Université de Rennes 1
ESIR 2 - TSI
Olivier Le Meur (olemeur@irisa.fr)

Transformée de Fourier 1D/2D et échantillonnage

Exercice 1: Transformée de Fourier 1D

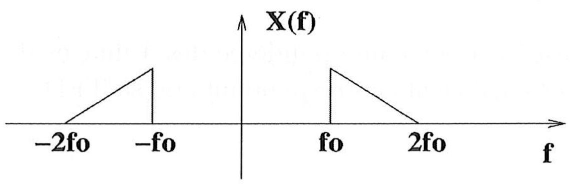
On étudie le signal suivant:

$$x(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) & 0 \leq |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Dessiner x(t).
2. Calculer la TF de x(t), notée $X(w)$. Différentes méthodes peuvent être utilisées:
   - Calcul direct;
   - Calcul utilisant la propriété de différentiation ($\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] = jwX(w)$) ou la propriété ($\mathcal{F}\left[x(t) * x(t)\right] = X^2(w)$).
3. En déduire et dessiner le spectre d'amplitude $|X(w)|$ et le spectre de phase $\arg X(w)$.

Exercice 2: TF 1D et échantillonnage

Un signal 1D continu $x(t)$ a pour transformée de Fourier continue la fonction $X(f)$ représentée sur la figure.



1. On échantillonne $x(t)$ à la fréquence minimale f_e qui respecte le théorème de l'échantillonnage (fréquence de Shannon). Quelle est cette fréquence ?
2. On obtient le signal échantillonné $\tilde{x}_n = x(n\,T_e)$ où $T_e = 1/f_e$ est le pas d'échatilonnage. Représenter graphiquement $\tilde{X}_1(f)$, transformée de Fourier de $\tilde{x}(t)$.
3. Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $\tilde{X}_1(f)$?
4. Tracer $\tilde{X}_2(f)$ obtenue en échantillonnant $x(t)$ à la fréquence $f_e = 2f_o$.
   Cette fréquence vérifie-t-elle le théorème de Shannon ?
5. Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $\tilde{X}_2(f)$?

Exercice 3: TFD 2D

Soit $f(k,l)$ une image de taille $N \times N$ et $F(u,v)$ sa TFD d'ordre N.
On rappelle la définition de la TFD et de la TFD inverse en 2D:

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} f(k,l)e^{-j2\Pi(\frac{uk+vl}{N})} \quad (1)$$

$$f(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\Pi(\frac{uk+vl}{N})} \quad (2)$$

ou alors

$$F = A_N f A_N \quad \text{avec} \quad A_N(k,n) = \frac{1}{\sqrt{N}}W^{kn} \quad \text{et} \quad W = e^{-j\frac{2\Pi}{N}} \quad (3)$$

1. Donner la matrice A_2 associée à la TFD d'ordre 2.
2. Cette transformation est-elle unitaire ?
3. Calculer la TFD de l'image $im = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline\end{array}$

   - avec la définition (1)
   - avec la définition (3)

   Donner une interprétation de chacun des coefficients obtenus.
   Est-ce que la moyenne et l'énergie sont conservées ?
4. Calculer et dessiner les 4 images de base de la TFD 2D d'ordre 2.
   On rappelle que les images de base de la TFD sont :

$$B_{(u,v)}(k,l) = \frac{1}{N}e^{j2\Pi(\frac{uk+vl}{N})} \quad (4)$$

5. Vérifier que im est bien la somme pondérée des 4 images de base avec comme facteurs de pondération les coefficients correspondants de sa TFD.

Exercice 4: Application de la TFD 2D

Dans cet exercice, on va voir un exemple d'utilisation de la TFD pour la compression d'images avec pertes. (*rem : on pourrait utiliser d'autres transformations unitaires discrètes pour la même application.*)
On considère l'image originale suivante (sur 256 niveaux de gris) :

$$im = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 50 & 100 & 100 \\ \hline 0 & 50 & 100 & 200 \\ \hline 50 & 50 & 50 & 200 \\ \hline 100 & 100 & 200 & 200 \\ \hline \end{array}$$

1. Calculer l'image IM, transformée de im par la TFD-2D d'ordre 2, c'est-à-dire en appliquant cette transformation à chaque sous-bloc de taille 2×2 de im.

