FORMES D'APTITUDE ET TAXINOMIE D'OBJECTIFS COGNITIFS EN MATHEMATIQUES

I. — INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une recherche que conduit R. Gras (I.R.E.M. de Rennes) sur le comportement en mathématiques des enfants d'un cycle donné d'études ; il s'agit en l'occurrence des classes de quatrième et troisième des C.E.S. (collège d'enseignement secondaire). Un des aspects les plus décisifs de cette recherche consiste en la détermination des principaux objectifs cognitifs et en leur ordonnancement à partir du comportement réel des enfants. Une telle taxinomie qui permettrait de préciser les différentes étapes dans l'appropriation d'un concept mathématique donné, fournira à l'enseignant une liste d'objectifs à atteindre dans sa fonction pédagogique ainsi qu'une grille d'évaluation de son propre enseignement.

Nous allons ici confronter deux classifications. La première, en objectifs cognitifs, telle qu'elle a été précisée par R. Gras s'appuyant sur les théories du développement cognitif de Piaget et de Bruner. La seconde, obtenue par l'application de l'algorithme de la vraisemblance du lien (cf. § 4 suivant et chap. 5 et 10 de [8]) sur un ensemble d'items, dont chacun est défini par un test mathématique, proposés à un échantillon d'élèves. La comparaison des deux classifications supposera la reconnaissance derrière un même test de l'objectif cognitif dans lequel il s'insère.

Terminons cette introduction en précisant que notre texte ne fait que reprendre certains aspects de ceux (4) et (5) cités en références.

II. — LA TAXINOMIE EN OBJECTIFS COGNITIFS

Bloom estime qu'il existe deux grandes classes dans l'ensemble des objectifs cognitifs. La première relève de la **connaissance** et peut être considérée comme le reflet direct de l'apprentissage qui reste, dans une certaine mesure, extérieur au sujet. La seconde qui décrit les **habiletés et capacités intellectuelles** de ce dernier, traduit la **compréhension** ; c'est-à-dire, l'intégration personnelle des objets et l'aptitude à leur réinvestissement dans les actions du sujet. La « complexité des comportements » dont parle Bloom serait ainsi ordonnée de la complexité cognitive à la complexité opératoire. Toutefois, il serait hasardeux de cataloguer une tâche exécutée par un enfant dans l'une ou l'autre classe ; en effet, un exercice dit de connaissance peut exiger la « reconnaissance » d'une structure et nécessiter de hautes qualités analytiques pour un âge et un apprentissage donnés. D'autre part, la connaissance d'objets et de faits mathématiques risque d'être et de demeurer pour certains élèves du seul domaine sensible et orienté vers l'utilité : un cercle est une figure qui peut être tracée au moyen d'un compas ; un pantographe est fait pour reporter, agrandir ou diminuer des figures ; une table de la loi normale est faite pour savoir si une mesure n'est pas trop invraisemblablement grande ou petite, etc. L'aptitude à utiliser à bon escient un objet ou un fait mathématique relève-t-elle de l'une ou de l'autre des deux rubriques ?

Il faut donc compter avec un large éventail de classes d'objectifs dont les frontières n'ont d'ailleurs pas la netteté espérée. Comme le confirment certaines critiques de Y. Tourneur, la très riche classification bloomienne dont les classes sont ordonnées selon un critère de complexité cognitive croissante, est loin de rendre compte de la hiérarchie des résultats obtenus à un test dans n'importe quelle situation. Il serait présomptueux de prétendre qu'il puisse exister une taxinomie latente universelle, indépendante de la discipline considérée, du niveau d'enseignement, des méthodes d'apprentissage, de l'affectivité du maître et de l'élève et d'autres facteurs encore...

Une première approche pourrait consister à estimer une hiérarchie des différents stades dans l'appropriation d'un concept déterminé par l'enfant. L'évolution de cette appropriation peut être révélée de façon externe par la réussite à des tâches relevant d'objectifs pédagogiques retenus dans une première classification. Les classifications de Bloom de l' « Indian National Council of Educational Research » (I.N.C.E.R.), de la « National Longitudinal Study of Mathematical Abilities » (N.L.S.M.A.), de l' « I.R.E.M. » de Strasbourg sont assez exhaustives pour couvrir l'ensemble des objectifs que peut s'assigner raisonnablement tout professeur de mathématiques quel que soit le niveau de ses élèves ou étudiants. Il demeure ensuite la difficulté de formulation d'une hypothèse, de constitution de classes d'objectifs et d'un ordre sur ces classes, en cherchant bien entendu à ce qu'il soit, lui-même, l'image d'un ordre sur un continüum de complexité. Il paraît alors légitime de retenir les éléments d'une théorie de développement, susceptible de sous-tendre l'appropriation conceptuelle. C'est ainsi que, dans une première approche, on utilisera celle de Piaget, interprétée par Bruner, selon trois niveaux :

- « enactive level » : observations et manipulations des objets par l'enfant ; appropriation physique, sensori-motrice ;
- « ikonic level » : représentation et traduction des objets en images ; appropriation graphique ;
- « symbolic level » : effectuation de transformations sur les symboles, étude des relations ; appropriation « intellectuelle » dite conceptuelle.

Une hypothèse naïve consiste alors à admettre que ces trois niveaux sont ordonnés par la complexité des démarches intellectuelles mises en jeu : du premier niveau où sont appréhendés des éléments simples, l'enfant passe au second par une transposition métalinguistique, puis au troisième où les connexions complexes entre les éléments symbolisés font place aux relations entre eux et aux structures sur leur classe.

Bien que, comme il a été remarqué ci-dessus, il soit parfois difficile d'attribuer l'un des précédents niveaux à une tâche mathématique donnée ; R. Gras rejoint cette théorie en proposant une échelle plus riche en cinq classes, qu'il s'agira alors d'éprouver. Les trois premières α, β et γ contiennent les principaux objectifs relevant d'un apprentissage à trois niveaux ; les deux dernières δ et η, ceux des objectifs relatifs aux « processus mentaux supérieurs ». Reprenons ci-dessous les caractéristiques de la description de chacun des niveaux de R. Gras.

α Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématique

Les objectifs de cette catégorie décrivent des schèmes actifs permettant la connaissance sensible des objets et des faits mathématiques : ceux-ci, dans la phase d'apprentissage correspondante, sont présentés sous forme matérielle d'objets réels, d'instruments de mesure ou sous forme matérialisée de ces objets (schémas, tableaux, notices, etc.). A ce niveau, l'élève doit pouvoir exprimer oralement son action et, de ce fait, doit posséder la terminologie adéquate. Cette expression lui permet d'ailleurs une première intériorisation des phénomènes. Enfin, il doit être capable d'user de faits et d'effectuer de simples algorithmes, qu'ils soient calculatoires ou manipulatoires.

β Analyse des faits et transposition

Les objectifs ont pour but ici de mesurer l'aptitude à maîtriser l'action extérieure : les faits pertinents sont choisis, analysés et, dans une première démarche inductive, ils sont au besoin extrapolés. Des connexions sont établies entre les événements observables et mesurables. Enfin, à ce palier, l'enfant doit montrer qu'il est capable de traduire d'un langage à un autre : cette transposition qui se doit d'être fidèle et précise lui permet de recevoir ou de transmettre des communications de modes différents.

γ Compréhension des relations et des structures

La connaissance du concept s'intériorise complètement ; il prend place parmi les acquis antérieurs. On doit alors attendre ici que l'élève puisse déjà argumenter à son sujet : la compréhension des relations et des structures rompt l'isolement de l'objet mathématique saisi. L'élève peut d'ailleurs réinvestir ses nouvelles connaissances dans des situations simples où elles prennent, au début, une place privilégiée. Insistons sur la place de l'application dans la hiérarchie : elle est de degré supérieur à l'illustration évoquée en α et nécessite une très bonne compréhension conceptuelle.

δ Synthèse et créativité

On atteint ici les formes mentales supérieures. Il s'agit ici, non seulement de le reconnaître mais aussi d'intégrer le concept, non plus de le juxtaposer aux autres. Il doit permettre un enrichissement éventuel de la théorie dans laquelle il se place : l'enfant dégage de nouvelles propriétés de celle-ci, crée ses exemples personnels, découvre des généralisations, se rend capable de transferts enrichis dans d'autres disciplines.

η Critique et évaluation

C'est enfin le palier où une distance peut être prise par rapport à la réalité et à la théorie mathématique : les objectifs essentiels visent à critiquer les données, à séparer les propriétés, (nécessaires ou suffisantes), à construire des contre-exemples, à orienter éventuellement son action vers de nouveaux objets.

Comme il a été exprimé ci-dessus, il serait pertinent de tester l'existence et l'enchaînement de ces différentes classes d'objectifs cognitifs autour d'un même concept mathématique. Il s'agit en effet d'une expérience en cours où R. Gras a établi un ensemble de tests relevant des différentes classes précédentes, autour du concept de la symétrie centrale (cf. [6]). On cherchera ici à confronter la précédente classification avec celle obtenue par notre méthode de construction d'un arbre condensé des classifications à partir de l'algorithme de la vraisemblance du lien, sur un large ensemble de tests recouvrant diverses notions mathématiques. Ces différents tests ont davantage été établis pour reconnaître les principaux types d'aptitude dans le comportement mathématique des enfants que dans le but de validation dont il est question ici. Cela suppose par conséquent la reconnaissance derrière un même item de la classe d'objectifs où il s'intègre le mieux.

III. — LES DONNÉES

Dans le cadre d'une expérience nationale centrée sur les mathématiques dans les classes de quatrième et troisième de C.E.S. un test d'entrée dans les classes concernées a été proposé sous la responsabilité de R. Gras et avec l'aide de professeurs volontaires intéressés par l'expérience pédagogique. C'est ainsi que ce test, que nous présenterons bientôt, a été soumis dans 63 classes de diverses académies de France, dès la première quinzaine de septembre 1975. Ces classes n'ont pas nécessairement été choisies selon les lois du sondage aléatoire. On y distingue deux principaux lots ; le premier formé de classes « expérimentales » (i.e. où une expérience pédagogique allait être conduite pendant deux ans) et le second, formé de classes « témoins ». A ces deux lots on a adjoint quelques classes de S.E.S. (section d'enseignement spécialisé) à caractère très pratique ; auxquelles on n'a pas fait subir la partie du test qui correspond le plus au langage ou formatisme appris à l'école (cahier A, ci-dessous). Ce choix doit répondre à certaines analyses locales qui ont leur importance pédagogique ; nous retiendrons quant à nous que l'ensemble des classes totalise un échantillon de 1 621 élèves, susceptible de représenter les différents types d'aptitudes au niveau des capacités cognitives ou opératoires ayant pour champ le nombre et l'espace ; champ que vise précisément le test.

Composition du test

Le test est composé de cinq cahiers totalisant 95 items élaborés par R. Gras à l'exception des 16 premiers items du deuxième cahier qui sont extraits d'un test du Conservatoire des Arts et Métiers et de l'Institut National du Travail et de l'Orientation Professionnelle (I.N.O.P.) avec l'aimable autorisation de ces organismes. Il faut se garder de croire à une quelconque hypothèse de corrélation entre les différents cahiers et les différents niveaux de la taxinomie (cf. § 2 ci-dessus). C'est fortuitement que l'ensemble des tests a été construit autour de cinq cahiers. Nous allons décrire cahier par cahier la nature et le détail des différents items.

Le premier Cahier (codé A) doit permettre de « mesurer », outre la reconnaissance des concepts relationnels, l'aptitude à changer de mode de représentation conceptuelle, à analyser et induire ou à appréhender a priori la propriété de Thalès (item 22). Ce cahier est composé de 28 items sur les notions de relations, fonctions, nombres relatifs et décimaux, encadrement, équations, organigrammes et suites arithmétiques. (Durée du test de ce cahier : 45 minutes).

1 Une relation R définie sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ admet pour diagramme sagittal le diagramme 1 ci-dessous.

Complète le diagramme cartésien 2 de cette même relation, à l'aide de croix.

A 1

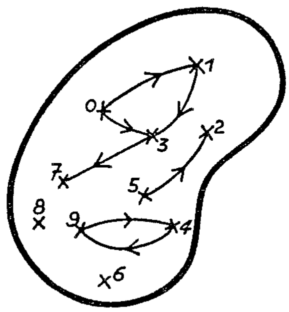


Diagramme 1

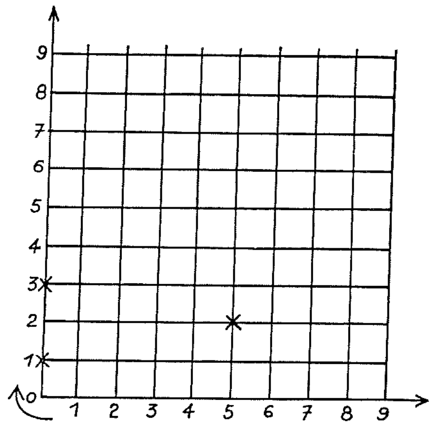


Diagramme 2

On a déjà mis, par exemple, une croix à l'intersection de la colonne 5 et de la ligne 2 pour indiquer que 5 est en relation avec 2, comme l'indique le diagramme 1.

