

ANALYSE DE LA SITUATION RELATIVE ENTRE DEUX
CLASSIFICATIONS FLOUES

I.C. LERMAN, M. HARDOUIN et T. CHANTREL
Laboratoire de Statistique
I.R.I.S.A. - Université de Rennes I

ABSTRACT : This paper is divided into two parts, each one dealing with a problem related with the other but conceptually distinct. These problems are in relation with the analysis of the typology defined by a partition of a set A of descriptive attributes (0 - 1 variables).

In the first part, we show, by introducing the notion of relative degree of belonging of a given individual to a class of attributes, that such a partition of A determines a fuzzy classification on the set E of objects or individuals.

By associating an index based on the χ^2 statistic to each of the cells of cross-table, we develop cross analysis of the two fuzzy classifications.

This approach is particularly relevant in the analysis of questionnaire which may be separated into two parts ; the first one dealing with identification of the individual and the second with its behaviour.

In the second part of the paper, we determine an index measuring the importance of the role played by a certain class of individuals with respect to a class of attributes. For that we need to introduce a ratio of variances measuring the "degree of responsibility" of an individual with respect to a typology defined by a partition of the set of the descriptive attributes.

En considérant la classification des attributs associés aux caractéristiques socio-individuelles, le spécialiste peut poser une question plus élaborée que la précédente quant à la situation des types extraits d'une telle classification par rapport à ceux de comportement. Désignons par

$$\pi(S) = \{ S_i / 1 \leq i \leq k \}$$

et

$$\pi(C) = \{ C_j / 1 \leq j \leq h \} \quad (1)$$

les classifications respectives de l'ensemble S des attributs socio-individuels et de l'ensemble C des attributs de comportement qui définissent respectivement les deux typologies. $\pi(S)$ (resp. $\pi(C)$) peut correspondre à la classification produite à un niveau donné de l'arbre des classifications sur S (resp. C).

Une réponse "faible" à la question posée consisterait à établir la table de dimension $k \times h$

$$\{ P(S_i, C_j) / 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq h \} \quad (2)$$

où $P(S_i, C_j)$ est l'indice de proximité entre les classes S_i et C_j ; celui là même qui a prévalu dans la construction ascendante de chacun des arbres de classification sur C et sur S . Rappelons brièvement que dans notre méthode cet indice est basé sur la vraisemblance du lien défini par la plus grande valeur observée d'une statistique de proximité entre deux éléments appartenant respectivement aux deux classes à comparer.

Une première raison de la faiblesse de cette réponse est due à ce que l'indice P utilisé ne tient pas le plus étroitement compte de la nature des deux structures à comparer qui sont deux classifications polythétiques de deux ensembles disjoints d'attributs descriptifs. Ce type d'indice est en effet utilisé dans notre méthode pour la formation des classes quelle que soit la nature des données; qu'il s'agisse de la classification des variables descriptives ou bien des objets. D'autre part, un bon indice pour l'émergence des classes n'est pas nécessairement pertinent pour comparer les classes respectives de deux classifications déjà formées; d'ailleurs les nombres de la table (2) doivent être tous trop faibles pour tirer une conclusion significative.

S'il s'agit de répondre à la première question du psychosociologue où il s'agit d'analyser comment se "situent" les différentes catégories d'individus

séparées par une même variable sociologique, entre les différents types de comportement ; ce que nous proposons est un équivalent pour la classification de l'introduction d'éléments supplémentaires en analyse factorielle. Mais cet équivalent est plus précis car d'une part, on a une plus grande maîtrise de l'interprétation d'une classe d'attributs et d'autre part, on a immédiatement sous la forme d'une table de nombres les valeurs des associations des différentes modalités de la variable extérieure définissant une partition, avec les différentes classes d'attributs. Notre approche est plus générale puisqu'elle permet de situer l'une par rapport à l'autre deux classifications sur respectivement, deux ensembles disjoints d'attributs de description. C'est dans la partie A que nous développerons cet aspect de l'étude.