2. On réalise un schéma de codage par zones tel que :

   - le coefficient de fréquence nulle est quantifié uniformément sur 2 bits.
   - le coefficient de fréquence la plus élevée n'est pas codé.
   - les autres coefficients transformés sont codés sur 3 bits.

   Donner les caractéristiques (seuils de décisions, niveaux de quantification) des lois de quantification pour chaque coefficient.
   attention : ces caractéristiques doivent être valides pour toute image im dont les niveaux de gris varient entre 0 et 255.

3. Calculer l'image IMQ, obtenue par quantification de IM.

4. L'image IMQ est codée sans pertes et transmise. Quelles sont les opérations à effectuer pour décoder l'image reçue IMQ et retrouver une approximation de l'image originale im? Donner le shéma du codeur-décodeur ainsi réalisé.

5. Calculer l'image décodée $\tilde{im}$.

6. Calculer pour cet exemple:

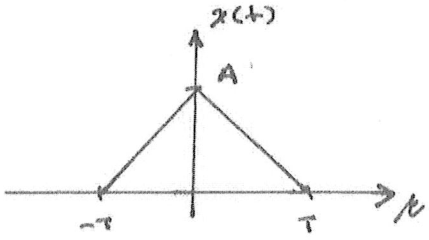
   - le taux de compression obtenu
   - l'image d'erreur
   - l'erreur quadratique moyenne

O. Le Meur

TD TSI ESIR 2

2010-2011

Exercice 1. Transformée de Fourier 1D



$$x(t) = \begin{cases} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right) & 0 \leq |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$TF(x(t)) = X(f)$

Calcul direct $X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-jwt)\,dt$

$$= \int_{-T}^{T} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\exp(-jwt)\,dt$$

$$= \int_{-T}^{0} A\left(1+\frac{t}{T}\right)\exp(-jwt)\,dt + \int_{0}^{T} A\left(1-\frac{t}{T}\right)\exp(-jwt)\,dt$$

Intégration par partie

$$= \left[A\left(1+\frac{t}{T}\right)\exp(-jwt)/(-jw)\right]_{-T}^{0} + \frac{1}{jw}\int_{-T}^{0} \frac{A}{T}\exp(-jwt)\,dt$$

$$+ \left[A\left(1-\frac{t}{T}\right)\exp(-jwt)/(-jw)\right]_{0}^{T} + \frac{1}{jw}\int_{0}^{T}\left(-\frac{A}{T}\right)\exp(-jwt)\,dt$$

$$X(w) = \underbrace{\left[A\left(1+\frac{t}{T}\right)\exp(-jwt)/(-jw)\right]_{-T}^{0} + \left[A\left(1-\frac{t}{T}\right)\exp(-jwt)/-jw\right]_{0}^{T}}_{0}$$

$$+ \frac{A}{T(-jw)}\cdot\int_{0}^{T}\exp(-jwt)\,dt + \frac{A}{Tjw}\int_{-T}^{0}\exp(-jwt)\,dt$$

$$= + \frac{A}{T(jw)^2}\left[\exp(-jwt)\right]_{0}^{T}$$

$$- \frac{A}{T(jw)^2}\left[\exp(-jwt)\right]_{-T}^{0} = + \frac{A}{T(jw)^2}\left[\exp(-jwT) - 1\right]$$

$$- \frac{A}{T(jw)^2}\left[1 - \exp(jwT)\right]$$

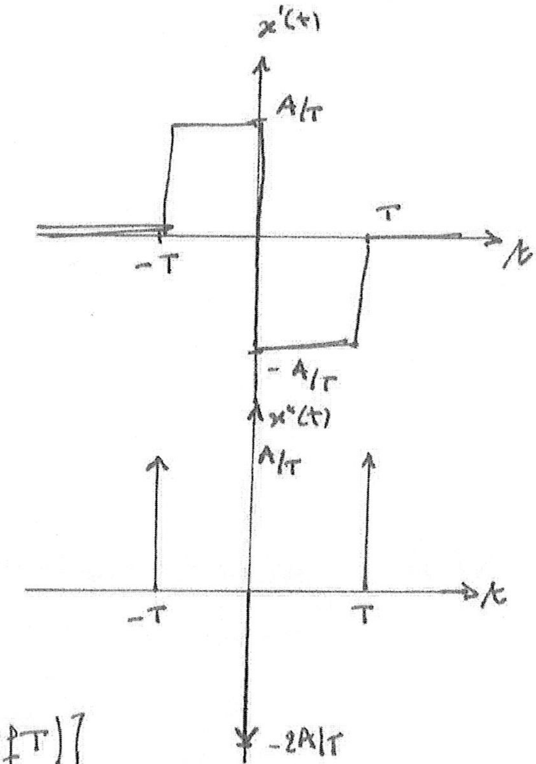
$$X(w) = \frac{A}{T(jw)^2}\left\{ \underbrace{\exp(-jwT) + \exp(jwT)}_{2\cos(wT)} - 2 \right\}$$