---

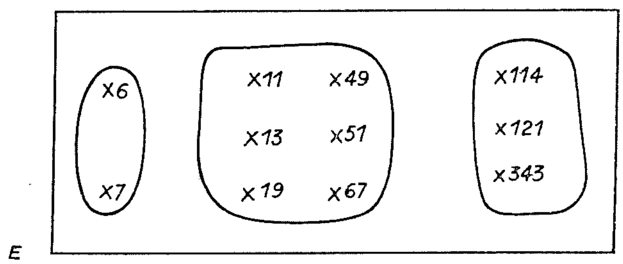
2 Voici un ensemble E de nombres :

$$\{6, 7, 11, 13, 19, 49, 51, 67, 114, 121, 343\}$$

La relation R_1 de E dans E de lien verbal :

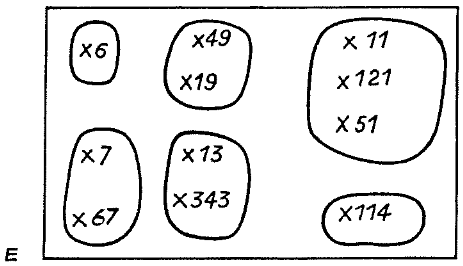
« ...s'écrit avec autant de chiffres que... »

permet de classer les éléments de E comme l'indique le schéma ci-après :



Trouve un lien verbal pour chacune des relations R_2, R_3 et R_4 de E dans E qui permette de classer, respectivement, les éléments de E comme l'indiquent les schémas suivants :

2-1 A 2

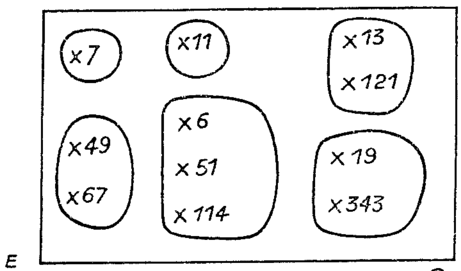


Partition définie par $\mathcal{R}_2$

Lien verbal :

....

2-2 A 3

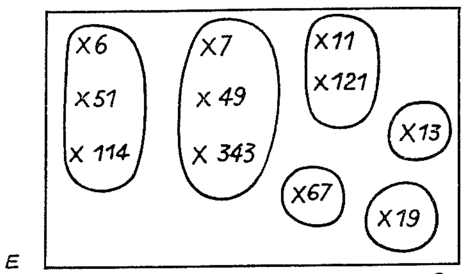


Partition définie par $\mathcal{R}_3$

Lien verbal :

....

2-3 A 4



Partition définie par $\mathcal{R}_4$

Lien verbal :

....

3 Voici deux ensembles de nombres :

A 5

$$A = \{5,\ 2,\ -3,\ 4\}$$
$$B = \{-15,\ 20,\ 10,\ 25\}$$

x représente un élément de A, y un élément de B. Parmi les six relations proposées ci-dessous, une seule est une bijection de A vers B. Entoure le numéro de la bonne réponse.

$y = -5 \times x$	$y = 10 \times x$	$x = y + 20$	$y = 5 \times x$	$x = 5 \times y$	$x = y$
Réponses : 1	2	3	4	5	6

---

4 Voici un ensemble de nombres :

$$\{3, -2, 6, 4, -12\}$$

Quel est l'ensemble des images de ces nombres par l'application qui les triple.
Tu choisis, comme précédemment, la réponse qui te semble convenir.

A 6

$\{12, -24, 6, -6, 18\}$	$\{18, -9, -6, 36, -12\}$	$\{9, -6, -36, -15, -12\}$
Réponses : 1	2	3
$\{19, 12, -36, 18, -9\}$	$\{9, -6, -36, 18, -12\}$	$\{-36, 18, -6, 9, 12\}$
4	5	6

---

5 Parmi les nombres suivants, trois d'entre eux sont images des nombres :
7,5 ; —3, 4 et 1,6 par l'application : $x \longrightarrow 1{,}5 \times x$.

A 7

Entoure ceux qui sont les images des nombres précédents :
12, 25 ; 1, 9 ; —5, 4 ; 2 ; 2, 4 ; —4, 8 ; —5,1 ; —1, 7 ; 11, 25 ; 3, 75.

---

6 Il s'agit maintenant de reconnaître des applications définies sur l'ensemble des nombres entiers. Elles sont suggérées par des images de quelques nombres. Complète les pointillés par des nombres, images ou antécédents de nombres proposés en t'aidant des exemples.

6-1

A 8

$f : 0 \longmapsto 0$	$f : 4 \longmapsto \dots$
$f : 1 \longmapsto 1$	$f : -5 \longmapsto 25$
$f : 2 \longmapsto \dots$	$f : \dots \longmapsto 49$
$f : 3 \longmapsto 9$	$f : \dots \longmapsto 49$

6-2

A 9

$g : 0 \longmapsto 0$	$g : -4 \longmapsto \dots$
$g : 1 \longmapsto 0{,}5$	$g : -2 \longmapsto \dots$
$g : 2 \longmapsto 1$	$g : -3 \longmapsto -1{,}5$
$g : 3 \longmapsto \dots$	$g : \dots \longmapsto -2$

6-3 On note g o f l'application « f suivie de g », c'est-à-dire la composée de f et g. Complète comme précédemment en t'aidant de l'exemple :

A 10

$g \circ f : 0 \longmapsto \ldots$ $\quad g \circ f : \ldots \longmapsto 18$

$g \circ f : 1 \longmapsto 0,5$ $\quad g \circ f : \ldots \longmapsto 18$

$g \circ f : 2 \longmapsto \ldots$ $\quad g \circ f : \ldots \longmapsto 32$

$g \circ f : -4 \longmapsto \ldots$ $\quad g \circ f : \ldots \longmapsto 32$

7

7-1 A l'école, l'année dernière ,on a mesuré Pascale avec une toise et on a relevé 1,31 m. Cette mesure est faite à un demi-centimètre près, c'est-à-dire qu'il peut y avoir une différence d'un demi-centimètre entre la vraie longueur et la longueur repérée. Entre quelles hauteurs se situait la taille de Pascale ? Entoure le numéro de la bonne réponse.

A 11

1,30 m ; 1,32 m	1,305 m ; 1,315 m	1,3005 m ; 1,3015 m
Réponses : 1	2	3
1,30 m ; 1,305 m	1,310 m ; 1,315 m	1,3095 m ; 1,3105 m
4	5	6

7-2 Je sais qu'elle a grandi cette année de 2 cm. Entre quelles hauteurs se situe maintenant sa vraie taille ? Entoure le nombre choisi.

A 12

1,32 m : 1,34 m	1,315 m ; 1,325 m	1,325 m ; 1,335 m
Réponses : 1	2	3
1,3295 m ; 1,3305 m	1,3205 m ; 1,3215 m	1,33 m ; 1,335 m
4	5	6

---

8 Complète par le nombre convenable :

8-1 A 13 $(\ldots) + (+3) = (+2)$

8-2 A 14 $(+2) - (\ldots) = (+7)$

8-3 A 15 $(\ldots) \times (+4) = (-8)$

---

9 Quelle est la valeur de a pour que :

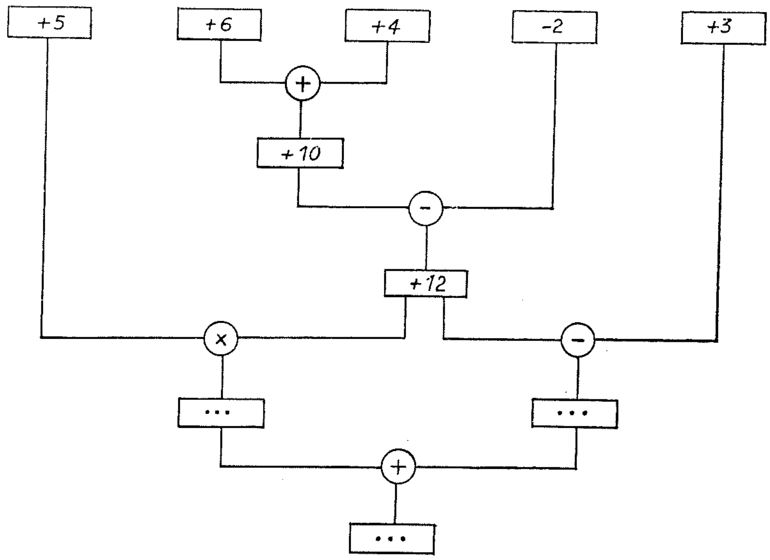
9-1 A 16 $+3 + a = +11 \longrightarrow a = \ldots$

9-2 A 17 $-12 = a + 6 \longrightarrow a = \ldots$

9-3 A 18 $7 \times a = -98 \longrightarrow a = \ldots$

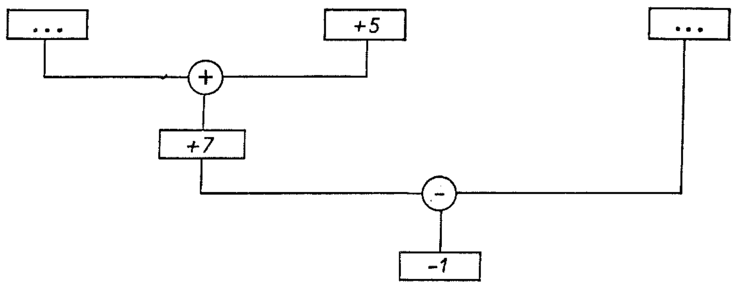
10 Complète les schémas suivants :

10-1



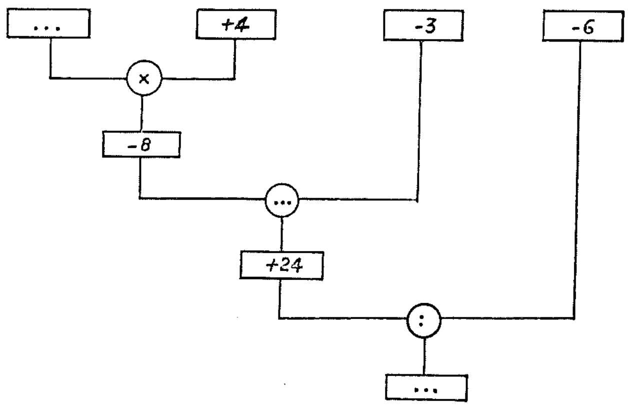
A 19

10-2



A 20

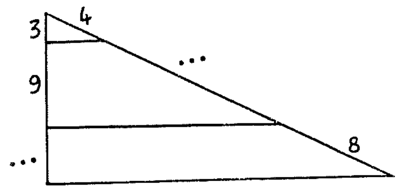
10-3



A 21

11 Complète par des nombres entiers

A 22



12 Prolonge chaque suite par trois termes :

A 23	12-1	5 6 8 11 15 ... ...
A 24	12-2	1 3 9 27 81 ... ...
A 25	12-3	1 5 4 8 7 11 ... ...
A 26	12-4	1 2 5 10 17 26 ... ...
A 27	12-5	100 99 95 86 70 45 ... ...
A 28	12-6	10 5 11 4 13 2 17 —2 25 ... ...

Le second cahier (codé B pour sa première partie et B' pour sa seconde) exige une aptitude à enchaîner des suites logiques et fait appel à des qualités d'analyse et de synthèse implicatives. La deuxième partie (B') mène insidieusement deux types de processus mentaux :

a) reconnaissance d'une certaine relation (comportement plutôt « convergent » selon la terminologie de R. Gras ;

b) suite logique comme dans la première partie (B), (comportement plutôt « extensif ») ; c'est le cas des items 19, 24 et 25 de B'.

Ce second cahier comprend 28 items portant sur des séries progressives avec recherche de lois et d'analogies dans des situations géométriques. La durée du test de ce cahier est de 30 minutes.

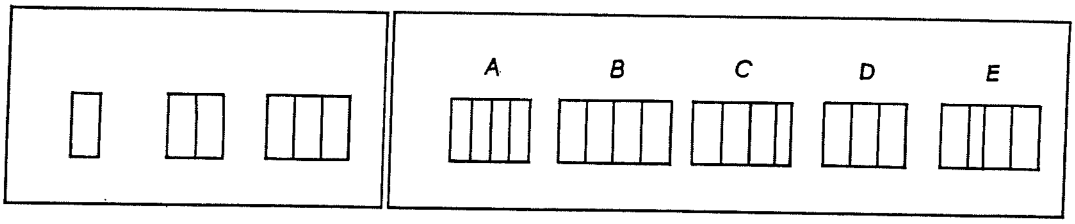
Compte tenu du rôle que jouent les seize premiers exercices (formant la partie B) dans un test d'orientation des enfants du premier cycle, on comprendra qu'on ne peut reproduire ici le texte de ces exercices. Toutefois, on peut savoir que les items B 29 à B 44 sont construits sur le modèle des exemples suivants. Un titre rapide de chacun de ces items pourra être distingué dans la lecture de l'arbre des classifications.