Dans la partie B, qui est moins élaborée, nous chercherons à répondre à une question voisine de la précédente mais conceptuellement différente, où il s'agit de mettre en évidence l'importance numérique du rôle d'une même classe d'individus, éventuellement définie par une modalité d'une variable sociologique, dans la formation d'un profil de comportement défini par une classe d'attributs. On fera appel dans ce cadre à une notion de "degré de responsabilité" d'un individu par rapport à la typologie définie par une classification de l'ensemble des attributs et on délimitera, pour un sujet donné, la qualité d'être "typique" d'un profil de comportement fixé.

A - CROISEMENT DE CLASSIFICATIONS FLOUES

I - CLASSIFICATION DICHOTOMIQUE "NETTE" ASSOCIEE A UN ATTRIBUT ET CLASSIFICATION DICHOTOMIQUE "FLOUE" ASSOCIEE A UNE CLASSE D'ATTRIBUTS.

Désignons une fois pour toutes par E l'ensemble défini par l'échantillon (supposé représentatif) de la population étudiée. La donnée d'un attribut de description a détermine sur E une partition $\pi(a)$ en deux classes E_a et E_a^- où E_a (resp. E_a^-) est formée des objets de E où l'attribut a est présent (resp. absent).

Associons à la partie E_a (resp. E_a^-) de E , sa fonction indicatrice ϕ_a (resp. ϕ_a^-) :

$$\forall x \in E : \phi_a(x) = 1 \text{ (resp. } \phi_a(x) = 0) \iff x \in E_a \text{ (resp. } x \in E_a^-)$$

$$\text{et } \phi_a^-(x) = 1 \text{ (resp. } \phi_a^-(x) = 0) \iff x \in E_a^- \text{ (resp. } x \in E_a) ;$$

on a

$$\forall x \in E : \phi_a(x) + \phi_a^-(x) = 1 \quad (1)$$

La donnée de l'attribut de description α définit ce que nous appellerons une classification dichotomique "nette" $\pi(\alpha)$ caractérisée par la fonction indicatrice ϕ_α ou ϕ_α^- .

Considérons à présent un ensemble fini A , de cardinal noté $c(A)$, d'attributs de description de E . Dans les applications A est une classe d'attributs "proches" extraite par exemple d'un arbre des classifications sur un ensemble plus vaste d'attributs, définissant un profil sociologique ou d'attitude. Un même individu x de E peut être plus ou moins affecté par un tel profil ; il l'est d'autant plus qu'il possède un plus grand nombre d'attributs de A . Il est par conséquent naturel d'associer à chaque x de E , la proportion d'attributs de A que possède x ; soit

$$\phi_A(x) = \frac{1}{c(A)} \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(x) \quad (2)$$

De la même manière à chaque x de E , on associe

$$\phi_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{c(A)} \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha^-(x) \quad (3)$$

qui représente la proportion d'attributs de \bar{A} possédés par x ; où \bar{A} est obtenu à partir de A en associant à chaque attribut de A , sa négation.

On a une relation équivalente à la relation (1) ci-dessus :

$$(\forall x \in E) : \phi_A(x) + \phi_{\bar{A}}(x) = 1 \quad (4)$$

La fonction d'appartenance relative ϕ_A au profil défini par la classe A d'attributs, définit ce que nous appellerons une classification dichotomique "floue" où à chaque élément x de E , on associe le couple de nombres positifs de somme 1 $(\phi_A(x), \phi_{\bar{A}}(x))$.

Signalons ici que bien que nous associons à chaque objet de E un degré un degré d'appartenance (nombre compris entre 0 et 1) à un type ; nous n'avons nullement besoin de nous référer au formalisme introduit par L.A. ZADEH (cf. [8]), auquel d'ailleurs nous ne concédons ici aucune valeur opérationnelle.

II - CROISEMENT DE CLASSIFICATIONS NETTES. INTRODUCTION AUX AUTRES CROISEMENTS.

Soit un couple de partitions sur E , associé en l'occurrence à un couple de caractères descriptifs présentant respectivement k et h modalités.

Désignons par

$$P = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$$

et

$$Q = \{F_1, F_2, \dots, F_h\}$$
(1)

ces deux partitions.

