancées existent, que l'on peut retrouver notamment dans [109].

# B

## Dérivation des opérateurs de graphes Lagrangiens - Eulériens

Dans cette annexe nous précisons certaines propriétés des opérateurs par graphe introduits en section 3.3. Nous nous penchons plus précisément sur la dérivation des opérateur de projection dans la description Eulérienne.

### B.1 Propriétés générales

Nous considérons ici une propriétés du graphe quelconque  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$  correspondant à un scalaire. Toutefois les généralités qui suivent s'appliquent aussi pour une propriété vectorielle. On rappelle que la relation existant entre la propriété Lagrangienne  $\mathbf{d}$ , et son évaluation Eulérienne  $\mathbf{d}_C \in \mathbb{R}^M$ , définie à l'équation 3.34, est :

$$\mathbf{d}_C = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{d}, \quad (\text{B.1})$$

et que son inverse, l'évaluation d'une propriété Eulérienne sur la description Lagrangienne, définie en équation 3.35, est :

$$\mathbf{d} = \mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathbf{d}_C. \quad (\text{B.2})$$

La diagonalisation de  $\mathbf{d}$  ou  $\mathbf{d}_C$  entraîne en général une opération de multiplication terme à terme des éléments de la propriété définis sur leur description respective. On rappelle que l'opérateur de diagonalisation  $\underline{\cdot}$  est introduit en début de section 3.3, et est tel que  $\underline{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $\underline{\mathbf{d}_C} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ . Par exemple, si nous disposons de deux cartes Eulériennes  $\mathbf{d}_C$  et  $\mathbf{b}_C$ , définies sur une même grille  $\mathcal{C}$ , la multiplication de ces deux cartes donnant la carte  $\mathbf{c}_C$  s'écrit :

$$\mathbf{c}_C = \underline{\mathbf{d}_C} \mathbf{b}_C. \quad (\text{B.3})$$

On note aussi que :

$$\underline{\mathbf{d}_C} = \underline{\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{d}} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \underline{\mathcal{A}_{w^y} \mathbf{d}}, \quad (\text{B.4})$$

puisque  $\mathcal{D}_{w^y}$  est une matrice diagonale.

On rappelle aussi l'existence de l'opérateur de déviation défini à l'équation 5.33, et tel que :

$$\mathcal{S}_{w^f, \mathbf{d}} = \mathcal{A}_{w^f} \underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}_C} \mathcal{A}_{w^f}, \quad (\text{B.5})$$

pour lequel le poids  $w$  peut être remplacé par ses dérivées premières  $w'$  ou seconde  $w''$  selon l'ordre de la déviation considérée.

	$\in$		$\in$
$\mathbf{d}$	$\mathbb{R}^N$	$\underline{\mathbf{d}}$	$\mathbb{R}^{N \times N}$
$\mathbf{d}_C$	$\mathbb{R}^M$	$\underline{\mathbf{d}}_C$	$\mathbb{R}^{M \times M}$
		$\mathcal{A}_{w^f}$	$\mathbb{R}^{M \times N}$
		$\mathcal{D}_{w^f}$	$\mathbb{R}^{M \times M}$
$\mathcal{A}_{w^f} \mathbf{d}$	$\mathbb{R}^M$		
$\mathcal{D}_{w^f} \mathbf{d}_C$	$\mathbb{R}^M$		
		$\mathcal{D}_{w^f}^{-1} \mathcal{S}_{w^f, \mathbf{d}}$	$\mathbb{R}^{M \times N}$

TABLE B.1 – Récapitulatif de l'espace d'appartenance des diverses notations de transitions Eulériennes Lagrangiennes par graphes.

Certains calculs de dérivation d'opérateurs de graphe sont résumés dans le tableau B.2. Nous précisons l'écriture de la linéarisation pour deux exemples :

$$(\mathcal{A}_{w'^y} \underline{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{y} = (\mathcal{A}_{w'^y} \underline{\delta \mathbf{y}}) \mathbf{d} = \left[ \sum_j (w'^y_{mj} \delta y_j) d_j \right] \quad (\text{B.6})$$

$$(\mathcal{A}_{w''y} \underline{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{y} = (\mathcal{A}_{w''y} \underline{\delta \mathbf{y}}) \mathbf{d} = \left[ \sum_j (w''y_{mj} \delta y_j) d_j \right] \quad (\text{B.7})$$