CAHIER 2 : SÉRIES PROGRESSIVES (partie B)

Regardez la première bande de dessins.

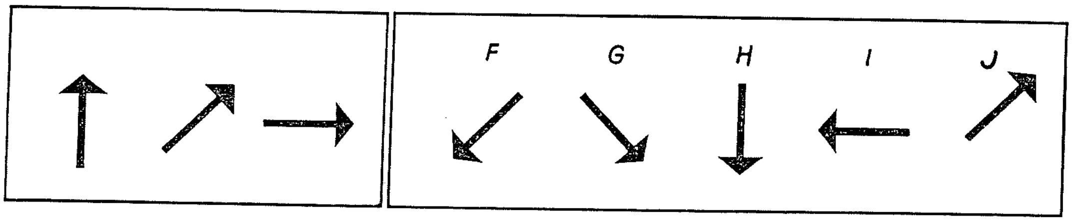
A gauche du trait vertical, les trois figures se suivent dans un certain ordre. Vous remarquez que chacune est formée d'un rectangle de plus que la précédente, et que les rectangles sont tous égaux.

Vous devez trouver, parmi les cinq figures dessinées à droite du trait vertical, celle qu'il faudrait placer à la suite des trois premières pour continuer la série.

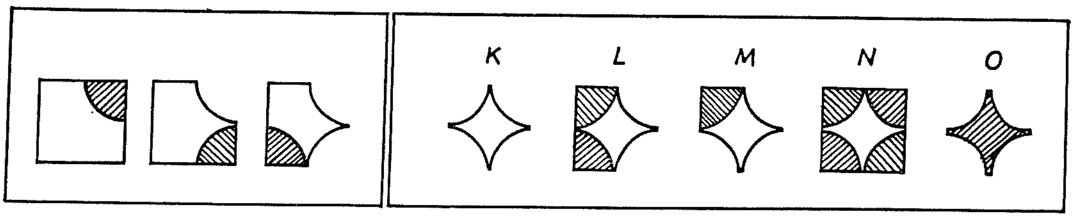


Vous voyez que c'est la figure B qui convient, puisqu'elle est formée de quatre rectangles de mêmes dimensions que ceux qui composent les trois premières figures.

C'est pourquoi on a mis une croix sur la lettre B sur la feuille de réponses, dans la case réservée à l'exemple 1.



Dans cette deuxième bande, les trois premières flèches sont orientées dans des directions différentes. La direction indiquée par une flèche forme avec celle qui est indiquée par la précédente un angle de 45° ; et les flèches tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. La bonne réponse est donc G. Sur votre feuille de réponses et dans la case réservée à l'exemple 2, mettez une croix sur la lettre G.



Cherchez seul la réponse au troisième exercice et sur votre feuille de réponses, dans la case réservée à l'exercice 3, mettez une croix sur la lettre correspondante à la réponse que vous aurez choisie.

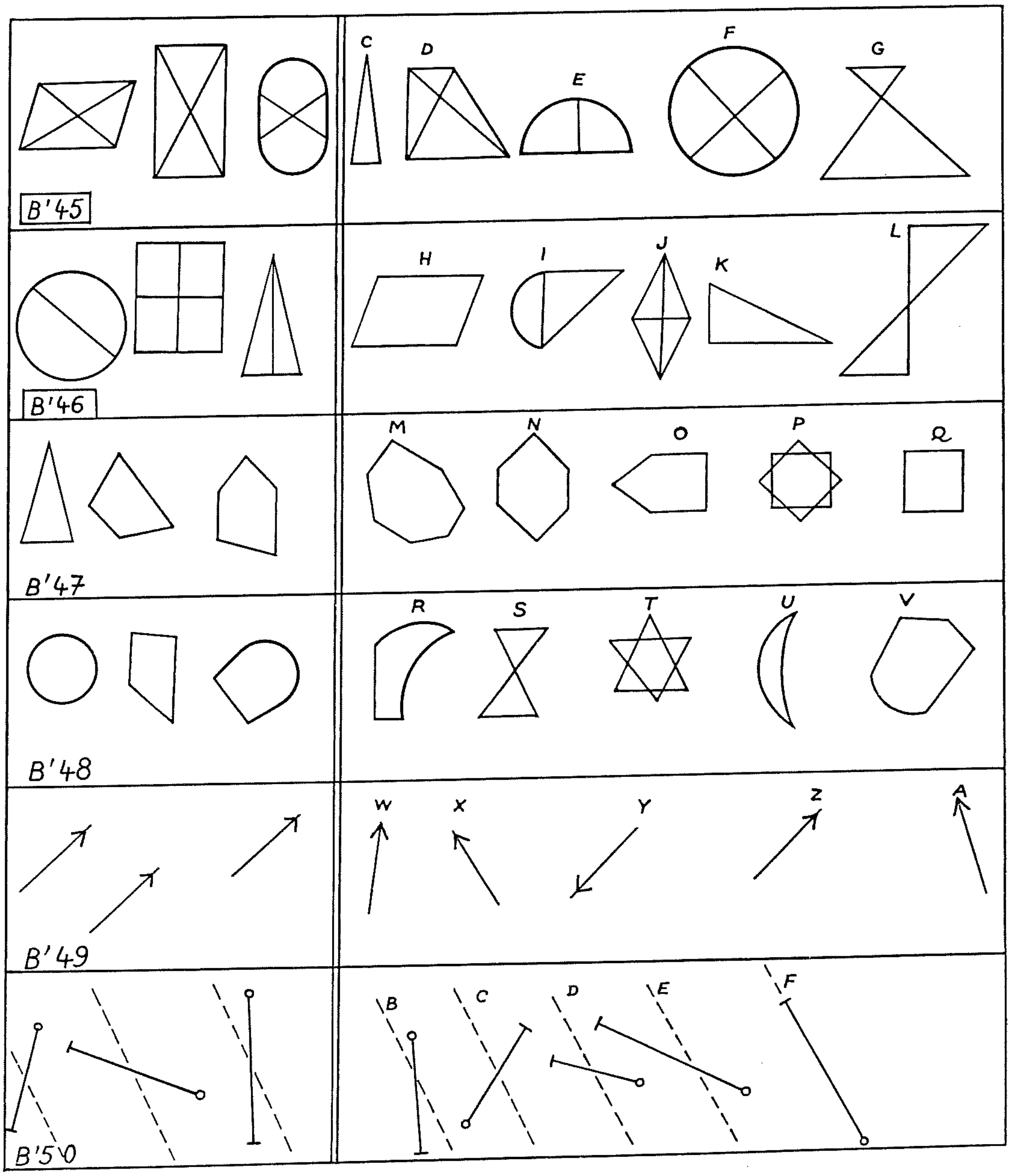
Vous ne devez ni écrire ni faire des marques sur ce cahier.

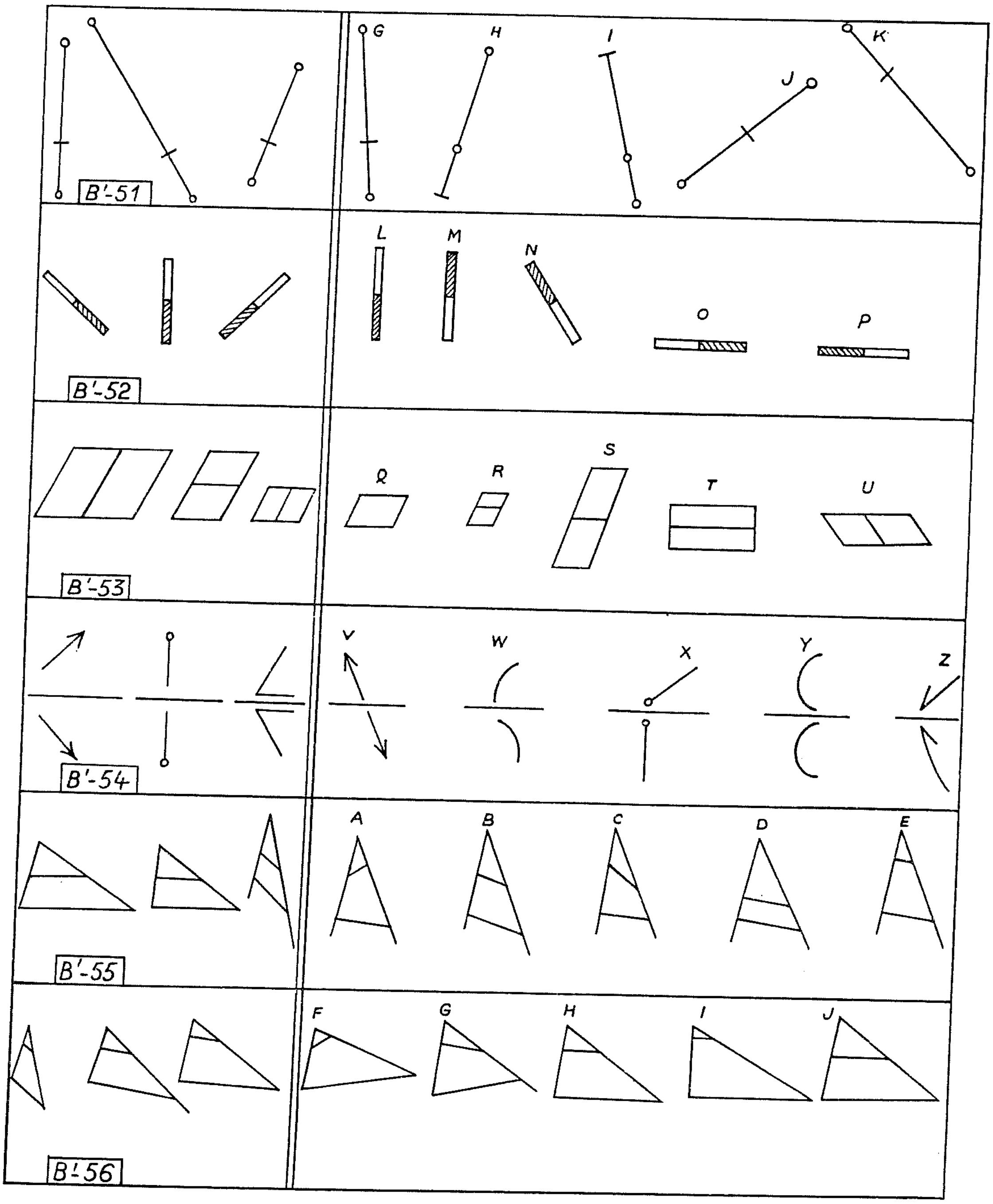
Ne tournez pas la page, attendez le signal

Comme nous venons juste de le signaler ci-dessus, nous ne pouvons pour des raisons de discrétion, reproduire ici les 16 items prélevés dans un cahier de l'I.N.O.P.

CAHIER 2 : SÉRIES PROGRESSIVES (suite, partie B')

Entoure la réponse qui te paraît avoir le plus d'analogies avec les trois figures proposées ou qui en représente une suite logique.




B'-51
G
H
I
J
K
B'-52
L
M
N
O
P
B'-53
Q
R
S
T
U
B'-54
V
W
X
Y
Z
B'-55
A
B
C
D
E
B!56
F
G
H
I
J

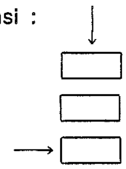
Le troisième Cahier (codé C) exige une excellente observation des phénomènes physiques liés aux ombres donnés par le soleil dont l'effet de perspective est annulé à partir d'une décentration de l'observateur. Ce cahier comporte 8 items précédés de deux exemples sur les propriétés des ombres solaires ; ces propriétés sont généralement de nature affine : parallélisme, convexité, milieu... La durée du test de ce cahier est de dix minutes.

CAHIER 3 : JEUX D'OMBRES

Le soleil rentre dans une pièce par une fenêtre de forme ou de fermeture différentes d'un dessin à l'autre. Il s'agit de prévoir la forme réelle de l'ombre de cette fenêtre sur le sol ou sur un mur, (c'est-à-dire de telle façon qu'on pourrait l'y dessiner à la craie), suivant le cas indiqué par la flèche. Le soleil n'est pas toujours placé de la même façon par rapport à la fenêtre ; sa représentation est toujours donnée ainsi : ☀

On propose cinq solutions pour l'ombre projetée : la flèche indique d'où arrive la lumière.