$$X(w) = \frac{2A}{T(jw)^2}\left\{ \cos(wT) - 1 \right\} \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$X(w) = -\frac{2A}{T(jw)^2} \cdot 2\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right)$$

$$X(w) = AT \times \left[\frac{\sin wT/2}{wT/2}\right]^2 \qquad \boxed{X(w) = AT \,\mathrm{sinc}^2\, \frac{wT}{2}}$$

Calcul par différentiation



$$x'(t) = \begin{cases} -\frac{A}{T}|t| & 0 \leq |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x''(t) = \begin{cases} +A/T & t = \{-T, T\} \\ -2A/T & t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x''(t) = \frac{A}{T}\,\delta(t-T) - \frac{2A}{T}\,\delta(t) + \frac{A}{T}\,\delta(t+T)$$

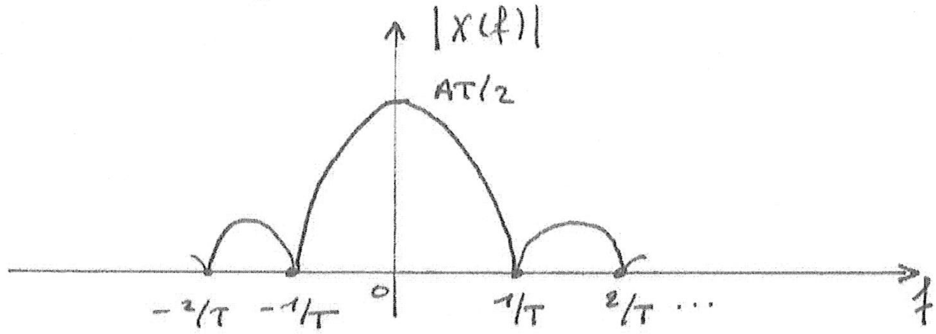
$$X''(f) = \frac{A}{T}\left\{ \exp(-j2\pi fT) - 2 + \exp[+j2\pi fT] \right\}$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\cos 2\pi fT - 1\right)$$

$$X(f) = (j2\pi f)^{-2} X''(f) = (j2\pi f)^{-2}\left(-2\sin^2 \pi fT\right) \qquad \boxed{X(f) = AT \cdot \mathrm{sinc}^2(\pi fT)}$$

Spectre amplitude et phase

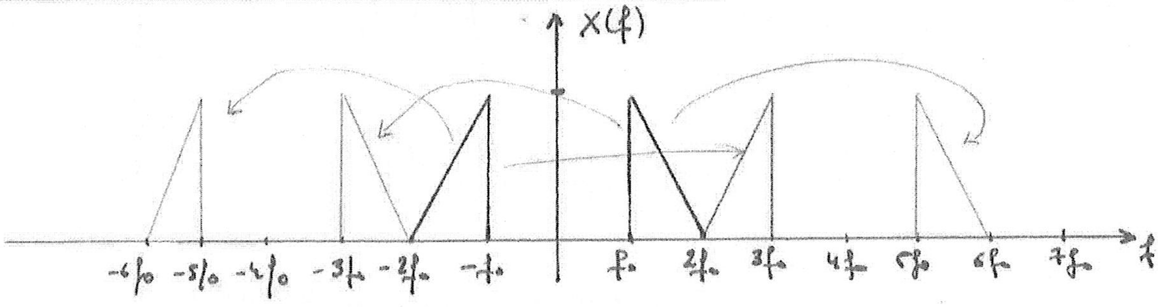
$$X(f) = \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$



Annulation de $X(f)$ pour $\frac{2k\pi}{T}$

Phase nulle car la partie imaginaire de $X(f)$ est nulle.