Propriété Eulérienne	Dérivation par la propriété de poids	Linéarisation par la propriété de poids
$\cdot \in \mathbb{R}^M$	$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$	$\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{f}} \delta \mathbf{f} \in \mathbb{R}^M$
$\mathcal{A}_{w^f} \mathbf{d}$ $\mathcal{D}_{w^f} \mathbf{d}_C$	$\mathcal{A}_{w'^f} \underline{\mathbf{d}}$ $\underline{\mathbf{d}}_C \mathcal{A}_{w'^f}$	$(\mathcal{A}_{w'^f} \underline{\delta \mathbf{f}}) \mathbf{d}$ $\underline{\mathbf{d}}_C \mathcal{A}_{w'^f} \delta \mathbf{f}$
$\mathcal{D}_{w^f}^{-1} \mathbf{d}_C$ $\underbrace{\mathcal{D}_{w^f}^{-1} \mathcal{A}_{w^f} \mathbf{d}}_{\mathbf{d}_C}$	$-\mathcal{D}_{w^f}^{-2} \underline{\mathbf{d}}_C \mathcal{A}_{w'^f}$ $\mathcal{D}_{w^f}^{-1} (\mathcal{A}_{w'^f} \underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}_C \mathcal{A}_{w'^f})$	$-\mathcal{D}_{w^f}^{-2} \underline{\mathbf{d}}_C \mathcal{A}_{w'^f} \delta \mathbf{f}$ $\mathcal{D}_{w^f}^{-1} (\mathcal{A}_{w'^f} \underline{\delta \mathbf{f}} \mathbf{d} - \underline{\mathbf{d}}_C \mathcal{A}_{w'^f} \delta \mathbf{f})$
	Gradient	
$\cdot$	$\underline{\nabla} \cdot$	
$\mathcal{A}_{w^f} \mathbf{d}$ $\mathcal{D}_{w^f} \mathbf{d}_C$	$-\mathcal{A}_{w'^f} \mathbf{d}$ $-\mathcal{D}_{w'^f} \mathbf{d}_C$	

TABLE B.2 – Dérivations principales des propriétés Eulériennes. La propriété Lagrangienne  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  servant au poids  $w \in \mathbb{W}$  est ici considérée pour une présentation généraliste.

## B.2 Dérivation d'opérateurs Eulériens de haut niveau

Les calculs permettant d'arriver à l'expression des dérivées d'opérateurs de haut niveau tels que la divergence ou la vorticité sont ici détaillés. Nous étudions la dérivation de ces opérateurs par l'état  $\mathbf{X}$  que nous considérons composé de la position  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{dN}$  et de la vitesse  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{dN}$ , tel que :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Nous considérons que la fonction poids  $w$  appartient à  $\mathbb{R}$ , de tel sorte qu'on ait :  $w'^{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^d$  et  $w''^{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

### B.2.1 Divergence

Nous détaillons ici comment obtenir l'expression de la dérivation de la divergence Eulérienne  $\xi_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^M$  par l' tat Lagrangien, c'est à dire :  $\partial_{\mathbf{X}} \xi_{\mathcal{C}}$ .

#### B.2.1.1 Expression de la divergence

Començons par exprimer la divergence :

$$\xi_{\mathcal{C}} = \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{C}}, \quad (\text{B.9})$$

ce qui donne :

$$\xi_{\mathcal{C}} = \nabla (D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} \mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \mathbf{u}). \quad (\text{B.10})$$

En développant cette expression nous obtenons :

$$\xi_{\mathcal{C}} = D_{w^{\mathbf{y}}}^{-2} D_{w'^{\mathbf{y}}} \mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \mathbf{u} - D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} \mathcal{A}_{w'^{\mathbf{y}}} \mathbf{u}, \quad (\text{B.11})$$

puis :

$$\xi_{\mathcal{C}} = D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} \underbrace{(D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} D_{w'^{\mathbf{y}}} \mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} - \mathcal{A}_{w'^{\mathbf{y}}})}_{F_{w^{\mathbf{y}}}} \mathbf{u}. \quad (\text{B.12})$$

#### B.2.1.2 Dérivation par la propriété de position Lagrangienne

Nous détaillons ici comment obtenir l'expression de  $\partial_{\mathbf{y}} \xi_{\mathcal{C}}$ . En partant de l'équation B.12, nous avons :

$$\frac{\partial \xi_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{y}} = -D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} \xi_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w'^{\mathbf{y}}} + D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} \frac{\partial F_{w^{\mathbf{y}}} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{w^{\mathbf{y}}} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} &= -\mathcal{A}_{w''^{\mathbf{y}}} \mathbf{u} \\ &+ \frac{\partial D_{w^{\mathbf{y}}}^{-1} D_{w'^{\mathbf{y}}} \mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} &= -\mathcal{D}_{w^y}^{-2} (\mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}) \mathcal{A}_{w^y} \\ &\quad + \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \frac{\partial \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Détails :