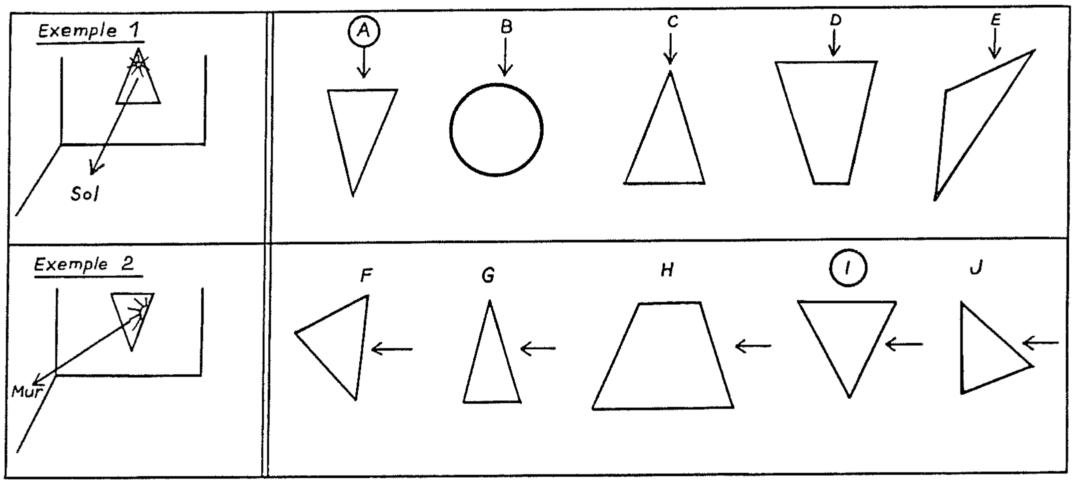
Ainsi :



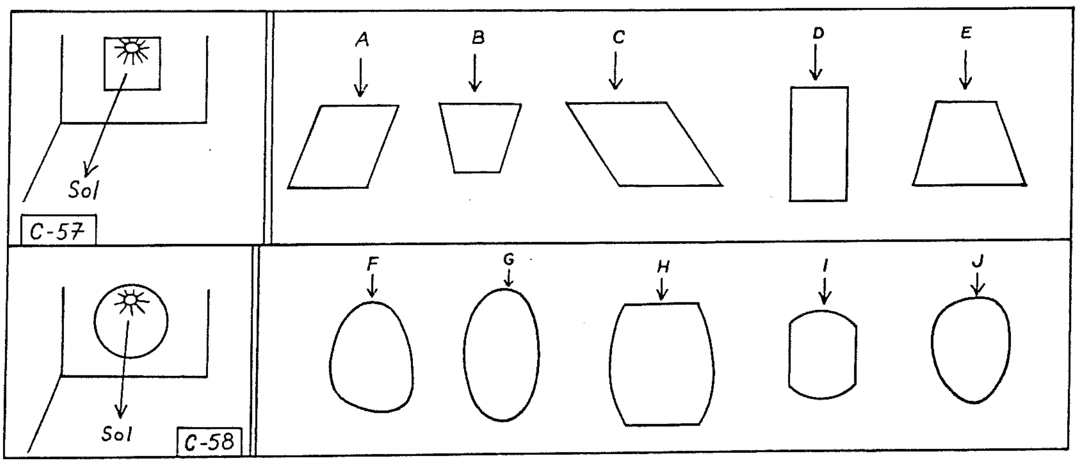
représente une ombre possible sur le sol, la lumière arrivant d'en haut.

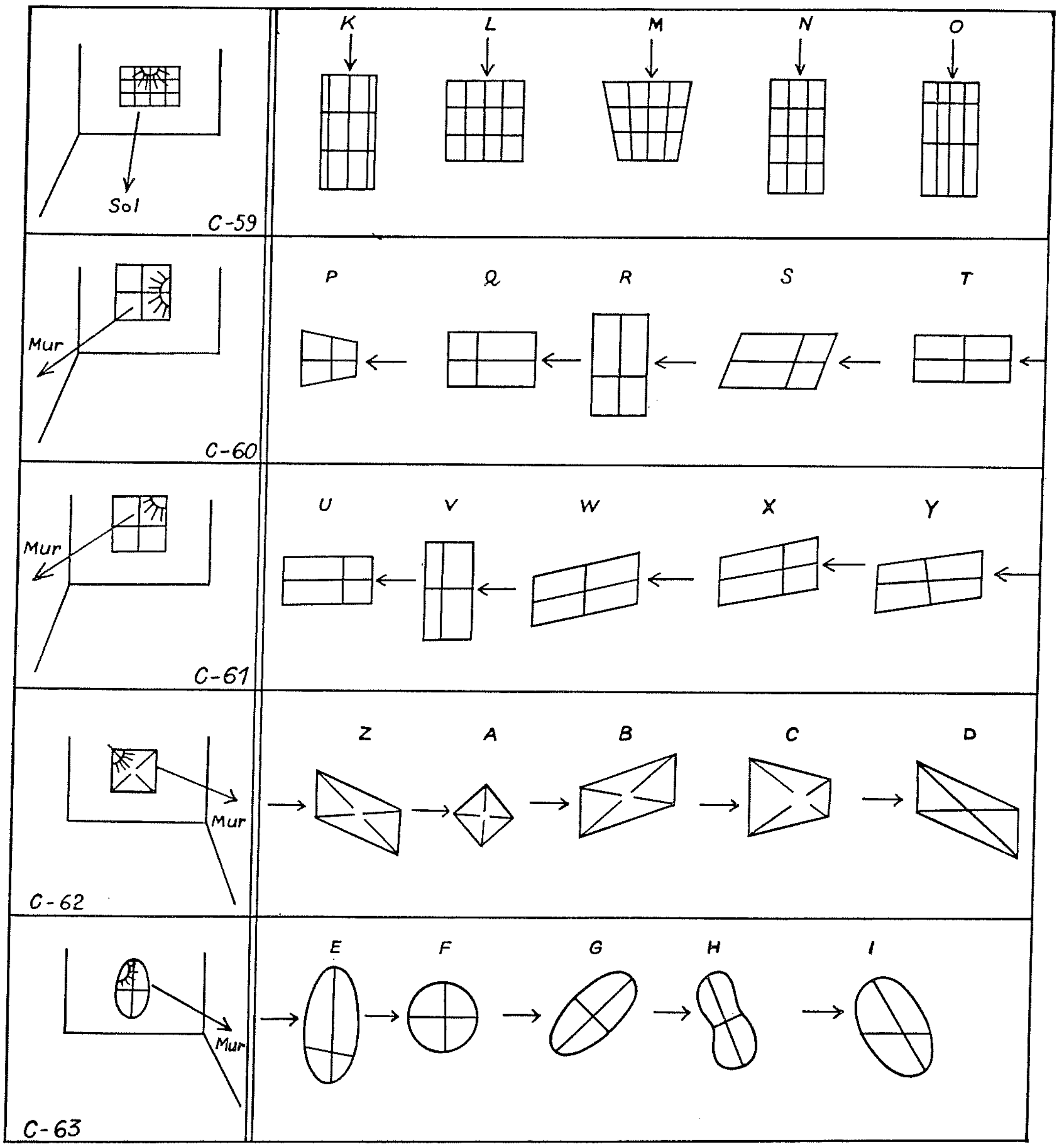
représente une ombre possible sur un mur, la lumière arrivant de droite.

représente une ombre possible sur un mur, la lumière arrivant de gauche.

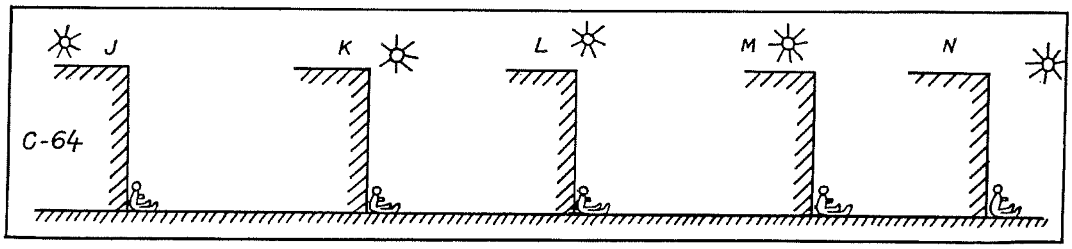


Dans chacun des exercices suivants, entoure le numéro de la bonne réponse comme dans les deux exemples ci-dessus.





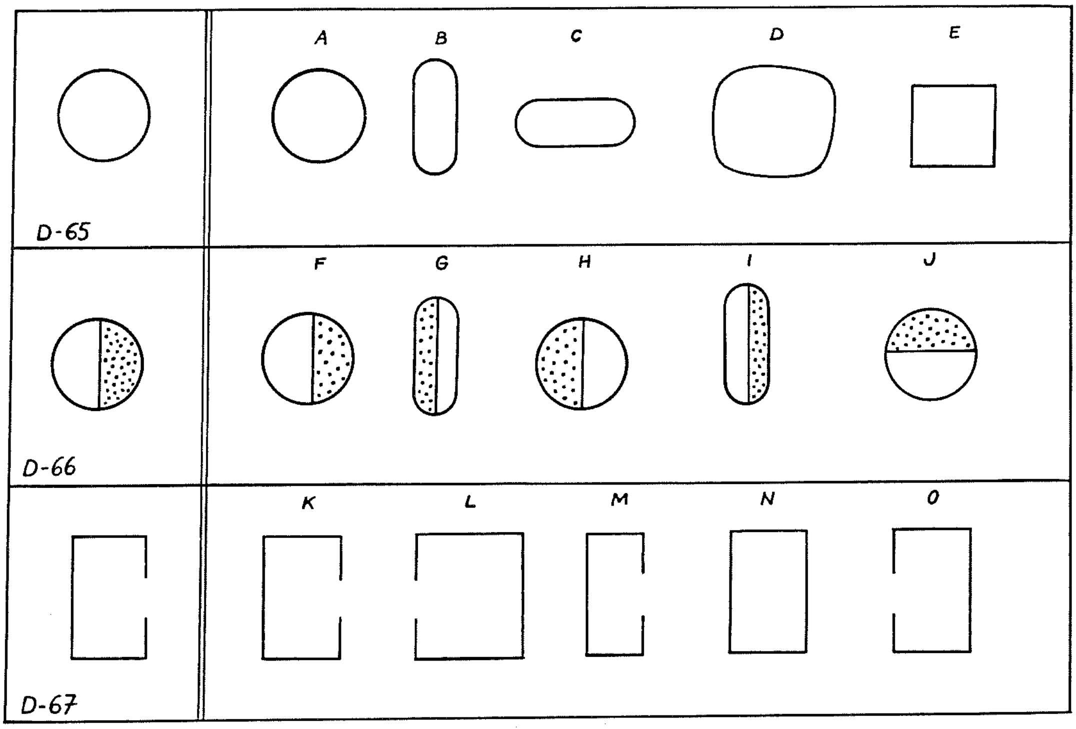
Dans quelle position le soleil donne-t-il plus d'ombre pour le dormeur assis au pied du mur ?

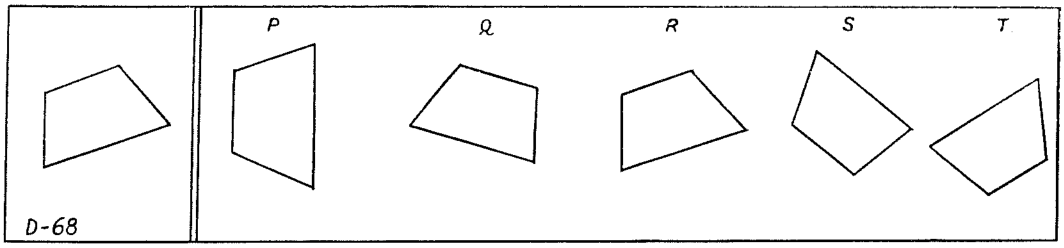


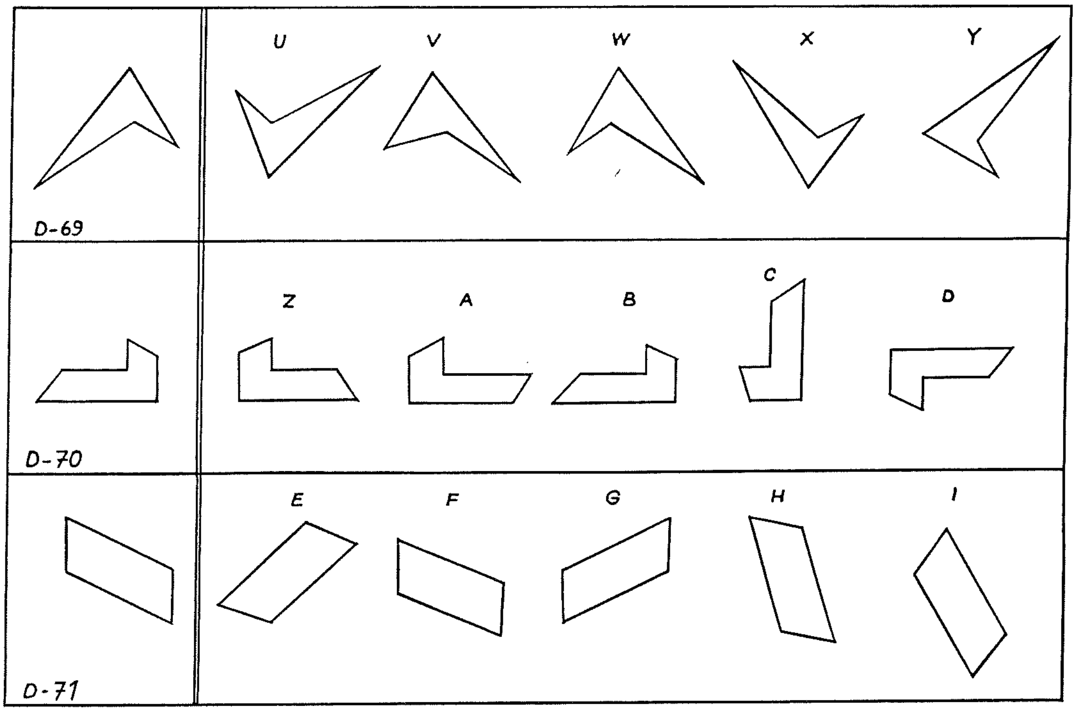
Le quatrième Cahier (codé D) tente de « mesurer » l'aptitude à relativiser son observation par rapport à un système donné de référence (à 1, 2 ou 3 dimensions) ou bien, tout simplement, à appliquer ses connaissances au champ euclidien concret (items 12 et 13 du cahier). Ce cahier comporte 13 items sur des propriétés euclidiennes : mesures, angles, orientation, etc., illustrées par des taches à symétriser. La durée du test de ce cahier est de 20 minutes.

