Examen du 6/03/2010 (2h)

TOP: Techniques and tOols for Programming

Première année

Documents interdits, à l'exception d'une feuille A4 à rendre avec votre copie.

La notation tiendra compte de la présentation et de la clarté de la rédaction.

★ Questions de cours. (4pt)

▷ **Question 1:** (1pt) Quelle est la différence entre la complexité dans le pire cas et la borne supérieure de complexité ?

Réponse

La borne supérieure de complexité ($O(n)$) est une approximation asymptotique, donc cela sert à étudier le comportement de la fonction quand le paramètre devient grand. La complexité dans le pire cas est une réflexion menée pour une valeur du paramètre donnée. On cherche alors la pire instance du problème pour mettre l'algorithme en difficulté.

Par exemple, pour le tri à bulle, le pire cas est quand le tableau est trié dans l'ordre inverse et il va effectuer un nombre de swaps de l'ordre de n^2 (et n parcours), tandis que le meilleur cas est quand le tableau est déjà trié. Dans ce cas, il fait un seul parcours et aucun swap.

Mais si la complexité de ce tri est notée TB, on a $TB(n) \in O(n^2)$, ce qui veut dire que quand n est suffisament grand, $TB(n)$ n'est jamais pire que n^2 (aux constantes près).

Fin réponse

▷ **Question 2:** (1pt) Définissez les types de récursivité suivants : terminale, générative, mutuelle (ou croisée) et structurelle.

Réponse

- **Terminale :** aucune opération n'a lieu lors de la remontée récursive
- **Générative :** c'est une fonction qui est récursive (par opposition à structurelle)
- **Mutuelle :** deux (ou plus) fonctions s'appellent les unes les autres
- **Structurelle :** c'est une structure de données qui est récursive (par opposition à générative)

Fin réponse

▷ **Question 3:** (1pt) Qu'est ce que le backtracking ?

Réponse

C'est une technique algorithmique permettant d'effectuer des recherches combinatoires bien plus efficacement qu'un parcours exaustif. L'idée de base est de construire peu à peu les solutions en ne parcourant que des sous-solutions valides. Dès qu'une sous-solution est invalide, on arrête l'exploration de cette branche, ce qui permet d'éviter le parcours de nombreuses solutions complètes qui seraient invalidées par la présence de la sous solution courante. Ouf.

Pour mettre en œuvre le backtracking, on utilise généralement une récursion (pour construire peu à peu la solution) avec une boucle ou similaire pour parcourir tous les choix possibles à une étape donnée de la construction de notre solution. Pour chaque choix, s'il mène à une sous-solution valide également, on opère un appel récursif pour explorer les sous-solutions plus grandes que l'on peut construire avec celle que l'on a pour l'instant.

Fin réponse

▷ **Question 4:** (1pt) Définissez les tests (1) white box (2) black box (3) d'intégration (4) de régression.

Réponse

- **Whitebox :** C'est une technique de tests, une facon d'imaginer les tests à faire pour remplir mes objectifs ; J'écris mes tests en lisant le source (et je teste donc les cas limites de l'implémentation)
- **Blackbox :** C'est également une technique de tests ; je n'ai que la spécification pour écrire les tests (et j'ai donc moins de matière puisque je ne sais pas comment sont représentés les choses)
- **Intégration :** C'est une stratégie de tests, un objectif à remplir par une batterie de tests. C'est quand j'ai plusieurs modules (peut-être testés chacun par tests unitaires) et que je veux m'assurer que tous fonctionnent correctement ensemble, qu'il n'y a pas de problème aux interfaces lors de la composition.
- **Regression :** Quand j'ai trouvé une erreur (un bug) dans mon programme, je dois écrire un test cherchant à le reproduire afin de m'assurer que ce bug ne refera pas surface lors d'une modification ultérieure du code.

Fin réponse

★ Exercice 1: Code récursif mystère (5pt).