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}_{w^y}^{-2} (\mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}) \mathcal{A}_{w^y} &= -\mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{D}_{w^y} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}) \mathcal{A}_{w^y} \\ &= -\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{D}_{w^y} \underline{\mathbf{u}} \mathcal{C} \mathcal{A}_{w^y} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \frac{\partial \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} &= \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{A}_{w^y} \underline{\mathbf{u}} \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \underline{\mathbf{u}}) \\ &= \underline{\mathbf{u}} \mathcal{C} \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} \underline{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Finalement, en utilisant les développements des équations B.13, B.14, B.15, B.16 et B.17, nous obtenons l'expression de la dérivation de la divergence Eulérienne par rapport aux positions Lagrangiennes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\xi}_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{y}} &= -\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \underline{\xi}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w^y} \\ &\quad - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{A}_{w^y} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}} \mathcal{C} \mathcal{A}_{w^y}) \\ &\quad + \mathcal{D}_{w^y}^{-2} \mathcal{D}_{w^y} (\mathcal{A}_{w^y} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}} \mathcal{C} \mathcal{A}_{w^y}), \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

autrement dit :

$$\frac{\partial \underline{\xi}_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{y}} = -\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \underline{\xi}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-2} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}} \quad (\text{B.19})$$

conformément à l'équation 5.35.

### B.2.1.3 Linéarisé adjoint en position

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \underline{\xi}_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{y}} \right)^T &= -\mathcal{A}_{w^y}^T \underline{\xi}_{\mathcal{C}} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \\ &\quad - (\underline{\mathbf{u}} \mathcal{A}_{w^y}^T - \mathcal{A}_{w^y}^T \underline{\mathbf{u}} \mathcal{C}) \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \\ &\quad + (\underline{\mathbf{u}} \mathcal{A}_{w^y}^T - \mathcal{A}_{w^y}^T \underline{\mathbf{u}} \mathcal{C}) \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{D}_{w^y}^{-2} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \underline{\xi}_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{y}} = -\mathcal{A}_{w^y}^T \underline{\xi}_{\mathcal{C}} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} + \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}}^T \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{D}_{w^y}^{-2} - \mathcal{S}_{w^y, \mathbf{u}}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \quad (\text{B.21})$$

### B.2.1.4 Dérivation par la propriété de vitesse Lagrangienne

La dérivation par  $\mathbf{u}$  s'écrit immédiatement en utilisant l'équation B.12 :

$$\frac{\partial \underline{\xi}_{\mathcal{C}}}{\partial \mathbf{u}} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} (\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{A}_{w^y} - \mathcal{A}_{w^y}). \quad (\text{B.22})$$

Le linéarisé adjoint en vitesse de la divergence Eulérienne est donc :

$$\left(\frac{\partial \xi_C}{\partial \mathbf{u}}\right)^T = (\mathcal{A}_{w^y}^T \mathcal{D}_{w^y} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} - \mathcal{A}_{w^y}^T) \mathcal{D}_{w^y}^{-1}. \quad (\text{B.23})$$

### B.2.2 Vorticité

Nous détaillons ici comment obtenir l'expression de la dérivation de la vorticité Eulérienne  $\zeta_C \in \mathbb{R}^{dM}$  par l'état Lagrangien, c'est à dire :  $\partial_{\mathbf{x}} \zeta_C$ .

Avant cela, certaines propriétés concernant le produit vectoriel vis a vis des opérateurs matriciels de graphes sont présentées.

On définit d'abord l'opérateur de produit vectoriel  $[\cdot \times]$ , de sorte qu'en considérant une matrice  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  on ait :

$$[\mathbf{M} \times] = [\mathbf{M}_{mj} \times] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11 \times} & \dots & \mathbf{M}_{1j \times} & \dots & \mathbf{M}_{1N \times} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}_{m1 \times} & \dots & \mathbf{M}_{mj \times} & \dots & \mathbf{M}_{mN \times} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}_{M1 \times} & \dots & \mathbf{M}_{Mj \times} & \dots & \mathbf{M}_{MN \times} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Le produit vectoriel étant antisymétrique, on a aussi :

$$[\mathbf{M} \times]^T = -[\mathbf{M}^T \times]. \quad (\text{B.25})$$

Nous avons pu voir en tableau B.2 que la dérivation des opérateurs de graphes peut engendrer une permutation sur la propriété opérée. Cette permutation entraîne un changement de signe dans le cas du produit vectoriel. On a donc, par exemple :

$$\frac{\partial [\mathcal{D}_{w^y} \times] \mathbf{u}_C}{\partial \mathbf{y}} = -[\mathbf{u}_C \times] \mathcal{A}_{w^y}. \quad (\text{B.26})$$

If  $\nabla \times d_j = 0$ , for instance if  $\mathbf{d} = \mathbf{u}$ , meaning  $\mathbf{u}$  doesn't depend on  $\mathbf{x}$ , we have :

$$[\underline{\nabla} \times] \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{d} = -[\mathcal{A}_{w^y} \times] \mathbf{d} \quad (\text{B.27})$$