CAHIER 4 : JEUX DE TACHES ET DIVERS (D)

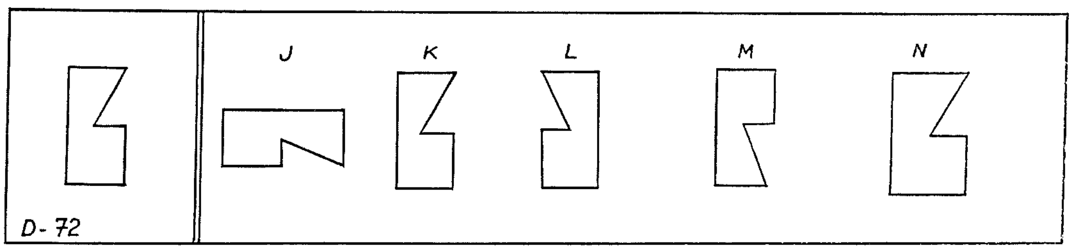
Tu ouvres un cahier sur deux pages blanches. Sur la page de gauche, tu dessines un objet et tu le peins. Tu refermes le cahier et obtiens ainsi, sur la page de droite, une tache colorée de ton dessin. Supposons qu'il n'y ait aucune bavure. Nous allons te demander en fonction de ton dessin quelle tache tu as pu obtenir. A gauche, nous dessinons ce qui est apparu sur la page de gauche ; à droite, tu choisiras parmi cinq propositions quelle tache tu peux obtenir sur la page de droite.



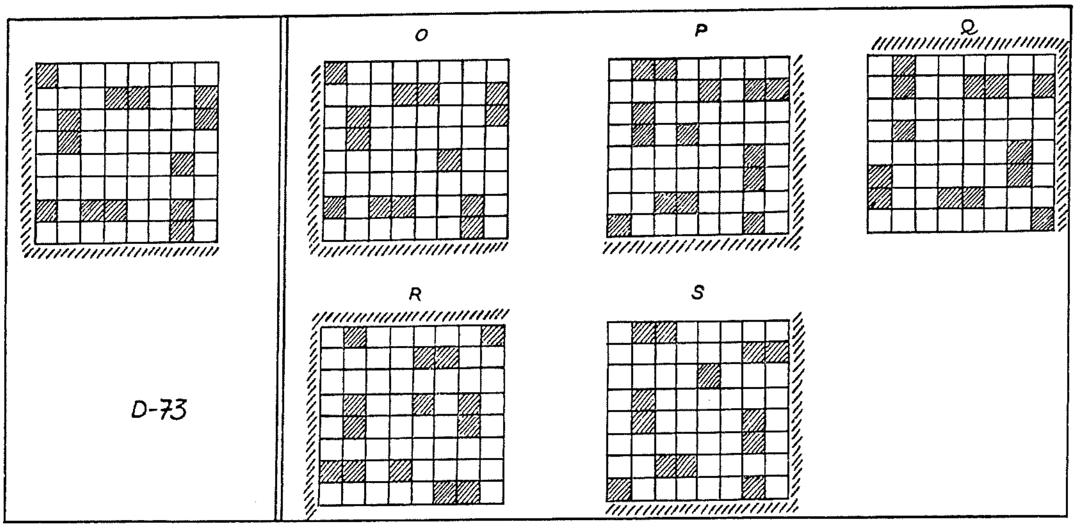




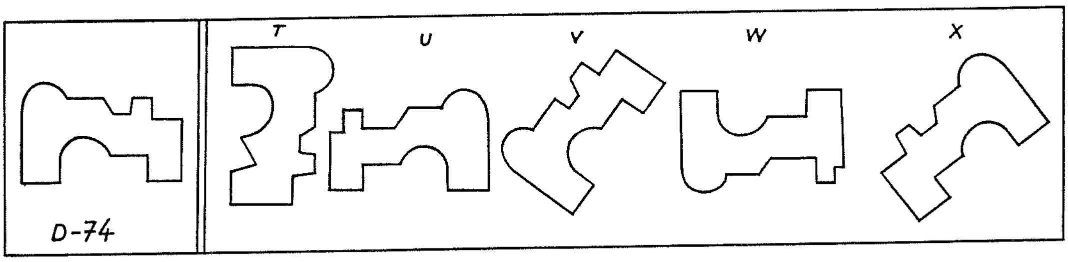
Cette fois, tu appliques une feuille de dessin sur la page droite du cahier où se trouve la tache précédente. A gauche se trouve toujours la figure originale ; reconnaître à droite quelle figure parmi les cinq proposées représente la tache sur la feuille de dessin.



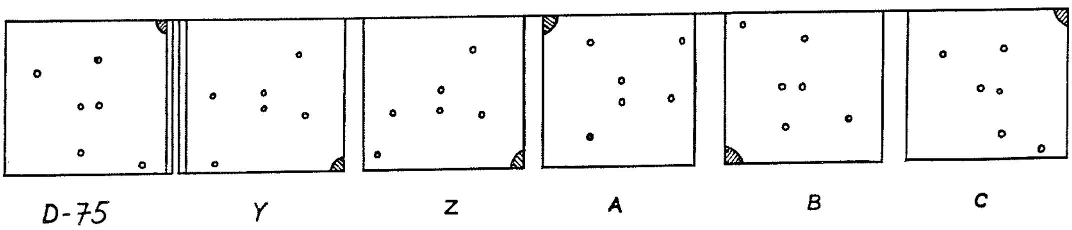
On a dessiné à gauche une grille de mots croisés. Retrouve-la à droite ,sachant qu'elle a pu être déplacée.



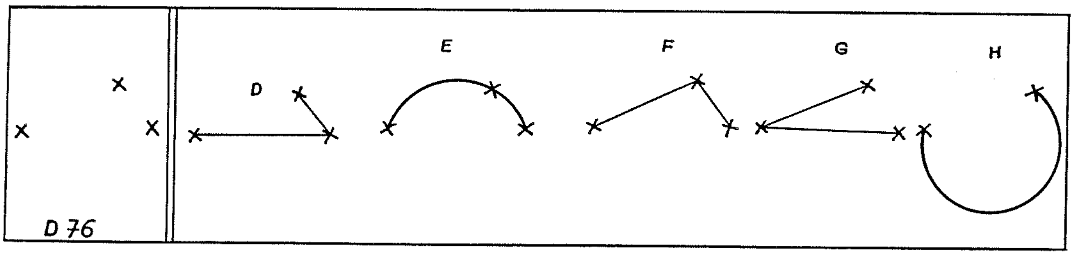
Voici à gauche le dessin d'un objet plat posé sur la table. Pendant que tu te retournes, un camarade peut le faire glisser et le retourner. Reconnais-le dans une nouvelle position à droite.



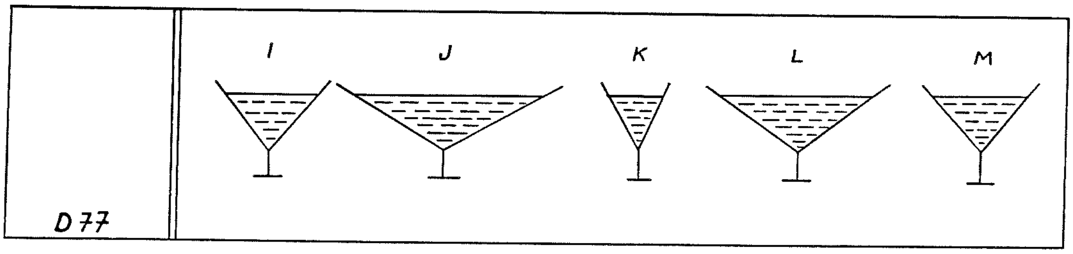
Six billes ont roulé sur la table comme l'indique le dessin de gauche. Tu te déplaces autour de la table et vois alors les billes d'une autre place. Quel dessin parmi les cinq de droite représente ce que tu vois ?



Quel est le chemin le plus court permettant de passer par les trois points marqués d'une croix ?



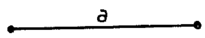
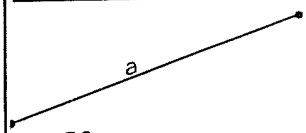
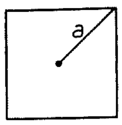
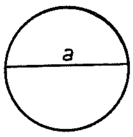
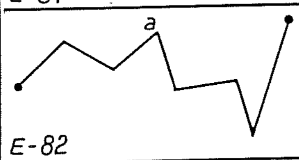
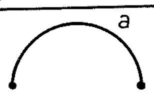
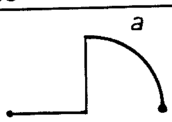
Dans quel verre y a-t-il le plus de liquide ?



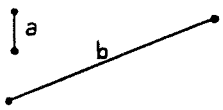
Le cinquième Cahier (codé E) doit permettre de rendre compte de l'intégration du centimètre au champ sensori-moteur de l'enfant (dans des situations à une ou deux dimensions), de l'aptitude à changer d'unité de référence, de la connaissance des algorithmes simples du calcul d'aires et enfin, de l'aptitude à évaluer des objets hors du champ perceptif, c'est-à-dire, évoqués seulement. Ce cahier comporte 18 items sur des estimations de mesures de longueurs ou d'aires d'objets représentés ou évoqués.

CAHIER 5 - EVALUATIONS (E) (1)

Les extrémités d'une ligne a sont marquées par deux points sur la figure de gauche. Quelle est la longueur, au demi-centimètre près de a ? Entoure la bonne réponse.

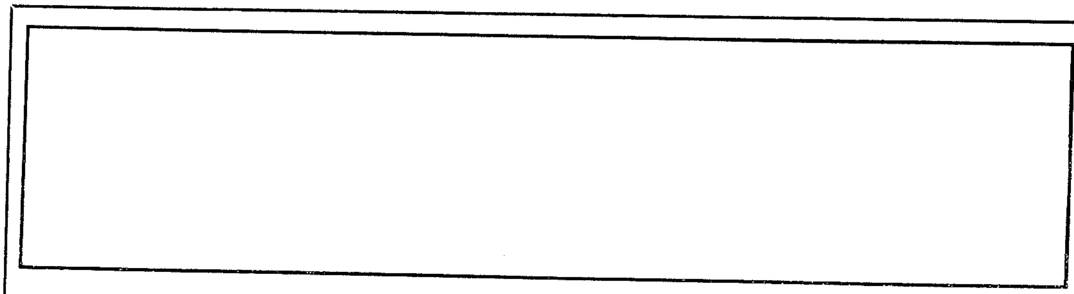
 E-78	A 2 cm	B 3 cm	C 4 cm	D 5 cm	E 7 cm
 E-79	F 3 cm	G 4 cm	H 5 cm	I 6 cm	J 8 cm
 E-80	K 1 cm	L 2 cm	M 3 cm	N 4 cm	O 5 cm
 E-81	P 1 cm	Q 2 cm	R 3 cm	S 4 cm	T 6 cm
 E-82	U 6 cm	V 8 cm	W 10 cm	X 12 cm	Y 14 cm
 E-83	Z 2,5 cm	A 3,5 cm	B 4,5 cm	C 5 cm	D 7,5 cm
 E-84	E 3 cm	F 4 cm	G 5 cm	H 7 cm	I 9 cm

Combien le segment b contient-il de segments tels que a ?

 E-85	J 6	K 4	L 8	M 10	N 12

(1) La nécessité d'une réduction d'échelle pour la reproduction des schémas peut rendre impropre l'évaluation proposée. Toutefois, cela ne gêne pas à la compréhension de la nature de l'exercice.

Quelles sont la longueur et la largeur de la case ci-dessous, au centimètre près ?



O	P	Q	R	S
2 cm et 15 cm	1 cm et 10 cm	3 cm et 20 cm	2 cm et 10 cm	3 cm et 13 cm

E-86

Quelle est environ la hauteur d'un bâtiment scolaire de quatre étages (rez-de-chaussée compris) à toit plat ? Entoure la réponse la plus vraisemblable.

T	U	V	W	X
2 m	4 m	8 m	12 m	24 m

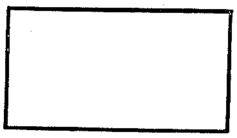
E-87

Quelle est environ la longueur d'une cigarette gauloise ordinaire ? Entoure la réponse la plus vraisemblable.