La partition croisée $P \wedge Q$ est définie par

$$P \wedge Q = \{E_r \cap F_s / 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h\}$$
(2)

Soit ϕ_r , $1 \leq r \leq k$, la fonction indicatrice de la classe E_r et soit ψ_s , $1 \leq s \leq h$, la fonction indicatrice de la classe F_s . La table de contingence associée à (P, Q) est la table des cardinaux des classes de $P \wedge Q$; soit

$$\{n_{rs} / 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h\}$$
(3)

où

$$n_{rs} = \text{card}(E_r \cap F_s) = \sum_{x \in E} \phi_r(x) \psi_s(x)$$

$$1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h.$$

Désignons par $I = \{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$ l'ensemble codant E . De la sorte nous écrirons le contenu de la case (r, s) du tableau de contingence précédent sous la forme

$$n_{rs} = \sum_{1 \leq i \leq n} \phi_r(i) \psi_s(i)$$
(4)

$$1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h.$$

On attache au tableau de contingence deux marges ; l'une colonne et l'autre, ligne. La r -ème ligne de la marge colonne contient

$$n_{r.} = \sum_{1 \leq i \leq n} \phi_r(i),$$
(5)

$$1 \leq r \leq k,$$

et la s -ème colonne de la marge ligne contient

$$n_{.s} = \sum_{1 \leq i \leq n} \psi_s(i)$$
(6)

Le problème posé est celui de la mesure orientée de l'intensité des liens entre les classes de la partition P et celles de la partition Q . Commençons par considérer le cas $k = h = 2$ où le contenu de l'une des cases, par exemple n_{11} , détermine la totalité de la table de contingence 2×2 .

Conformément à notre démarche générale (cf. [5] chap. 2), nous associons à n_{11} la variable aléatoire N_{11} obtenue en fixant $P \doteq \{E_1, E_2\}$ (resp. $Q \doteq \{F_1, F_2\}$) et en associant à Q (resp. P) une partition aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les partitions en classes étiquetées de type $(n_{.1}, n_{.2})$ (resp. $(n_{1.}, n_{2.})$). On remarquera que la donnée d'une telle partition aléatoire Q' (resp. P') est équivalente à la donnée d'une partie aléatoire F'_1 (resp. E'_1) dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les parties de E de même cardinal $n_{.1}$ (resp. $n_{1.}$). En désignant par ψ'_1 (resp. ϕ'_1) la fonction indicatrice de F'_1 (resp. E'_1); la variable aléatoire N_{11} peut se mettre sous l'une des deux formes équivalentes

$$\sum_{i \in I} \phi_1(i) \psi'_1(i) \quad (7)$$

ou bien

$$\sum_{i \in I} \phi'_1(i) \psi_1(i) \quad (7')$$

La distribution de la v.a. (7) est la même que celle de

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \phi_1(i) \psi_1(\sigma(i)) \quad (8)$$

où σ est un élément aléatoire pris uniformément au hasard dans l'ensemble G_n de toutes les permutations sur $(1, 2, \dots, n)$ qui est de cardinal $n!$. Lorsque σ parcourt G_n , chaque expression (7) se retrouve dans (8) $n_{.1}! \times n_{.2}!$ fois exactement.

De la même façon la v.a. (7') est la même que celle

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \phi_1(\sigma(i)) \psi_1(i) \quad (8')$$

La distribution commune des variables aléatoires (8) et (8') est exactement hypergéométrique de moyenne $(n_{.1} n_{.1} / n)$ et de variance $n_{.1} n_{.2} n_{.1} n_{.2} / n^2 (n-1)$.

La loi de la v.a. centrée réduite

$$\frac{(N_{11} - (n_{1.} n_{.1} / n))}{(n_{1.} n_{.1} n_{.2} / n^2 (n-1))^{1/2}} \quad (9)$$

tend, dans des conditions très générales et bien connues, vers la loi normale centrée réduite $N(0,1)$. Le carré de la valeur observée de (9) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{1 \leq s \leq 2} \sum_{1 \leq r \leq 2} q_{rs}^2 \quad (10)$$

où

$$q_{rs} = (n_{rs} - (n_{r.} n_{.s} / n)) / \sqrt{n_{r.} n_{.s} / n} \quad (11)$$

(10) est, dans l'hypothèse d'absence de lien et pour n "assez" grand, une réalisation d'une v.a. du χ^2 à un seul degré de liberté.

Le nombre q_{rs} ($1 \leq r \leq 2, 1 \leq s \leq 2$) définira la mesure orientée de l'intensité du lien entre la modalité r du caractère dichotomique associé à la partition P et la modalité s du caractère dichotomique associé à la partition Q .