Exercice 2 : TF ~~TD~~ et échantillonnage



fréquence minimale d'échantillonnage : le signal $x(t)$ est à bande limitée $[-2f_0, 2f_0]$.

$$f_{max} = 2f_0 \Rightarrow f_e > 2f_{max}$$

On peut prendre au minimum $4f_0$

Signal échantillonné $x_n = x(nT_e)$

On recopie le spectre tous les "$\frac{n}{T_e}$"

$n\,4.f_0$

Rappel une discrétisation en temps conduit à une périodisation du spectre

$$x(t) \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$$

$$\Downarrow \mathcal{F}$$

$$X(f) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(f - n/T_e)$$

$$= \sum X(f - n/T_e)\,\delta(f - n/T_e)$$

Comment reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $\tilde{X}_1(f)$? D

On respecte le théorème de Shannon ($f_e > 2 f_{max}$) donc on peut utiliser le théorème de Whittaker-Shannon

$\Rightarrow$ Utilisation d'un filtre passe-bas idéal en fréquence

$$G(f) = \text{rect}\left(f \mid 4f_0\right) \times T_e$$

$$X(f) = \tilde{X}_1(f) \times G(f)$$

$$x(t) = x_1(t) * g(t)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \exp(j 2\pi f t)\, df$$

$$= T_e \int_{-2f_0}^{2f_0} \exp(j 2\pi f t)\, df$$

$$= \frac{T_e}{\pi t} \times \frac{\exp(j 4\pi f_0 t) - \exp(-j 4\pi f_0 t)}{2j}$$

$$g(t) = \frac{T_e}{\pi t} \cdot \sin(4\pi f_0 t) \qquad \boxed{g(t) = \text{sinc}(4\pi f_0 t)}$$

$$\text{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}$$

Finalement, $x(t) = x(nT_e) * g(t)$

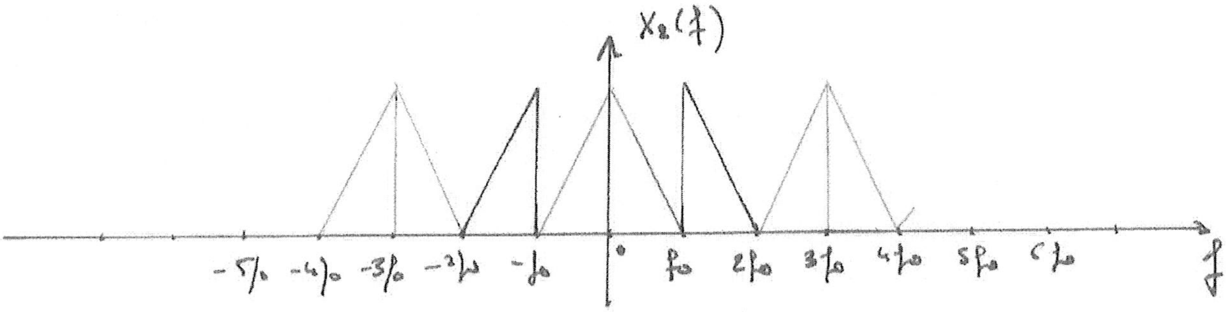
$$= x(nT_e) * g(nT_e)$$

$$= \sum_{\tau} x(\tau) \cdot g(nT_e - \tau)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{\tau} x(\tau) \cdot \text{sinc}\left(4\pi f_0 (nT_e - \tau)\right)}$$

Si $f_e = 2 \cdot f_0$, on ne respecte pas Shannon

$\Longrightarrow$ aliasing



Cependant, on peut reconstruire ("par chance") le signal $x(t)$

en ~~et~~ utilisant le filtre suivant :

$$\boxed{G(f) = \mathbb{1}_{[-2f_0, f_0] \cup [f_0, 2f_0]}}$$

Exercice 3 : TFD 2D

- Donner la matrice A_2 de transformation :

A_N est constituée des éléments suivants $A_N(k,n) = \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{kn}$

$0 \leq k \leq N-1$

$0 \leq n \leq N-1$

avec $W_N = \exp(-j\,2\pi/N)$

$N=2$, $A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \exp(-j\pi) \end{bmatrix}$

$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

La transformation est-elle unitaire ?