Y	Z	A	B	C
3 cm	5 cm	7 cm	10 cm	15 cm

E-88

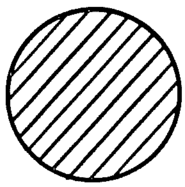
Quelle est l'aire la plus vraisemblable du rectangle dessiné à gauche ?



E-89

D	E	F	G	H
1 mm^2	1 cm^2	4 cm^2	20 cm^2	1 dm^2

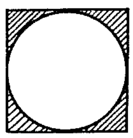
Quelle est l'aire approchée au cm² près du disque représenté à gauche ?



E-90

I	J	K	L	M
1 cm²	3 cm²	5 cm²	10 cm²	1 dm²

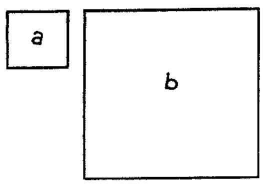
Quelle est l'aire approchée au cm² près de la partie hachurée dans le dessin représentéà gauche ?



E-91

N	O	P	Q	R
1 cm²	2 cm²	3 cm²	5 cm²	10 cm²

Combien le carré b contient de carrés tels que a ?



E-92

S	T	U	V	W
4	6	9	12	25

Quelle est l'aire la plus vraisemblable de cette page de test ?

X	Y	Z	A	B
10 cm²	50 cm²	1 dm²	6 dm²	10 dm²

E-93

Quelle est l'aire la plus proche de celle d'un timbre rouge de 0,50 F actuel ? (Marianne).

C	D	E	F	G
20 cm²	1 cm²	10 cm²	15 cm²	5 cm²

E-94

Quelle est l'aire la plus proche de celle d'une carte postale ordinaire ?

	H	I	J	K	L
	1 dm^2	1,5 dm^2	2 dm^2	2,5 dm^2	3 dm^2
E-95					

IV. — PRÉSENTATION SCHÉMATIQUE DE LA MÉTHODE

Nous allons rappeler l'idée centrale de notre méthode de classification « hiérarchique » ainsi que ses différentes étapes et leur reflet sur le traitement considéré.

La notion centrale que nous faisons intervenir à tous les niveaux de la recherche d'un arbre des classifications est celle d'indice de proximité entre structures finies de même type. Pour établir cette notion on a emprunté en le précisant un vieux principe de la Statistique selon lequel il n'y a lieu de retenir dans l'évaluation de la proximité, à partir d'un indice « brut », que ce qui peut être significatif par rapport à une hypothèse d'absence de lien respectant les caractéristiques de cardinalité des structures mises en jeu. C'est ainsi que nous introduisons une notion de « vraisemblance » dans celle de « ressemblance » entre structures.

Relativement à un tableau de données à double entrée croisant un ensemble V de variables descriptives et un ensemble E de sujets la méthode permet l'organisation en classes et sous-classes de V quel que soit le type commun des variables composant V, c'est-à-dire, le type de structure que la variable définit sur E. Cette organisation permet la découverte des tendances principales du comportement de la population dont E représente un échantillon.

La méthode est ici appliquée dans le cas où V est considéré comme formé d'attributs descriptifs. Un même attribut a (qui correspond ici à une question donnée) est représenté par la partie E_a des sujets de E qui possèdent a (qui ont répondu exactement à la question, dans notre cas), de sorte que l'ensemble A des attributs de description sera regardé comme un échantillon de points dans l'ensemble P (E) des parties E.

Le point de départ de la méthode est la détermination du tableau carré des proximités sur A ; où relativement à un couple (a, b) d'attributs, on introduit l'indice brut $s(a, b) = \mathrm{card}(E_a \cap E_b)$ où E_a, (resp. E_b) est l'ensemble des sujets possédant a (resp. b). Conformément au principe ci-dessus énoncé, l'indice définitif prend la forme

$$P(a,b) = \mathrm{Prob.}^N \left\{ S < s(a,b) \right\} \quad , \qquad (1)$$

où S est la variable aléatoire associée à s dans une hypothèse N d'absence de lien, adéquate : qui tient compte des caractéristiques de cardinalité des structures à comparer ; soit, ici $n_a = \mathrm{card}(E_a)$ et $n_b = \mathrm{card}(E_b)$. L'indice P (a, b) s'obtient en fait à partir de la formule

$$P.(a,b) = \Phi \left[Q(a,b) \right] \quad , \qquad (2)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où Q (a, b) s'obtient en « centrant » et en « réduisant » s par rapport à l'hypothèse N

$$Q(a,b) = \frac{s - \mu_{ab}}{\sigma_{ab}} \quad , \qquad (3)$$

Cependant il y a trois formes « voisines » de l'hypothèse d'absence de lien ayant un caractère symétrique par rapport à a et b, qui conduisent à trois expressions, d'ailleurs proches, de l'indice Q (a, b). Mais à travers les nombreuses expériences menées, l'hypothèse N_1 qui a fourni les résultats les plus cohérents dans leurs nuances conduit à l'expression suivante de l'indice

$$Q_1(a,b) = \frac{s - \frac{n_a n_b}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_b}{n}}} \quad , \qquad (4)$$

Cette notion de proximité entre deux attributs descriptifs est généralisé dans la méthode à la notion de proximité entre deux variables descriptives de même type (au sens de la structure induite sur E), quel que soit ce dernier.

La notion de proximité entre deux variables est alors étendue à celle, entre deux classes C et D de variables où le rôle de l'indice brut de proximité sera joué par

$$p(C, D) = \max\{ P(c, d) \mid (c, d) \in C \times D \} \qquad (5)$$

celui, définitif, où on se réfère à une hypothèse d'absence de lien adéquate, prend la forme suivante

$$P(C, D) = (p(C, D))^{lm} \qquad (6)$$

où l = card (C) et m = card (D).

L' « algorithme de la vraisemblance du lien » (A. V L.) établit à partir de cette proximité entre classes, l'arbre détaillé des classifications où à chaque niveau les paires de classes les plus voisines sont réunies. Cet arbre est en général quasiment binaire et comporte presque autant de niveaux que l'ensemble à classifier a d'éléments.

Une étape décisive de la méthode consiste à condenser l'arbre aux niveaux où se produit un « nœud significatif » et ce, au moyen d'une statistique de proximité, obéissant au principe ci-dessus énoncé, entre une forme adéquate de l'information quant aux ressemblances des éléments de l'ensemble à classifier et l'association correspondante au nœud. On introduit en fait, relativement à un même niveau i de l'arbre des classifications, deux statistiques : l'une « globale » $\mathcal{S}_i$, qui rend compte de l'adéquation de la partition obtenue au niveau i, et l'autre « locale » $\mathcal{L}_i$ qui « mesure » le degré de signification de l'association qui se produit au niveau i, par rapport à l'ensemble des paires restant séparées à ce niveau. D'ailleurs le comportement de $\mathcal{L}_i$ le long de la suite des niveaux est quasiment le même que celui du taux d'accroissement $\theta_i = (\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i-1})$ de la statistique globale. Les nœuds significatifs correspondent aux associations qu'accompagnent des maxima locaux de $_i$ (resp. θ_i). Nous avons représenté ci-après l'arbre condensé aux niveaux où apparaît un nœud significatif que nous avons marqué par *.

Terminons ce point en précisant les expressions de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{L}$. Pour se ramener à la comparaison de deux structures de même type dans la recherche d'une mesure d'adéquation entre une partition π (éventuellement produite à un niveau de l'arbre) et l'information quant aux ressemblances de l'ensemble A à classifier on ne retient de la définition de l'indice de proximité sur A que le préordre total associé sur l'ensemble B des paires d'éléments distincts de A (i.e. des parties à deux éléments de A), appelé préordonnance sur A et défini de la façon suivante :

$$(\forall (p,q) \in B \times B) \ , \ p < q \iff Q(p) < Q(q) \ , \qquad (7).$$

Pour l'indice Q que nous adoptons (cf. formule [3]), la préordonnance associée w(A), se réduit le plus souvent dans la pratique, à une ordonnance ; ordre total sur B. w (A) sera représenté par la partie gr (w) de B × B définie par

$$gr(w) = \left\{ (p,q) \in B \times B \ / \ p < q \text{ et non } q < p \text{ pour } w(A) \right\} \ , \qquad (8).$$

La partition π sur A est regardée comme définissant un préordre total sur B à deux classes S (π) et R (π) où S (π) est l'ensemble des paires séparées et où R (π) est celui des paires réunies par la partition π. S (π) < R (π) pour l'ordre quotient ; ainsi π sera représentée dans B × B par le rectangle

$$S(\pi) \times R(\pi) \ , \qquad (9).$$

L'indice brut de proximité entre la partition et la préordonnance sera dans ces conditions

$$s(w, \pi) = \text{card} \left\{ gr(w) \cap (S(\pi) \times R(\pi)) \right\} \ , \qquad (10) ;$$

celui définitif prend la forme

$$\mathcal{S} = \frac{\left[s(w, \pi) - r(\pi) \times s(\pi) / 2 \right]}{\sqrt{r(\pi) \times s(\pi) (b+1) / 12}} \ , \qquad (11)$$

où r (π) = card (R (π)), s (π) = card (S (π)) et b = r (π) + s (π) = card (B). $\mathcal{S}$ est obtenu en centrant et en réduisant s (w, π) par rapport à l'hypothèse d'absence de lien où π est un élément aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les partitions d'un même type. Dans le cadre d'une telle hypothèse, nous démontrons que $\mathcal{S}$ peut être considérée comme une réalisation d'une variable aléatoire $\mathcal{N}$ (0,1).

De la même façon, l'indice brut de proximité qui conduit à $\mathcal{L}_i$ se met sous la forme

$$\mathcal{L}_i = \text{card} \left\{ gr(w) \cap (S(\pi) \times R'(\pi_i)) \right\} \ , \qquad (12),$$

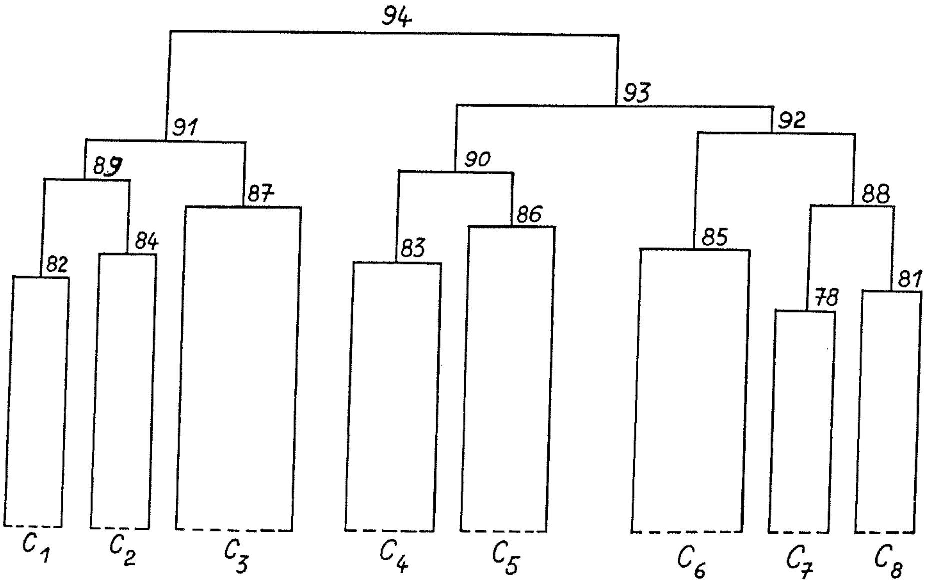
où R' (π_i) est l'ensemble des paires réunis pour la première fois au niveau i.

Pour mieux contrôler l'interprétation, nous associons à chaque variable son degré de « neutralité » par rapport à une visée classificatoire, qu'on « mesure » par la petitesse de sa variance des proximités aux autres variables selon la formule

$$\mathcal{V}^2(a) = \frac{1}{(\text{card}(A) - 1)} \sum_{c \in A - \{a\}} (Q(a,c) - \bar{Q}(a))^2 \ , \qquad (13),$$

où $\bar{Q}(a)$ est la moyenne des $\left\{ Q(a,c) \ / \ c \in A - \{a\} \right\}$.

La présence d'attributs neutres dans une classe peut expliquer la difficulté de son interprétation.



V. — L'INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

C'est l'indice Q_1 (a, b) (cf. § 4 ci-dessus) qui a été utilisé pour définir l'indice de proximité entre items. La condensation de l'arbre des classifications obtenu par l'Algorithme de la vraisemblance du Lien conduit à retenir 20 associations significatives sur les 94 données par l'arbre total. On se limitera ici à l'interprétation de l'arbre condensé aux 20 niveaux qui se présente globalement comme suit, où nous avons précisé les niveaux de formation des huit différentes classes spécifiées dont nous suivrons bientôt le détail sur l'arbre condensé reproduit à la fin de ce paragraphe.