Considérons à présent la situation la plus générale d'un tableau de contingence $k \times h$ associé au couple de partitions (P, Q) (cf. (1), (2), et (3)). L'hypothèse d'absence de lien fixe P (resp. Q) et associée à Q (resp. P) un élément Q' (resp. P') aléatoire dans l'ensemble, muni d'une probabilité uniformément répartie. Sous une telle hypothèse, la probabilité d'un tableau donné tel que (3) se met sous la forme

$$\frac{\prod_{1 \leq r \leq k} n_{r.}! \prod_{1 \leq s \leq h} n_{.s}!}{(n!) \prod_{1 \leq r \leq k} n_{rs}!} \quad (12)$$

On démontre (cf. [4]) que tout tableau de contingence $k \times h$ peut se réduire à une suite de $(k-1)(h-1)$ tables 2×2 de telle sorte que la probabilité (12) de l'ensemble du tableau puisse s'exprimer comme un produit des probabilités des tables 2×2 . A chacune de ces tables élémentaires peut être associée la statistique du χ^2 , notée χ_t^2 pour faire référence à la table t et qui peut s'exprimer comme le carré d'une statistique telle que (9). Dans ces conditions

$$\sum_{1 \leq t \leq (k-1)(h-1)} \chi_t^2$$

est asymptotiquement une v.a. du χ^2 à $(k-1)(h-1)$ degrés de liberté. D'autre part, il s'agit asymptotiquement de la statistique du χ^2 attachée à l'ensemble du tableau $k \times h$, dont la valeur observée se présente sous la forme bien connue

$$\sum_{1 \leq s \leq h, 1 \leq r \leq k} q_{rs}^2 \quad (13)$$

avec l'expression (11) de $q_{rs} = (\text{observé-espéré})/\sqrt{\text{espéré}}$.

Comme dans le cas 2×2 , le nombre q_{rs} ($1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h$) définira la mesure orientée de l'intensité du lien entre la r -ème modalité du caractère à k valeurs associé à la partition p et la s -ème modalité du caractère à h valeurs associé à la partition q .

D'ailleurs, c'est précisément un indice de la même forme que q_{rs} que nous adoptons, avant la référence à un indice de vraisemblance, entre attributs de description, dans notre méthode de classification hiérarchique basée sur la vraisemblance des liens.

Devant une table de contingence représentant le croisement de deux caractères descriptifs, la pratique du spécialiste en Sciences Humaines a longtemps consisté à calculer la valeur observée du χ^2 ($\chi^2_{\text{ob.}}$) et à se limiter au rejet ou non de l'hypothèse d'indépendance ou d'absence de lien entre les deux caractères globalement pris.

Or l'importance d'une valeur de $\chi^2_{\text{ob.}}$ qui n'entraîne pas nécessairement le rejet de l'hypothèse d'indépendance peut n'être due qu'à quelques rares cases du tableau de contingence où la valeur de q_{rs} est très prononcée de façon positive ou négative ; ce qui exprime des liens locaux qui ne sont nullement à négliger.

Par conséquent, on associera au tableau de contingence (3), le tableau des nombres

$$\{q_{rs} / 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h\} \quad (14)$$

pour découvrir et interpréter les liens éventuels entre les modalités de l'un des caractères et celles de l'autre.

L'idée de ce travail consiste à découvrir et à justifier des tables d'indice équivalents aux q_{rs} pour les deux situations suivantes :

- croisement d'une classification nette et d'une classification floue,
- croisement de deux classifications floues.

Ces nouveaux indices, que nous noterons x_{rs} , seront formellement analogues aux q_{rs} ; nous les justifierons d'autre part d'un point de vue statistique par la propriété correspondante : la somme de leurs carrés est, dans le cadre d'une hypothèse d'absence de lien à caractère permutational, la réalisation d'une v.a. du χ^2 .

Nous commencerons par considérer le cas du croisement d'une classification dichotomique nette associée à un seul attribut de description et d'une classification dichotomique floue associée à une classe d'attributs (cf. § I). Nous envisagerons ensuite le croisement de deux classifications dichotomiques floues respectivement associées à deux classes disjointes d'attributs de description.