#### B.2.2.1 Expression de la vorticité

La vorticité Eulérienne en vitesse s'écrit :

$$\zeta_C = [\underline{\nabla} \times] \mathbf{u}_C, \quad (\text{B.28})$$

qui donne :

$$\zeta_C = [\underline{\nabla} \times] (\mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}). \quad (\text{B.29})$$

En développant nous obtenons :

$$\zeta_C = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} [\underline{\nabla} \times] (\mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}) + [\underline{\nabla} \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \times] (\mathcal{A}_{w^y} \mathbf{u}), \quad (\text{B.30})$$

puis finalement :

$$\zeta_C = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \underbrace{([\underline{\nabla} \times] \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-1} [\mathcal{D}_{w^y} \times] \mathcal{A}_{w^y})}_{R_{w^y}} \mathbf{u}. \quad (\text{B.31})$$

### B.2.2.2 Dérivation par la propriété de position Lagrangienne

Nous détaillons ici comment obtenir l'expression de  $\partial_{\mathbf{y}}\zeta_{\mathcal{C}}$ . En partant de l'équation B.31, nous avons :

$$\frac{\partial\zeta_{\mathcal{C}}}{\partial\mathbf{y}} = -\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}\zeta_{\mathcal{C}}\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} + \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}\frac{\partial R_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}} &= [\underline{\nabla}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u} \\ &+ \frac{\partial\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}[\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}[\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}} &= -\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-2}([\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u})\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \\ &+ \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}\frac{\partial[\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Détails :

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-2}([\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u})\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} &= -\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}([\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u})\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \\ &= -\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}([\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\underline{\mathbf{u}}_{\mathcal{C}})\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}\frac{\partial[\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}}{\partial\mathbf{y}} &= \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}(\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}[\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\times] + [\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}) \\ &= -[\underline{\mathbf{u}}_{\mathcal{C}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} + \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}[\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Finalement, en utilisant les développements des équations B.32, B.33, B.34, B.35, B.36, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta_{\mathcal{C}}}{\partial\mathbf{y}} &= -\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}\zeta_{\mathcal{C}}\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}} \\ &- \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-1}(-[\underline{\nabla}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u} + [\underline{\mathbf{u}}_{\mathcal{C}}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}) \\ &+ \mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}^{-2}[\mathcal{D}_{w^{\mathbf{y}}}\times](\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u} - \underline{\mathbf{u}}_{\mathcal{C}}\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}) \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Penchons nous sur le terme  $[\underline{\nabla}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u}$ . On écrit ainsi l'expression de sa linéarisation :

$$\begin{aligned} ([\underline{\nabla}\times]\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\mathbf{u})\delta\mathbf{y} &= \left[ \nabla \times \sum_j (w_{mj}^{\mathbf{y}} \delta y_j) u_j \right] \\ &= \left[ \sum_j \nabla \times (w_{mj}^{\mathbf{y}} \delta y_j) u_j \right] \\ &= \left[ \sum_j (w_{mj}^{\mathbf{y}} \delta y_j) \underbrace{\nabla \times u_j}_{=0} + \nabla (w_{mj}^{\mathbf{y}} \delta y_j) \times u_j \right] \\ &= \left[ \sum_j -(w_{mj}^{\mathbf{y}} \delta y_j) \times u_j \right] \\ &= (-[\mathcal{A}_{w^{\mathbf{y}}}\times]\mathbf{u})\delta\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Par conséquent nous pouvons écrire que :

$$[\underline{\nabla} \times] \mathcal{A}_{w'^y} \underline{\mathbf{u}} = - [\mathcal{A}_{w''f} \times] \underline{\mathbf{u}}. \quad (\text{B.39})$$

Remis dans le contexte de l'équation B.37, nous pouvons ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\zeta}_c}{\partial \mathbf{y}} &= - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \underline{\zeta}_c \mathcal{A}_{w'^y} \\ &\quad - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} ([\mathcal{A}_{w''y} \times] \underline{\mathbf{u}} + [\underline{\mathbf{u}}_c \times] \mathcal{A}_{w'^y}) \cdot \\ &\quad + \mathcal{D}_{w^y}^{-2} [\mathcal{D}_{w'^y} \times] (\mathcal{A}_{w'^y} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_c \mathcal{A}_{w'^y}) \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \underline{\zeta}_c}{\partial \mathbf{y}} = - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \underline{\zeta}_c \mathcal{A}_{w'^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-2} [\mathcal{D}_{w'^y} \times] \mathcal{S}_{w'^y, \underline{\mathbf{u}}} - \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \mathcal{S}_{w''y \times \underline{\mathbf{u}}} \quad (\text{B.41})$$

Conformément à l'équation 5.37, et avec :

$$\mathcal{S}_{w''y \times \underline{\mathbf{u}}} = [\mathcal{A}_{w''f} \times] \underline{\mathbf{u}} + [\underline{\mathbf{u}}_c \times] \mathcal{A}_{w''y}, \quad (\text{B.42})$$

Notons un cas particulier relatif à un espace en deux dimension. Dans l'équation B.41, le terme  $\mathcal{D}_{w^y}^{-2} [\mathcal{D}_{w'^y} \times] \mathcal{S}_{w'^y, \underline{\mathbf{u}}}$  est alors nul puisque le produit vectoriel de  $w'^y$  par  $\underline{\mathbf{u}}$  fera toujours zéro. La vitesse se trouve en effet dans le même plan que le vecteur dérivé.