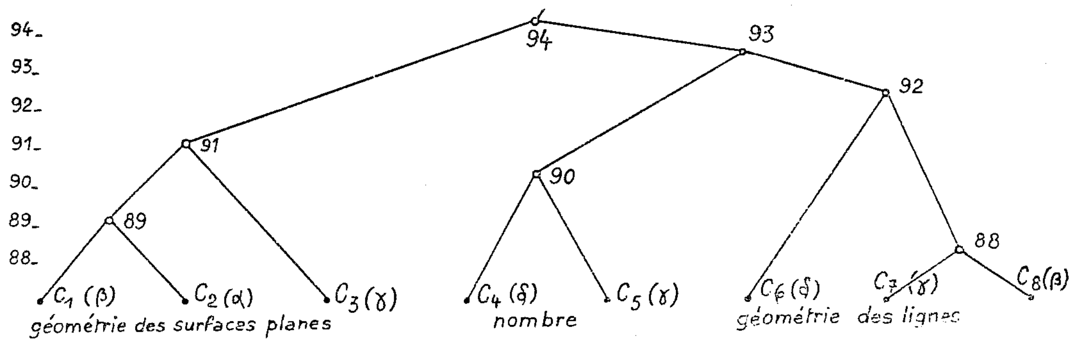
Comme on pourra le constater une telle classification s'accorde assez difficilement avec celle en cahiers. Heureusement d'ailleurs ! car dans le cas contraire où il y aurait accord parfait le « gain d'information » que nous fournirait la classification aurait été sensiblement moindre...

Par contre, lorsqu'on confronte notre classification avec celle en objectifs cognitifs telle qu'elle a été précisée au paragraphe 2 ci-dessus, on obtient le tableau suivant des effectifs des classes de la partition croisée.

	α	β	γ	δ	η
C_1		6	2		
C_2	8				
C_3			14		
C_4			3	11	
C_5			14	2	
C_6		1		17	
C_7			8		
C_8	9				

A l'exception d'un seul item de la classe C_6 qui a sans doute été classé à tort au niveau de la taxinomie (nous y reviendrons), chacune des classes C_i ($1 \leqslant i \leqslant 8$) contient des items d'un même niveau ou de deux consécutifs dans l'échelle cognitive (α, β, γ, δ, η).

L'accord entre les deux classifications est donc excellent. Mais il est important également de noter que la couleur d'une même classe reste dominée par un thème mathématique donné, on peut dans ces conditions schématiser l'arbre de la façon suivante.



On suivra à partir de maintenant l'interprétation sur l'arbre condensé ci-après.

1 — Examen de la classe C_1 U C_2 U C_3 et de ses composantes

La classe C_1, dont le niveau dominant est, β, est peut-être celle la moins homogène ; elle est d'ailleurs composée de variables très neutres. Pourtant, à travers tous les items la composant, il s'agit principalement d'analyser un fait mathématique et de le transposer. Le fait a un caractère concret même pour la question concernant le passage d'un diagramme sagittal à celui cartésien. La maîtrise que l'élève a sur le fait s'exprime par la substitution graphique, représentative d'une action ou d'une manipulation. En particulier, on trouve dans cette classe associées les deux paires d'items 3, D 77 } et { D 73, D 74 } qui reflètent parfaitement ce type d'aptitude. D'autre part, en ce qui concerne l'item E 87 (hauteur d'un bâtiment de quatre étages), il est envisagé par les enfants, comme un problème non pas à une mais à deux dimensions, car l'objet est bien appréhendé de cette façon dans son évocation.

La classe C_2 a tous ses items correspondants au niveau α de la taxinomie. Ces derniers supposent une action effectuée mentalement ou physiquement par les enfants ; la tache de peinture sur une page qui est reproduite sur une autre, est vécue au niveau sensori-moteur. La différence entre les diverses associations dans cette classe tient à la position de l'objet considéré :

Une première sous-classe { B' 50, D 65, D 66, D 67 } réunit des questions où seule la configuration gauche droite est à examiner. Bien qu'il corresponde à une symétrie centrale, la présence de l'item B'50 dans cette classe montre que c'est à tort que D 65, D 66 et D 67 ont été d'abord interprétés comme un « pliage » dans un espace à deux dimensions.

La deuxième sous classe { D 68, D 69, D 70, D 71 } se distingue de la première en ce que les lignes de référence ne sont plus les bords de la feuille, haut-bas d'une part, gauche-droite d'autre part, doivent simultanément intervenir.

La classe C_3 est formée uniquement d'items relevant du niveau γ de la taxinomie, lesquels demandent une compréhension des relations ou structures dans certaines situations géométriques. Cette compréhension pouvant être testée dans des situations familiales. Deux sous classes qui se distinguent par la nature de l'objet traité composent C_3 :

Une première formée surtout d'items du troisième cahier : ombres de différentes formes données par le soleil. La compréhension des questions de ce cahier suppose celle d'un long texte préambule qui introduit un facteur verbal non négligeable. C'est sans doute ce facteur qui intervient pour introduire dans cette classe l'item D 72 qui est pourtant de même nature que les items D 65, ..., D 71 qui le procèdent.

La deuxième sous classe de C_3 porte sur l'évaluation d'aires de formes planes diverses. Toutefois, on note dans cette classe la présence de l'item E 85 où il s'agit d'évaluation unidimentionnelle ; pourtant la présence de cet item s'accorde très heureusement avec celle de E 92 sous-tendu par une branche voisine. En effet, dans les deux cas, l'unité de longueur ou d'aire n'est ni le centimètre ni le centimètre carré et il s'agit par conséquent d'itérer par rapport à une nouvelle unité. Le fait que E 85 soit sous tendu par la première branche de cette sous classe de C_3 et que E 92 soit sous-tendu par la deuxième branche, correspond à ce que ces deux items procèdent de deux niveaux différents de complexité. C'est également cette opération d'itération par rapport à une unité de mesure qui provoque la réunion de E 92 à E 94 (aire d'un timbre évoqué). On notera enfin d'autres associations d'items deux à deux de contenu voisin. : E 90 et E 91, E 93 et E 95.

2 — Examen de la classe $C_4 \cup C_5$ et de ses composantes

Il s'agit ici, de façon générale, de découvrir, dans des situations numériques, des algorithmes ou de nouvelles relations. Ces situations exigent une bonne compréhension des concepts sous-jacents.

Les items proposés dans la classe C_4 qui sont surtout de niveau δ, font appel à l'imagination des enfants ; analyse et synthèse des faits mathématiques observés sont indispensables, un élément de créativité les complète. On ne s'étonnera donc pas d'avoir une classe de bonne cohésion ponctuée par six nœuds significatifs correspondants à six maxima de la statistique locale des niveaux. Examinons les constituants de cette classe :

Un premier agrégat réunit les trois items A 2, A 3 et A 4 qui supposent la découverte d'une relation implicite et son expression verbale.

Les deux items A 11 et A 12 sont très proches et reliés dès le premier niveau. On est surpris de rencontrer ensuite dans la classe deux items B 41 et C 58 associés à un niveau relativement relevé. Toutefois, l'item B 41 « prolonger un labyrinthe » met en œuvre un processus opératoire voisin de celui dont il va être question maintenant.

Une dernière sous classe très cohérente (quatre nœuds significatifs) groupe les sept derniers items du cahier A : A 22 à A 28. Il n'est pas étonnant de rencontrer ici l'item A 22 que les enfants ont réellement considéré comme un problème de prolongement de deux suites arithmétiques. R. Gras s'interroge dans ces conditions sur la possibilité d'extraire, par ce biais, une présentation de l'axiome de Thalès.

La classe C_5 est principalement formée d'items de niveau γ. Ces derniers ont maintenant une forme plus scolaire : applications, équations, expression arithmétiques, etc...

Une première classe est essentiellement formée d'items mettant en jeu la notion d'application. Cette classe se décompose d'ailleurs en deux sous classes dont la première fait appel à la notion d'application directe et dont la seconde, ponctuée d'ailleurs par un nœud significatif, se réfère à la notion de relation réciproque ou de contre-image (items A 8, A 10 et A 9). La classe qui s'achève de façon cohérente (nœud significatif) se lie à la suivante avec un nœud significatif.

La seconde classe composante de C_5 relève des opérations algébriques : résolution d'équations ou complétion d'organigrammes selon le processus d'équation à trou. On note l'association deux à deux, modulo 3 pour les indices des items, des six équations proposées : A 13 et A 16, A 14 et A 17, A 15 et A 18. Ces associations confirment les hypothèses didactiques qui ont prévalu à l'élaboration de ces questions.

3 — Examen de la classe $C_6 \cup C_7 \cup C_8$ et de ses composantes

L'objet ici considéré est généralement unidimensionnel, mais, même lorsque ce n'est pas tout à fait le cas, le traitement qui en est fait est dynamique : les transformations de géométrie affine y sont sous-jacentes.

La classe C_6 comporte presque exclusivement des items de niveau δ. Pour cette grosse classe de 18 items qui regroupe la majorité des items du sous cahier B, le classement au niveau δ se justifie par la nécessité pour l'élève d'analyser une situation évolutive, d'en dégager les constantes et les variables, d'en découvrir la loi de formation et de la mettre à l'épreuve. On ne doit pas être choqué de la présence dans cette classe de l'item D 75 dont la solution fait appel à certains aspects de l'aptitude dont il est question ici, puisqu'il s'agit de suivre l'évolution d'une configuration jusqu'à reconnaître dans la suite celle donnée.

On a pu noter dans les examens précédents la place importante que détient ce cahier B au niveau du facteur intelligence, rotation, symétrie, translation, homothétie sont les transformations sous-jacentes aux items de B. Ce sont ces transformations qu'on a introduites dans les questions B' 52, B' 53 et B' 54 qu'on retrouve associées à cette classe qui contient aussi B' 47. Ces derniers items sont les seuls de B' à avoir été construits sur le modèle de ceux de B ; le traitement qu'en font les enfants s'en ressent en conséquence.

La classe C_7, formée d'items de niveau γ, regroupe les items de B' à l'exception de cinq d'entre eux plus naturellement associés à d'autres items pour des raisons de complexité ou de netteté de l'objet à traiter. La méthode de résolution par analogie ou par analyse du contenu, provoquent dans C_7 des associations significatives, ainsi B' 55 et B' 56 où l'homothétie est très évidente ; B' 45 et B' 46 où on met en évidence, par le tracé d'axes de symétrie, d'un centre ou d'un axe d'équilibre.

La classe C_8 est formée d'items de niveau α. Ici l'action de l'enfant sur les objets à une dimension à évaluer, est directe ; elle s'exerce par un report physique ou mental de l'unité sur l'objet qui est confondu avec sa représentation ou son évocation. Les items E 78 à E 88, à l'exception de E 85 déjà classé, s'inscrivent dans l'ordre de leur apparition dans le questionnaire. C'est une hiérarchie tout à fait naturelle , confirmée par celle de la complexité croissante recherchée par l'auteur des questions : E 78 et E 79 visent à évaluer la mesure d'un segment isolé ; E 80 et E 81 concernent la mesure d'un segment intégré dans une figure, l'association à un niveau supérieur de

Représentation de l'arbre condensé à ses niveaux les plus significatifs ; les nœuds significatifs sont marqués *

Arbre de répartition des items.

Classification Lerman, test national, entrée quatrième.