Considérez le code mystère suivant.

```
1 public int puzzle(int i, int j) {
2   if (i == 1)
3     return j;
4   if (i % 2 == 1)
5     return j+puzzle(i/2,j*2);
6   else
7     return   puzzle(i/2,j*2);
8 }
```

▷ **Question 1:** (½pt) Explicitez les appels récursifs effectués pour `puzzle(4,25)`.

▷ **Question 2:** (1pt) Calculez le résultat de la fonction puzzle pour les valeurs suivantes. (1,10) (2,10) (3,10) (4,10) (6,10) (8,10) (10,10) Que semble calculer `puzzle()` ?

Réponse

Question 1 : `puzzle(4, 25) = puzzle(2,50) = puzzle(1,100) = 100`

Question 2 :

`puzzle(1,10)=10` `puzzle(2,10)=20` `puzzle(3,10)=30` `puzzle(4,10)=40`
`puzzle(6,10)=60` `puzzle(8,10)=80` `puzzle(10,10)=100`

Fin réponse

▷ **Question 3:** (½pt) Montrez la terminaison de cet algorithme.

Réponse

Le paramètre de récursion, i, est strictement décroissant par division entière. Il va donc bien converger vers 1, qui est le cas d'arrêt.

Fin réponse

▷ **Question 4:** (½pt) Quelle est la complexité algorithmique de `puzzle` (en nombre d'appels récursifs) ?

Réponse

Le paramètre de récursion, i, décroit par division entière. Il faut donc $O(log(n))$ étapes pour traiter un problème de taille n (3 étapes pour $n = 4$, 4 étaptes pour $n = 8$, 5 étapes pour $n = 16$, etc).

Fin réponse

▷ **Question 5:** (½pt) Est-il possible de dérécursiver directement cette fonction ? Pourquoi ?

Réponse

Non, car elle n'est pas terminale : il y a des calculs à la remontée (en ligne 5).

Fin réponse

▷ **Question 6:** (2pt) Dérécursivez cette fonction en appliquant les méthodes vues en cours (en une ou plusieurs étapes). Explicitez ce que vous faites et pourquoi.

Réponse

La première étape est de rendre cette fonction récursive terminale. Pour cela, on écrit une fonction ayant un argument supplémentaire, et on y fait lors de la descente les opérations que l'on aurait dû faire lors de la remontée. Ceci n'est bien sûr possible que parce que l'opération à modifier est une addition, qui est associative et commutative.

```
public int puzzle(int i, int j) {
  return puzzle2(i,j,1);
}
public int puzzle(int i, int j, int accumulateur) {
  if (i == 1)
    return accumulateur;
  if (i % 2 == 1)
    return puzzle2(i/2, j*2, accumulateur+j);
  else
    return puzzle2(i/2, j*2, accumulateur  );
}
```

Une fois rendue terminale, on peut dérécursiver cette fonction de la façon [simple] vue en cours.

```
public int puzzle(int i, int j) {
  accumulateur = 1;
  while (i!=1) {
    if (i % 2 == 1) {
      accumulateur += j; // attention à l'ordre des mises à jour
      i /= 2;
      j *= 2;
    } else {
      i /= 2;
      j *= 2;
    }
  }
  return accumulateur
}
public int puzzle(int i, int j, int accumulateur) {
  if (i == 1)
    return accumulateur;
  if (i % 2 == 1)
    return puzzle2(i/2, j*2, accumulateur+j);
  else
    return puzzle2(i/2, j*2, accumulateur  );
}
```

Fin réponse

★ **Exercice 2: Encore un code mystère (mais pas récursif)** (d'après Maylis DELEST – 4pt).

On considère le tableau T012=$\{1, 0, 2, 0, 2, 1\}$ et la fonction `swap(tab, a,b)`, qui inverse les valeurs des cases `tab[a]` et `tab[b]`.

▷ **Question 1:** (2pt) Donnez la valeur du tableau aux différentes étapes de l'appel `puzzle2(T012)`.

▷ **Question 2:** (1pt) Dans le cas général si T est un tableau d'entiers dont les valeurs sont les entiers 0, 1 ou 2 ($T \in \{0,1,2\}^{|T|}$), quel est le résultat de la fonction puzzle2() sur T ? Argumentez votre réponse.