### B.2.2.3 Linéarisé adjoint en position

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \underline{\zeta}_c}{\partial \mathbf{y}} \right)^T &= - \mathcal{A}_{w'^y}^T \underline{\zeta}_c \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \\ &\quad + (\underline{\mathbf{u}} [\mathcal{A}_{w''y}^T \times] + \mathcal{A}_{w''y}^T [\underline{\mathbf{u}}_c \times]) \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \\ &\quad - (\underline{\mathbf{u}} \mathcal{A}_{w'^y}^T - \mathcal{A}_{w'^y}^T \underline{\mathbf{u}}_c) [\mathcal{D}_{w'^y} \times] \mathcal{D}_{w^y}^{-2} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

$$\left( \frac{\partial \underline{\zeta}_c}{\partial \mathbf{y}} \right)^T = - \mathcal{A}_{w'^y}^T \underline{\zeta}_c \mathcal{D}_{w^y}^{-1} - [\mathcal{S}_{w'^y, \underline{\mathbf{u}}}^T \times] \mathcal{D}_{w'^y} \mathcal{D}_{w^y}^{-2} + \mathcal{S}_{w''y \times \underline{\mathbf{u}}}^T \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \quad (\text{B.44})$$

### B.2.2.4 Dérivation par la propriété de vitesse Lagrangienne

La dérivation par  $\underline{\mathbf{u}}$  s'écrit immédiatement en utilisant l'équation B.31 :

$$\frac{\partial \underline{\zeta}_c}{\partial \underline{\mathbf{u}}} = \mathcal{D}_{w^y}^{-1} ([\underline{\nabla} \times] \mathcal{A}_{w^y} + \mathcal{D}_{w^y}^{-1} [\mathcal{D}_{w'^y} \times] \mathcal{A}_{w^y}) \quad (\text{B.45})$$

Le linéarisé adjoint en vitesse de la vorticité Eulérienne est donc :

$$\left( \frac{\partial \underline{\zeta}_c}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)^T = (\mathcal{A}_{w^y}^T [\underline{\nabla} \times] - \mathcal{A}_{w^y}^T [\mathcal{D}_{w'^y} \times] \mathcal{D}_{w^y}^{-1}) \mathcal{D}_{w^y}^{-1} \quad (\text{B.46})$$



# C

## Influence du frottement sur la problématique d’emmêlement

Dans cette annexe nous illustrons l’impact du frottement entre particules Lagrangiennes, ou individus, lorsqu’elles entrent en collision. La figure C.1 présente ainsi les résultats d’une simulation et d’un contrôle qui, à l’exception de la composante de frottement, sont en tout point identiques aux résultats présentés en figure 5.21. L’absence de frottement permet après contrôle aux particules de passer très près l’une de l’autre sans limitation de vitesse. Si ici les observations n’imposent pas de corrélation entre elles, il peut arriver que d’autres observations se basant sur la relation entre particules ne puissent être satisfaites à cause de la problématique d’emmêlement. Pis, cette problématique peut même éloigner l’état de l’observation. Le contrôle dépense alors sans cesse de l’énergie dans les variables d’ajustement sans que les forces de frottement viennent limiter l’énergie cinétique du système donnant ainsi lieu à des trajectoires d’état ne convergeant pas vers une solution stable.