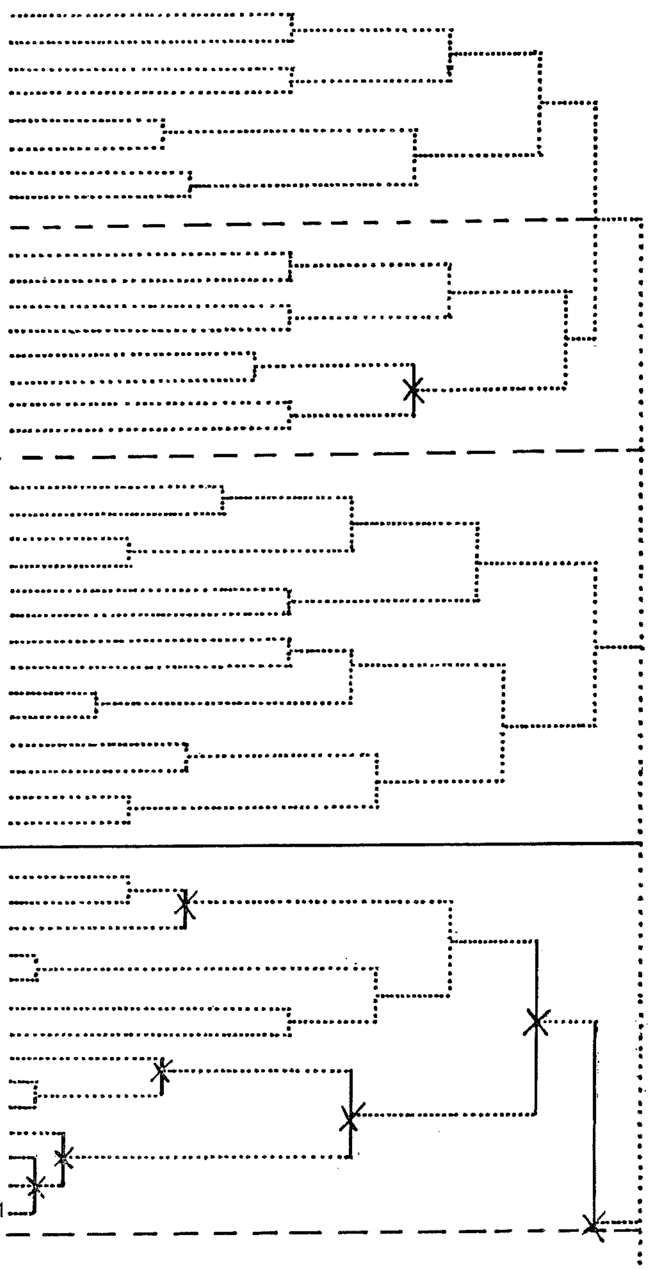
Niveaux 1 A 20

C_1
- A 1 Dét. diag. cartésien d'une relation
- E 87 Hauteur bât. 4 étages, toit plat
- D 76 Chemin le plus court.
- D 77 Verre de plus grande contenance
- C 61 Ombre 4 car sur mur gauche, soleil haut
- C 62 Ombre 4 triangles ouverts
- D 73 Grille mots croisés
- D 74 Objet, glissement, retournement

C_2
- B'50 Symétrie PT, 2 demi plans
- D 65 Symétrie cercle
- D 66 Symétrie 2 demi cercles
- D 67 Symétrie rectangle ouvert
- D 68 Cahier referme trapèze
- D 69 Cahier referme quadrilatère
- D 70 Cahier referme hexagone
- D 71 Cahier referme parallélogramme

C_3
- C 57 Ombre carré sur sol
- D 72 Double tache, même figure
- C 60 Ombre 4 car sur mur gauche, soleil milieu
- C 63 Ombre ovale sur mur droit
- C 59 Ombre carreaux sur sol
- C 64 Position soleil pour ombre maximum
- E 85 Segment B multiple de A
- E 89 Aire du rectangle dessiné
- E 90 Aire du disque dessiné
- E 91 Aire carré moins disque
- E 92 Combien carrés A dans carré B
- E 94 Aire d'un timbre rouge 0,50 F
- E 93 Aire de la page de test
- E 95 Aire carte postale ordinaire

C_4
- A 2 Lien verbal de relation, même fin que
- A 3 Lien verbal de relation, même som. que
- A 4 Admet un diviseur commun avec
- A 11 Taille mesurée avec erreur
- A 12 Grandi, taille mesurée avec erreur
- B 41 Prolonger labyrinthe
- C 58 Ombre cercle sur sol
- A 22 Compléter par nombres entiers (Thalès)
- A 27 Prolonger suite U (N + 1) = U (N) — N**2
- A 28 Prolonger suite U (N + 2) = U (N) + 2**N
- A 23 Prolonger suite U (N + 1) = U (N) + N
- A 24 Prolonger suite U (N + 1) = 3 U (N)
- A 25 Prolonger suite U (N) = U (N — 2) + 3
- A 26 Prolonger suite U (N + 1) = U (N) = 2N — 1

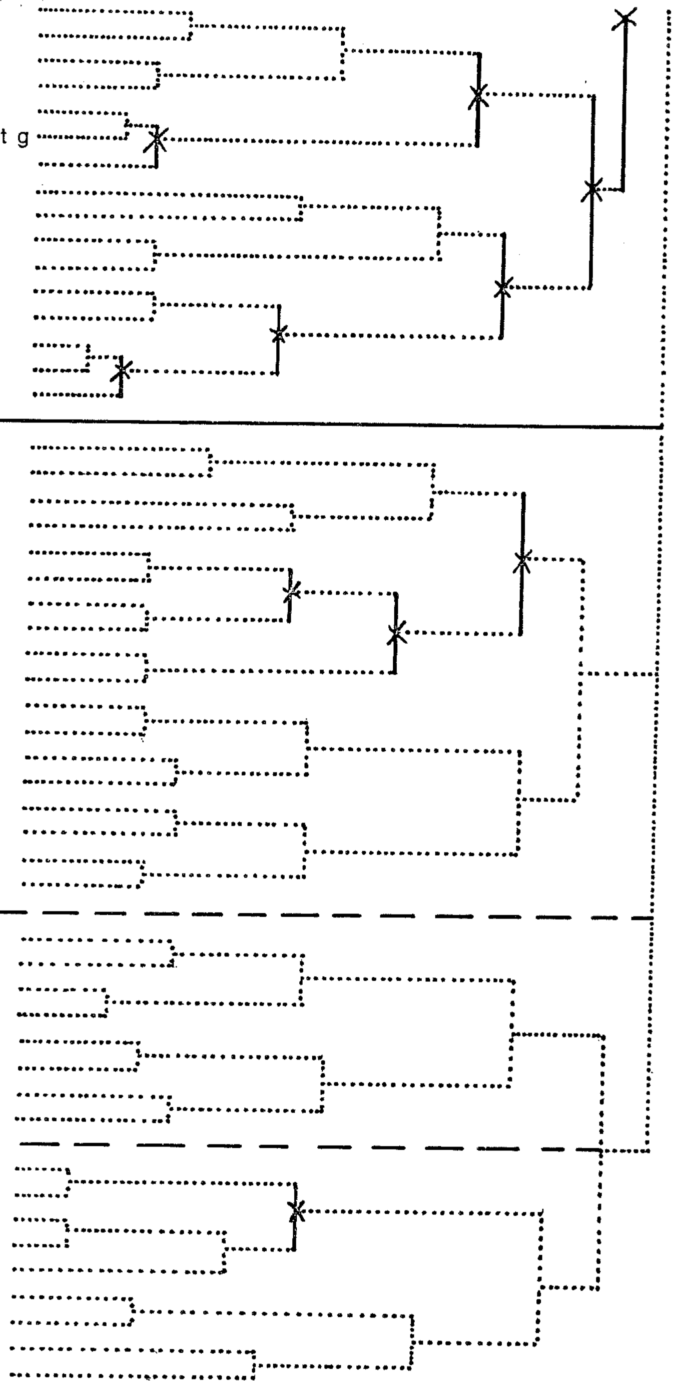


C5
- A 5 Bijection de A vers B
- B 43 Glissement de 2 segments
- A 6 Image d'un ensemble par application triple
- A 7 Image des nombres par F (X) = 1, 5 ×
- A 8 Compléter image ou antécédent « carré »
- A 10 Compléter image ou antécédent composé f et g
- A 9 Compléter image ou antécédent (demi)
- A 13 Compléter ( ) + (+ 3) = (+ 2)
- A 16 Déterminer A : 3 + A = 11
- A 15 Compléter ( ) = (+ 4) = (— 8)
- A 18 Déterminer A. 7 + A — 38
- A 14 Compléter (+ 2) — ( ) = (+ 7)
- A 17 Déterminer A. — 12 = A + 6
- A 19 Compléter. schéma (+, —, =)
- A 20 Compléter schéma (+, —)
- A 21 Compléter schéma (×, ,)

C6
- B 29 Coin effacé
- B 30 Translation symétrie droite cercle
- B 42 Symétries droites, 2 triangles
- D 75 Déplacement de billes
- B 31 Rotation symétrie droite carrés
- B 35 Rotations, rond et croix
- B 33 Rotation homothétie, 2 triangles
- B 37 Rotation 90° et 45° triangle, segment
- B 38 3 bâtonnets dans carré
- B 39 Réduire et compter, 4, 3, 2, 1 sommets
- B 32 Rotations carré, carré
- B 34 Rotations 90° et 45° triangle, flèche
- B 36 Rotations carré et croix
- B 40 Rotation chaise
- B'47 Polygones 3, 4, 5 côtés
- B'54 Symétrie droite horizontale
- B'52 Rotation bâton
- B'53 Parallélogramme divisé par 2

C7
- B 44 Alternance convexe, concave, nombre somme
- B'51 Homothétie centre trait, rapport —2
- B'55 Thalès milieu
- B'56 Thalès thiers
- B'45 Centre de symétrie
- B'46 Axes de symétrie
- B'48 Polygones convexes
- B'49 Bipoints équipollents, translation

C8
- E 78 Eval. longueur segment horizontal
- E 79 Eval. longueur segment oblique
- E 80 Eval. longueur segment dans carré
- E 81 Eval. longueur segment diam. cercle
- E 82 Eval. longueur ligne brisée
- E 83 Eval. longueur demi cercle
- E 84 Eval. longueur segments + quart cercle
- E 86 Longueur et largeur rectangle
- E 88 Longueur cigarette gauloise ordinaire



E 82 à cette paire est naturelle et intéressante ; E 83 et E 84 concernent l'évaluation de la longueur d'un arc de courbe ; enfin, E 86 et E 88 exigent une mémorisation d'une information recueillie.

VI. — CONCLUSION

De façon très globale, l'application de nos algorithmes de classification a permis de réorganiser les différents items selon les principales notions mathématiques sous-jacentes au questionnaire et cela, à partir, exclusivement, du comportement réel des enfants. Les principales formes d'aptitude correspondent donc aux principaux thèmes mathématiques. Il y a donc une vérité fondamentale lorsqu'un enfant assure qu'il est plutôt meilleur dans tel ou tel chapitre des mathématiques. D'autre part, les associations entre agrégats de variables provenant de cahiers distincts conduit à s'interroger sur la valeur cognitive de certains items. Ces associations (qui se produisent par exemple entre une partie du cahier B' est une partie du cahier E concernant l'évaluation des longueurs, entre une partie du cahier C et une partie du cahier E concernant l'évaluation des aires, entre quelques items de B et une classe d'items de A) montrent des rapprochements insoupçonnés dans le comportement mathématique des enfants entre des questions que le mathématicien aurait sans doute séparées de façon essentielle.

La séparation de chacune des grandes classes en sous classes s'est effectuée de façon conforme aux différents niveaux d'une taxinomie en objectifs cognitifs proposée par Gras qui s'inspirait de l'interprétation de Bruner de la théorie de développement de Piaget (cf. § 2). A ce sujet, le regroupement des équations et des suites logiques relevant de la même complexité opératoire est claire dans l'arbre des classifications (réunion de C_4 à C_5). L'existence de carrefours, où la notion de niveau d'acquisition ou de complexité opératoire sont dominantes, affaiblit considérablement l'effet du hasard dans le choix de la réponse du sujet ; effet dont l'importance a pu être redouté et qui n'a pas affecté sensiblement la structure hiérarchique.

Cette étude reprend en fait, à un niveau national, celle (cf. 3) sur un échantillon neuf fois plus réduit, à partir du même test, où on avait obtenu une classification conforme dans ses grandes lignes à celle que nous venons de présenter ci-dessus. Toutefois, la partition considérée ici est certainement plus nette et d'interprétation plus claire, en raison sans doute de l'effectif de l'échantillon et, dans une moindre mesure, de l'absence de variables contingentes au test, telles que les modalités d'identité scolaire qui avaient été introduites dans le tableau des données de l'expérience précédente.

L'auteur de la recherche attend d'un test de sortie en fin de 3ᵉ, la possibilité d'étudier l'influence d'un processus d'apprentissage et de méthodes actives sur la typologie des variables conceptuelles.

Israël César LERMAN,

maître de conférences,
Laboratoire de Statistique,
Université de Rennes I.

Références

1. ARCHAMBAUD (N.). — Le rôle du langage dans le développement cognitif selon J.S. Bruner. — **Bulletin de Psychologie,** déc. 1975.
2. BLOOM (B.) et collab. — In : **Education Nouvelle,** Taxonomie des objectifs pédagogiques (T1 : domaine cognitif [1969], T2 : domaine affectif [1970]).
3. GRAS (R.). — Recherche d'une taxonomie d'objectifs cognitifs à un test d'entrée en 4ᵉ expérimentale. — (O.P.C. en sept. 1974), I.R.E.M. Rennes, mai 1975.
4. GRAS (R.). — Recherche d'une toxonomie d'objectifs cognitifs en mathématiques. — I.R.E.M. Rennes, janv. 1976.
5. GRAS (R.). — Analyses factorielle et classificatoire d'un test national d'entrée en 4ᵉ (Mathématique). — I.R.E.M., Rennes, mai 1976.
6. GRAS (R.). — Test sur la connaissance du concept de symétrie centrale. — I.R.E.M., Rennes, juin 1976.
7. LERMAN (I.C.). — Introduction à une méthode de classification automatique illustrée par la recherche d'une Typologie des personnages enfants à travers la Littérature enfantine. — **Revue de Statistiques appliquées,** 1973, vol. XXI, n° 3, pp. 23-49, Paris.
8. LERMAN (I.C.). — Cours sur la reconnaissance et classification des structures finies en analyse des données. — Département Mathématiques et Informatique, Laboratoire de Statistique, Université de Rennes I, 1975-1976.
9. TOURNEUR (Y.). — Classification des questions d'évaluation en mathématiques. Etude de différents modèles hiérarchisés ; et Taxonomies des objectifs cognitifs en mathématiques : étude du modèle de la National Longitudinal Study of Mathematical Abilities, **Mathematica et Pedagogia** (1972).