Réponse

La fonction trie le tableau en séparant les 0 des 1 et des 2. Après l'exécution de la fonction le tableau est organisé de la façon suivante : une zone regroupant les 0 au début du tableau, suivie d'une zone de 2 et enfin une zone de 1 à la fin du tableau.
Exprimer l'invariant de l'algorithme peut aider à étayer cette affirmation.

Fin réponse

▷ **Question 3:** (1pt) Quelle est la complexité de cette fonction ?
Montrez la terminaison de cet algorithme. Justifiez vos réponses.

Réponse

Chaque élément du tableau n'est examiné qu'une fois et l'algorithme s'arrête lorsque tous les éléments ont été étudiés. La complexité est donc linéaire par rapport au nombre d'éléments dans le tableau soit de l'ordre de n.
Pour étayer ces affirmations, il est nécessaire de dégager un variant pour montrer qu'il est strictement décroissant et convergeant vers 0, le cas d'arrêt : $V = k - i$ (regardez la condition d'arrêt).

Fin réponse

```
void puzzle2(int tab[]) {
  int i=0,j=0,k=tab.length-1;
  while (i<=k) {
    if (tab[i] == 0) {
      swap(tab,i,j);
      j=j+1;
      i=i+1;
    } else if (tab[i] == 1) {
      swap(tab,i,k);
      k=k-1;
    } else {
      i=i+1;
    }
  }
}
```

Réponse

Question 1 :

```
Etape 1:  [1, 0, 2, 0, 2, 1]
           ij              k

Etape 2:  [1, 0, 2, 0, 2, 1]
           ij           k

Etape 3:  [2, 0, 2, 0, 1, 1]
           ij        k

Etape 4:  [2, 0, 2, 0, 1, 1]
            j  i     k

Etape 5:  [0, 2, 2, 0, 1, 1]
               j  i  k

Etape 6:  [0, 2, 2, 0, 1, 1]
               j     ik

Etape 7:  [0, 0, 2, 2, 1, 1]
                  j  k  i
```

Fin réponse

★ **Exercice 3: Preuve de programmes** (4pt).

Considérez le code de la fonction ci-contre calculant la factorielle de façon itérative. Calculez la plus faible précondition (Weakest Precondition, **WP**) nécessaire pour que la post-condition soit :

$$Q \triangleq res = n!$$

Les règles de calcul des préconditions sont rappelées en annexe.

```
int res;
void Factorial (int n) {
  int f = 1;
  int i = 1;
  while (i < n) {
    i = i + 1;
    f = f * i;
  }
  res = f;
}
```

Réponse

Il faut, comme toujours, partir du bas de l'algorithme. Calculons tout d'abord la WP permettant à la boucle while d'avoir Q en post-condition. L'invariant de la boucle est assez simple dans ce cas : $I \triangleq (f = i!) \wedge (i \in [0, n])$ Le variant est $n - i$

WP(while, Q) = I, avec les obligations habituelles. Considérons d'abord les deux dernières obligations, habituellement plus simples.

Obligation 2 $\triangleq I \Rightarrow V \geq 0$
$\triangleq (f = i!) \wedge (i \in [0, n]) \Rightarrow n - i \geq 0$
$\Leftarrow i \in [0, n] \Rightarrow n - i \geq 0$ (ce qui est trivialement vrai)

Obligation 3 $\triangleq (E = \texttt{false} \wedge I) \Rightarrow Q$
$\triangleq n = i \wedge (f = i!) \wedge (i \in [0, n]) \Rightarrow f = n!$
$\Leftarrow n = i \wedge (f = i!) \Rightarrow f = n!$ (c'est bon aussi).

Reste la première obligation de preuve, la plus dure.