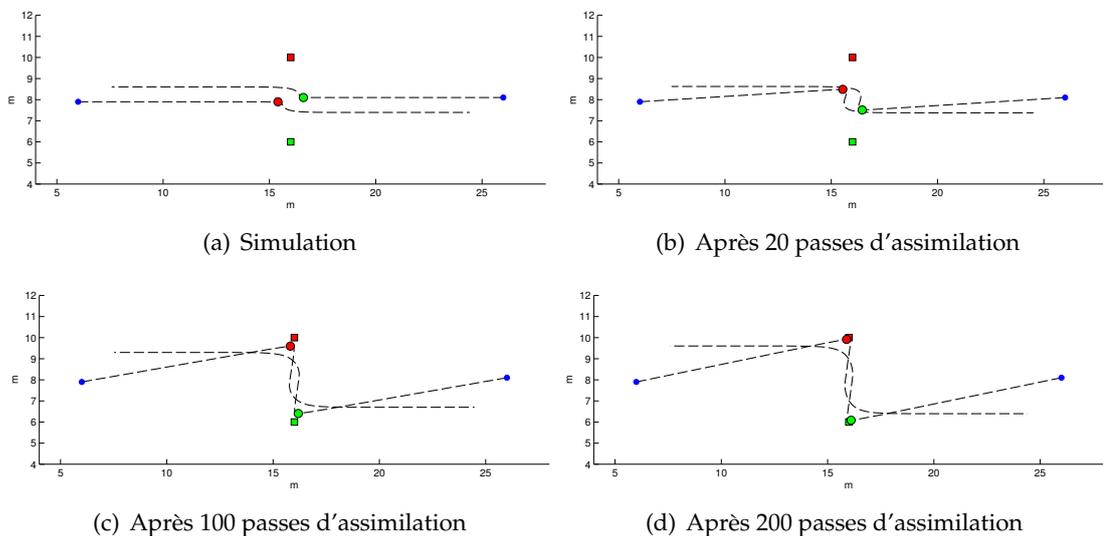


FIGURE C.1 – Assimilation incrémentale par observation en position et modélisation sans frottement mécanique. L’observation est à  $t_{obs} = 10$  s.



# D

## Résolution par intégration Runge-Kutta

Nous avons pu voir dans la section 5.2.3.7 que la collision entre individus provoque une dynamique linéaire très différente de celle existant en temps normal. Dans certains cas il est alors nécessaire d'itérer prudemment le processus d'assimilation.

La résolution du système optimal par assimilation incrémentale se comporte en réalité comme l'intégration dans le temps itératif  $t_{it}$  d'un modèle (le processus incrémental) dirigeant l'évolution de la trajectoire d'état  $\underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{NN_t}$  (pour rappel  $N_t$  est le nombre de mailles temporelles  $\Delta t$  de la séquence). Il est ainsi possible de procéder à une intégration inspirée de la méthode de Runge-Kutta [120] pour l'intégration cette fois-ci temporelle. On considère le processus d'assimilation incrémentale  $\text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(t_{it}, \underline{\mathbf{X}})$  tel que :

$$\partial_{t_{it}} \underline{\mathbf{X}} = \text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(t_{it}, \underline{\mathbf{X}}), \quad (\text{D.1})$$

où  $t_{it}$  représente le temps itératif de l'assimilation, et  $\text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(t_{it}, \underline{\mathbf{X}})$  représente la vitesse d'évolution  $\underline{V}_{it}^k$  de la trajectoire  $\underline{\mathbf{X}}$  selon  $t_{it}$ . L'intégration de cette équation se fait dans la partie précédente, et plus précisément à l'algorithme 3, par la méthode d'Euler :

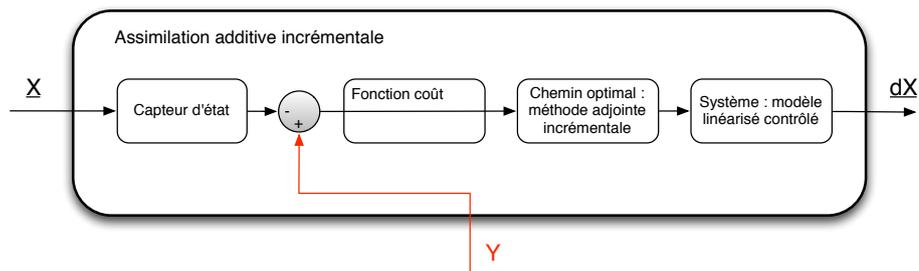
$$\underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \underline{\mathbf{X}}^k + h \underbrace{\text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(t_{it}^k, \underline{\mathbf{X}}^k)}_{\underline{d\mathbf{X}}^k}, \quad (\text{D.2})$$

où la matrice diagonale  $h = I_{NN_t} \in \mathbb{R}^{NN_t \times NN_t}$  est le pas d'intégration de l'assimilation incrémentale alors unitaire. En réalité cependant,  $\text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}$  est indépendant de  $t_{it}$  puisque ce temps est purement virtuel. Aucune variable du système d'optimalité ne dépend en effet de l'« instant » itératif. L'intégration du système optimal par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 se traduit, pour toute  $k$ -ème trajectoire évaluée, par le système :