L'étude de ces deux seuls cas suffit à donner une réponse complète au problème posé dans l'introduction. Soit en effet $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ une classification par proximité d'un ensemble A d'attributs descriptifs tel que l'opposé \bar{a} d'un même attribut a de A , n'appartienne pas à A , pour tout a de A . Considérons alors le problème de situer les classes d'une classification nette en h classes de E associée à un caractère de description b à h modalités notées b_1, b_2, \dots, b_h . La table de croisement est de dimension $k \times h$ et le contenu x_{rs} de la case (r, s) ($1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h$) correspond au contenu de la case $(1, 1)$ de la table 2×2 de croisement.

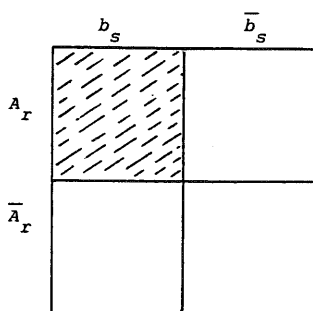


figure 1

où \bar{A}_r est l'ensemble des attributs opposés à ceux de A_r et où \bar{b}_s est l'attribut opposé à celui b_s défini par la s -ème modalité du caractère .

Considérons maintenant un couple de classifications $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ et $\{B_1, B_2, \dots, B_h\}$ sur deux ensembles disjointes A et B d'attributs de description tels que l'opposé \bar{a} (resp. \bar{b}) d'un même a (resp. b) de A (resp. B), pour tout a de

A (resp. b de B), n'appartienne pas à A (resp. B). Le croisement de ce couple de classifications polythétiques conduit à une table de dimension $k \times h$ et le contenu x_{rs} de la case (r, s) ($1 \leq r \leq k$, $1 \leq s \leq h$) correspond au contenu de la case $(1, 1)$ de croisement des deux classifications dichotomiques floues suivantes (voir schéma) où \bar{A}_r (resp. \bar{B}_s) est formé des attributs opposés à ceux de A_r (resp. B_s) (cf. § II).

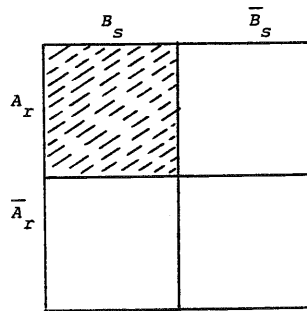


figure 2

Néanmoins, pour cette dernière situation de croisement du couple de classifications $(\{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \{B_1, B_2, \dots, B_h\})$, nous considérerons au niveau global de la table $k \times h$ de croisement, une hypothèse d'absence de lien à caractère permutational, pour l'étude des statistiques associées aux nombres v_{rs} qui sont les correspondants des nombres n_{rs} du croisement de classifications nettes.

III - CROISEMENT D'UNE CLASSIFICATION DICHOTOMIQUE NETTE ET D'UNE CLASSIFICATION DICHOTOMIQUE FLOUE.

La situation est celle schématisée par la figure 1 ci-dessus où nous désignerons par a la classe d'attributs définissant la classification dichotomique floue et par b l'attribut définissant la classification dichotomique nette.

En associant à b les fonctions indicatrices ϕ_b et $\phi_{\bar{b}}$ et à a les fonctions d'appartenance relative ϕ_a et $\phi_{\bar{a}}$ (cf. § II), les nombres v_{rs} correspondants aux nombres n_{rs} du croisement de classifications nettes, se mettent sous la forme

$$v_{11} = \sum_{i \in I} \phi_a(i) \phi_b(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{i \in I, a \in A} \phi_a(i) \phi_b(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \text{card}(E_a \cap E_b)$$

$$v_{12} = \sum_{i \in I} \phi_a(i) \phi_{\bar{b}}(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{i \in I, a \in A} \phi_a(i) \phi_{\bar{b}}(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \text{card}(E_a \cap E_{\bar{b}})$$

$$v_{21} = \sum_{i \in I} \phi_{\bar{a}}(i) \phi_b(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{i \in I, a \in A} \phi_{\bar{a}}(i) \phi_b(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \text{card}(E_{\bar{a}} \cap E_b)$$

$$v_{22} = \frac{\sum_i \phi_{\bar{a}}(i) \phi_{\bar{b}}(i)}{c(A)} = \frac{1}{c(A)} \sum_i \sum_{a \in A} \phi_{\bar{a}}(i) \phi_{\bar{b}}(i) = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \text{card}(E_a^- \cap E_b^-) \quad (1)$$

où $c(A)$ est le cardinal de A et où, rappelons le, $\{E_a, E_a^-\}$ (resp. $\{E_b, E_b^-\}$) est la partition en deux classes définie par l'attribut a (resp. b).