Obligation 1 $\triangleq (E = \texttt{true} \wedge I \wedge V = z) \Rightarrow \mathbf{WP}(C, I \wedge V < z))$

Commençons par calculer le membre droit de l'implication

$\mathbf{WP}(C, I \wedge V < z) \triangleq \mathbf{WP}(C, (f = i!) \wedge (i \in [0, n]) \wedge n - i < z)$
$\triangleq ((f = i!) \wedge (i \in [0, n]) \wedge n - i < z)_{[i:=i+1; f:=f+1]}$
$\triangleq ((f + 1 = (i + 1)!) \wedge (i + 1 \in [0, n]) \wedge n - i - 1 < z)$

Ce qui nous donne :

Obligation 1 $\triangleq i < n \wedge f = i! \wedge i \in [0, n] \wedge n - i = z \Rightarrow f \times i = (i + 1)! \wedge i + 1 \in [0, n] \wedge n - i - 1 < z$
$\triangleq f = i! \wedge i \in [0, n[\wedge n - i = z \Rightarrow f \times i = (i + 1)! \wedge i + 1 \in [0, n] \wedge n - i - 1 < z$

Notons P_1, P_2 et P_3 les trois prédicats à droite de l'implication.

- $P_1 \triangleq f \times i = (i + 1)!$ est donné par le fait que $f = i!$ (en prémisse de l'implication) et la définition de la factorielle.
- $P_2 \triangleq i + 1 \in [0, n]$ se déduit de la prémisse $i \in [0, n[$
- $P_3 \triangleq n - i - 1 < z$ se déduit de la prémisse $n - i = z$

On a donc montré que $WP(while, Q) \equiv I$. Reste à finir.

WP(l3-4,I) $\triangleq$ WP(l3-4,$(f = i!) \wedge (i \in [0, n])$)
$\triangleq ((f = i!) \wedge (i \in [0, n]))_{[i:=1, f:=1]}$
$\triangleq ((1 = 1!) \wedge (1 \in [0, n]))$
$\triangleq n \geq 1$

L'élément de droite est toujours vrai par définition de la factorielle, et l'élément de gauche est vrai si et seulement si n est plus grand que 1 (sinon, l'écriture est même invalide).

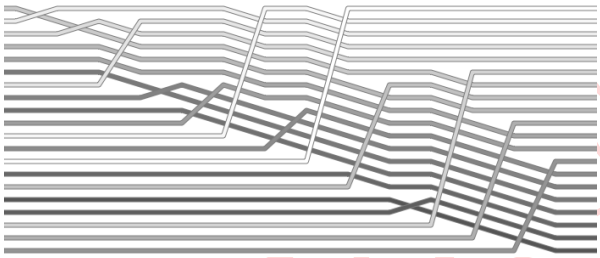
Donc c'est fini. WP(factoriel, res=n !)$\equiv n \geq 1$

Fin réponse

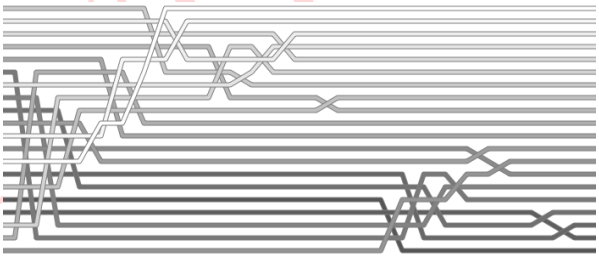
★ **Exercice 4: Identification d'algorithmes de tri** (d'après Aldo Cortesi – 3pt).

Les schémas suivants montrent le fonctionnement de divers algorithmes de tris. Chaque trait grisé indique une valeur, et l'axe des abscisses montre le temps qui passe tandis que l'axe des ordonnées montre la position de chaque valeur (=trait) dans les différentes cases du tableau. La case n°1 est en haut, et la case n°20 est en bas, et une couleur plus claire signifie une valeur plus petite. Quand deux traits se croisent, c'est que l'algorithme a inversé les deux valeurs à cet instant.