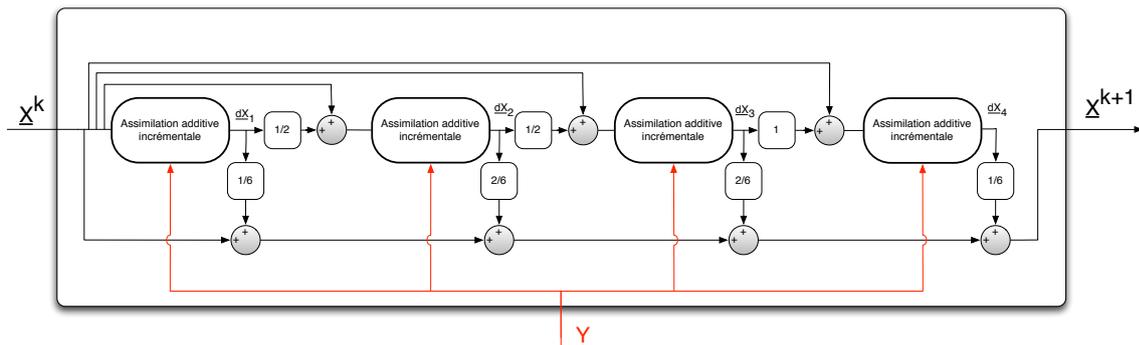
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{V}_{it,1}^k = \text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(\underline{\mathbf{X}}^k), \\ \underline{V}_{it,2}^k = \text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(\underline{\mathbf{X}}^k + \frac{h}{2}\underline{V}_{it,1}^k), \\ \underline{V}_{it,3}^k = \text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(\underline{\mathbf{X}}^k + \frac{h}{2}\underline{V}_{it,2}^k), \\ \underline{V}_{it,4}^k = \text{Assi}_{\mathbf{Y},\mathbb{M}}(\underline{\mathbf{X}}^k + h\underline{V}_{it,3}^k), \\ \underline{d\mathbf{X}}^k = h \left( \frac{1}{6}\underline{V}_{it,1}^k + \frac{2}{6}\underline{V}_{it,2}^k + \frac{2}{6}\underline{V}_{it,3}^k + \frac{1}{6}\underline{V}_{it,4}^k \right), \\ \underline{\mathbf{X}}^{k+1} = \underline{\mathbf{X}}^k + \underline{d\mathbf{X}}^k. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{D.3a}) \\ (\text{D.3b}) \\ (\text{D.3c}) \\ (\text{D.3d}) \\ (\text{D.3e}) \\ (\text{D.3f}) \end{array}$$

L'utilisation de cette méthode d'intégration peut se révéler intéressante dans le cas de modèles à fort gradient de diffusion, puisqu'elle permet une meilleure prise en compte de la variation de cette dernière par anticipation dans l'axe  $t_{it}$ . Cette méthode a à l'occasion été utilisée pour certains cas tests ou des modèles linéarisés présentant de fortes discontinuités spatiales (par exemple des collisions d'individus qui d'une itération à l'autre génèrent une dynamique très différente).

La schématisation de la résolution du problème d'optimalité par assimilation variationnelle additive et incrémentale est proposée en figure D.1.



(a) Bloc d'assimilation additive incrémentale



(b) Intégration Runge-Kutta d'ordre 4 du bloc D.1(a) ci-dessus. Ici, le pas d'intégration est tel que  $h = 1$ .

FIGURE D.1 – Schéma de la procédure d'assimilation par utilisation de la méthode d'intégration Runge-Kutta d'ordre 4. L'assimilation incrémentale est utilisée comme l'expression de la vitesse d'évolution de la trajectoire  $\underline{X}$  au cours du temps itératif  $t_{it}$ .

# E

## Lexique

Quelques définitions mathématiques utilisées dans ce document sont ici présentées. Elles sont isolées dans cette annexe afin de faciliter la lecture de ce dernier.

### E.1 Norme

La norme  $\|\mathbf{x}\|_S$  d'un vecteur quelconque  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  est la norme induite du produit scalaire  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_S$  défini en section E.2 avec  $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Dans le cas où  $S$  est omis de l'expression, la norme euclidienne  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{I_N}$  est utilisée, où  $I_N$  est la matrice identité de rang  $N$ .

### E.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de vecteurs quelconques  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  écrit  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_S$  correspond à la relation :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_S = \mathbf{x}^T S \mathbf{y}, \quad (\text{E.1})$$

avec  $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

### E.3 Adjoint

L'adjoint  $(\cdot)^*$  d'un opérateur  $S \in \mathbb{R}^{M \times N}$  est défini tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M : \langle S \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (S)^* \mathbf{y} \rangle. \quad (\text{E.2})$$

Il correspond à la transposée de l'opérateur, c'est-à-dire :  $(S)^* = S^T$ .