> Définition : une transformation est unitaire si la matrice de transformation A vérifie :
>
> $$A^{*T}A = AA^{*T} = I$$
>
> Par conséquence, les matrices unitaires sont inversibles, d'inverse $A^{-1} = A^{*T}$

$$A_2 A_2^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

<u>A_2 est unitaire</u>

Calculer la TFD de l'imagette $im = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(*) $$F[u,v] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{1} im[k,l] \cdot \exp\{-j\pi(uk+vl)\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \{ im[k,0] \exp\{-j\pi uk\} + im[k,1] \exp\{-j\pi(uk+v)\}$$

$$F[u,v] = \frac{1}{2}\{ im[0,0] + im[1,1] \exp\{-j\pi(u+v)\} + im[0,1] \exp\{-j\pi v\} + im[1,0] \exp(-j\pi u)\}$$

$$F[0,0] = \frac{1}{2}\{ im[0,0] + im[1,1] + im[0,1] + im[1,0]\}$$
$$= 1/2\{1+4+4+1\} = 5$$

$$F[0,1] = 1/2\{ im[0,0] + im[1,1] \times (-1) + im[0,1](-1) + im[1,0]\}$$
$$= 1/2\{1 - 1 - 4 + 4\} = 0$$

$$F[1,0] = 1/2\{ im[0,0] + im[1,1](-1) + im[0,1] + im[1,0](-1)\}$$
$$= 1/2\{1 - 1 + 4 - 4\} = 0$$

$$F[1,1] = 1/2\{ im[0,0] + im[1,1] - im[1,0] - im[0,1]\} = -3$$

$$\text{im}\ \begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{TFD 2D}} \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

→ fréq. horizontale

→ fréq. diag.

↓ fréq. verticale

$\mathcal{E} \times \overline{im}$

$$\boxed{\underline{\text{Rappel}} \quad \overline{im} = \frac{1}{N}\, IM[0,0]}$$

(i) La moyenne est conservée

(ii) L'énergie est conservée

$$\sum_{(k,l)} \left| im[k,l] \right|^2 = 34$$

$$\sum_{(u,v)} \left| IM[u,v] \right|^2 = 34$$

Approche matricielle pour le calcul de la TFD 2D

$$IM = A_N \cdot im \cdot A_N$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

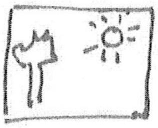
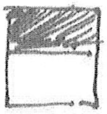
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 & -3\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

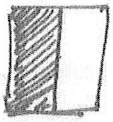
$$IM = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

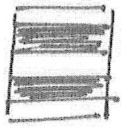
<u>Rappel</u> Une image discrète de taille N×N peut se construire par addition de <u>N×N images sinusoïdales</u> !!

$$f[k,l] = \frac{1}{N} \sum_{u,v} \underbrace{F[u,v]}_{\substack{\text{Coefficient de la combinaison} \\ \text{linéaire} \\ = \text{TFD}}} \; \underbrace{\exp\left\{ j \frac{2\pi}{N} (uk+vl) \right\}}_{\text{Images de la base}}$$

(Valeur moyenne)

 $= F[0,0] \cdot$  $+ F[0,1] \cdot$ 

$+ F[1,0] \cdot$  $+ F[1,1] \cdot$ 

$+ F[0,2] \cdot$  $+ \cdots\cdots$

<u>Images de base de la TFD 2D</u> : $B_{(u,v)}[k,l] = \frac{1}{N} \exp\left\{ j \frac{2\pi}{N} (uk+vl) \right\}$

Pour $N=2$: $B_{(0,0)}[k,l] = 1/2 \Rightarrow B_{(0,0)} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B_{(0,1)}[k,l] = 1/2 \exp(j\pi l)$

$\Rightarrow B_{(0,1)} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B_{(1,0)}[k,l] = 1/2 \exp(j\pi k)$

$\Rightarrow B_{(1,0)} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$B_{(1,1)}[k,l] = 1/2 \exp(j\pi(k+l))$

$\Rightarrow B_{(1,1)} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow im[x,y] = \sum_{u,v} F[u,v] \cdot B_{(u,v)}$

$= \underline{\underline{5}} \times 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \underline{\underline{0}} \times 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \underline{\underline{0}} \times 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{\underline{-3}} \cdot 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Coeff de Fourier !!