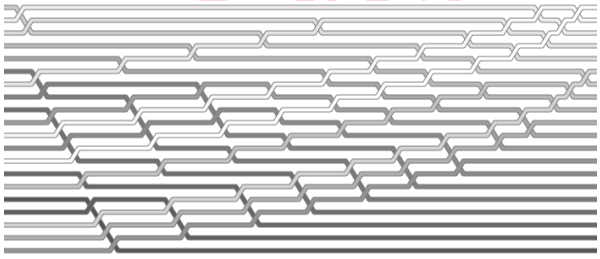
▷ **Question 1:** Identifiez le comportement des algorithmes suivants : tri à bulle, tri par insertion, tri par sélection, shell sort, quick sort. Argumentez vos réponses.



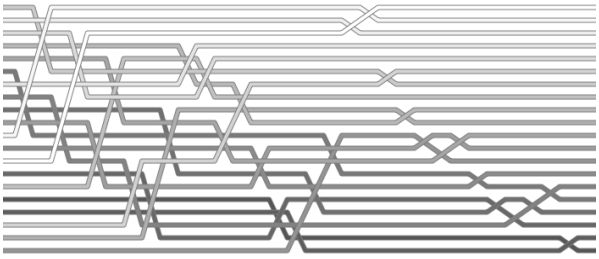
Algorithme A.



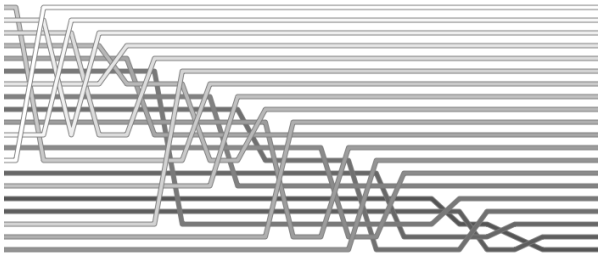
Algorithme B.



Algorithme C.



Algorithme D.



Algorithme E.

Réponse

Tri a bulle : parcours successifs du tableau en comparant les voisins 2 à 2. S'ils sont mal triés, on les inverse. Ce comportement a tendance à pousser les grosses valeurs vers la fin. On peut reconnaitre ce comportement dans l'algorithme C.

Tri par insertion : invariant : ce qui est avant la frontière est trié. A chaque étape, je prend l'élément juste après la frontière, et je le met à sa place dans la partie déjà triée. On peut reconnaitre ce comportement dans l'algorithme A.

Tri par selection : a chaque étape, je selectionne le minimum de la partie non triée et le pose à la frontière. On reconnait l'algorithme E.

Shell sort : comme un bubble sort, mais on commence par trier avec un écartement supérieur à 1. Au lieu d'inverser des voisins, on inverse des cases à distance 3 puis 2 puis on fait un bubble standard, mais sur un tableau un peu prétrié. C'est l'algorithme D.

Quick sort : c'est un algorithme récursif qui trie une partie du tableau puis l'autre (les parties ne sont pas forcément de taille identique). C'est l'algorithme B.

Fin réponse

★**Annexe :** Règles de calcul des préconditions.

- $\mathbf{WP}(nop, Q) \equiv Q$
- $\mathbf{WP}(x := E, Q) \equiv Q[x := E]$
- $\mathbf{WP}(C; D, Q) \equiv \mathbf{WP}(C, \mathbf{WP}(\mathrm{D,Q}))$

- $\mathbf{WP}(\texttt{if}\ Cond\ \texttt{then}\ C\ \texttt{else}\ D, Q) \equiv (Cond = \texttt{true} \Rightarrow \mathbf{WP}(C, Q)) \wedge (Cond = \texttt{false} \Rightarrow \mathbf{WP}(D, Q))$
- $\mathbf{WP}(\texttt{while}\ E\ \texttt{do}\ C\ \texttt{done}\ \{\text{inv I var V}\}, \text{Q}) \equiv I$; Obligations de preuve :
  - $(E = \texttt{true} \wedge I \wedge V = z) \Rightarrow \mathbf{WP}(C, I \wedge V < z))$
  - $I \Rightarrow V \geq 0$
  - $(E = \texttt{false} \wedge I) \Rightarrow Q$