## Résumé

## Abstract

Depuis deux décennies, la compréhension des phénomènes de foules suscite un intérêt grandissant dans les domaines de la réalité virtuelle et de la vision par ordinateur en raison, entre autres, de l'accroissement démographique mondial et de l'urbanisation, mais aussi de la demande en réalisme dans l'industrie de l'infographie. Les mécanismes régissant la navigation d'individus ainsi que leurs interactions sont à l'heure actuelle encore mal compris, et sont le plus souvent modélisés par des lois empiriques inspirées de l'observation qualitative du phénomène de la foule. Il est généralement admis qu'un grand nombre de facteurs (psychologiques, culturels, ou mécaniques) modifient le comportement des piétons. En opposition à cette visée qualitative, les méthodes dites "basées données" permettent un apprentissage quantitatif des propriétés d'un phénomène. A partir de vidéos de foules humaines et de modèles régissant leur évolution, on peut chercher à enrichir la simulation comportementale par une calibration optimale des modèles utilisés. Ces méthodes s'appuient sur l'estimation de variables d'état d'un sujet représenté mathématiquement ou de paramètres de modélisation. La précision de l'estimation dépend beaucoup de la méthode de résolution employée et parfois aussi d'un *a priori* porté sur le phénomène de foule et son évolution.

Dans cette thèse, nous proposons une approche basée donnée originale pour analyser, simuler et contrôler des mouvements de foules à partir de vidéos. Pour cela, nous exploitons le formalisme du contrôle optimal et en particulier de l'assimilation variationnelle de données. Dans le contexte des foules, l'acquisition d'informations à partir de séquences d'images constitue une opération délicate. Dans le cas de vidéos de foules denses, l'information portée par les images est bien souvent insuffisante pour clairement distinguer les piétons et autoriser un suivi individuel de leur position. En exploitant des modèles dynamiques sur l'évolution des foules, combinés par assimilation au mouvement apparent entre les images, il est montré dans cette thèse qu'il est cependant possible d'extraire une information de haut niveau sur la foule. L'énergie de cette information reste cependant cantonnée à une description Eulérienne sensiblement différente de la description implicitement Lagrangienne, de bas niveau, et adaptée à des objets ponctuels en mouvement que sont les individus. Dans ce document, nous proposons une écriture originale unifiant ces représentations qui s'appuie sur des graphes. Cette flexibilité dans la transcription Eulérienne/Lagrangienne autorise l'application des méthodes variationnelles pour analyser directement l'évolution de piétons à partir de données et de modèles continus. Dans l'optique de confronter objectivement les méthodes d'analyse de foules développées et existantes, une base de données est proposée, incluant un ensemble de scènes caractéristiques synthétiques, et les vérités terrain associées. Leur utilisation est censée permettre l'évaluation des méthodes d'analyse et des heuristiques les accompagnant comme la modélisation. Finalement, le contrôle de flots de foule, sous contrainte de données externes (créées artificiellement par un animateur ou observées depuis des séquences vidéo) est étudié. Les résultats obtenus montrent clairement l'apport de ce type de méthodes sur des simulations standards et ouvrent de nouvelles perspectives sur les processus de création de mouvements de foules ainsi que plus largement sur l'analyse de flux de particules dans des séquences vidéo. Les limites de la méthodologie retenue sont aussi discutées au travers d'exemples jouets.

In the communities of computer graphics and vision the study of crowds phenomena has raised an increasing interest over the past years. The main reasons stem from a continuous increase in the world population and the associated problems, but also from a search of a good visual realism in computer games or computer-generated images for the movies industry. Yet, most of the navigation mechanisms or collision avoidance strategies among pedestrians are not fully understood, resulting in empirical models inspired by qualitative observations. Complete pedestrians models are though difficult to achieve because they should include several aspects (psychologic, cultural, mechanic) that operate at different levels. On the contrary, data-driven methods oppose to this qualitative methods by giving ways to describe quantitatively those phenomena. From crowd videos, it should be possible to enrich the behavioral simulation models through parameterization or calibration. Those methods are based on the estimation of state variables describing the crowd. The quality of this estimation depends both on the resolution methods and an a priori knowledge of the phenomenon (i.e. a model).

In this thesis, an original approach is proposed to analyze and simulate crowd motions from videos, which exploits the optimal control formalism, and more specifically the variational assimilation principles. However, in the crowd context, acquiring information from videos is not an easy task. In the case of dense crowds, the pixel information does not always allow to distinguish among pedestrians and track individuals in the flow. By exploiting some existing physical models describing the dynamics of a crowd flow, and combining this information to the perceived motion in the image, it is shown in this thesis how to extract a high level information on the flow related to a disturbance potential. The information conveyed in this process is by essence Eulerian, and opposes to the Lagrangian nature of pedestrians. To overcome this plurality of representation, a new powerful graph-based representation is introduced. It allows notably to handle those two representations of the flow in a unified framework, and to conduct every derivation imposed by the assimilation process. The estimation methods are then evaluated against a new synthetic crowd dataset. Finally, the control of individuals driven by a dynamical method and under external constraints (designed by an animator or acquired from videos) is studied and discussed. While the results clearly show the power of the optimal control strategies to cope with this problem, some examples showing the limit of gradient based approaches are also presented and discussed.