On a les relations

$$v_{11} + v_{12} = v_{1.} = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \text{card}(E_a) \quad (2)$$

$$v_{21} + v_{22} = v_{2.} = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \text{card}(E_a^-)$$

L'expression du second membre représente la moyenne sur a de la fréquence absolue de présence d'un même attribut (a pour la première relation et \bar{a} pour la seconde).

On a également les relations

$$v_{11} + v_{21} = v_{.1} = \text{card}(E_b) \quad (3)$$

$$v_{12} + v_{22} = v_{.2} = \text{card}(E_b^-)$$

Enfin

$$v_{1.} + v_{2.} = v_{.1} + v_{.2} = v_{..} = n = \text{card}(E) \quad (4)$$

Ainsi, la connaissance du contenu de l'une des cases du tableau 2×2 des v_{rs} détermine celui des autres.

Les nombres v_{ij} , $v_{i.}$ et $v_{.j}$, $1 \leq i, j \leq 2$ permettent de répondre à une question souvent posée par l'utilisateur quant à l'importance numérique d'un même profil de comportement et quant à la part de sujets ayant une certaine caractéristique qui sont touchés par un tel profil.

Dans ces conditions, les nombres x_{rs} correspondants aux nombres q_{rs} ($1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 2$) (cf. formule (11) § IV) s'expriment sous la forme suivante

$$z_{rs} = (v_{rs} - (v_r \cdot v_s/n)) / \sqrt{v_r \cdot v_s/n} \quad (5)$$

$$1 \leq r \leq 2, \quad 1 \leq s \leq 2.$$

z_{rs} ($1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 2$) définira la mesure orientée de l'intensité du lien entre le profil d'attitude défini par la classe A_r et l'attribut b_s , où

$$A_1 = A, \quad A_2 = \bar{A}, \quad b_1 = b \text{ et } b_2 = \bar{b}.$$

On ne se contente pas d'une raison seulement formelle de l'introduction des expressions z_{rs} , $1 \leq r, s \leq 2$; mais aussi d'une justification statistique. De manière analogue à la comparaison, dans l'hypothèse d'absence de lien à caractère permutatif, d'un couple d'attributs (cf. formules (8) et (8') § II); à la statistique v_{11} nous associons les deux v.a. duales

$$X(\sigma) = \sum_{i \in I} \phi_A(i) \phi_b(\sigma(i)) \quad (6)$$

$$Y(\sigma) = \sum_{i \in I} \phi_A(\sigma(i)) \phi_b(i)$$

où σ est un élément aléatoire dans l'ensemble G_n , muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les permutations sur I (il y en a $n!$) et $\phi_A(i)$ est la fonction sur I définie par la formule (2) du paragraphe I ci-dessus.

Les deux v.a. duales $X(\sigma)$ et $Y(\sigma)$ sont de même loi, asymptotiquement normale (pour $n \rightarrow \infty$) dans le cadre des conditions suffisantes définies par le théorème de Wald, Wolfowitz et Noether (cf. par exemple chap. 3 de [7]) qu'on pourra directement vérifier ici. La convergence vers la loi normale est en réalité, le plus souvent, très rapide.

On détermine les expressions de la moyenne et de la variance communes ce qui permet de préciser la statistique v_{11} centrée réduite sous la forme

$$\frac{\sum_{a \in A} (p_{a \wedge b} - p_a p_b)}{\sqrt{\left[\sum_{A \times A} (p_{a \wedge a'} - p_a p_{a'}) \right] p_b (1-p_b)}} \quad (7)$$

dont le carré peut être considéré, dans l'hypothèse d'absence de lien décrite ci-dessus, comme la réalisation d'une v.a. du χ^2 à 1 degré de liberté. Dans cette formule

$$p_a = n(a)/n \text{ et } p_{a \wedge b} = n(a \wedge b)/n \text{ où } n(a) = \text{card}(E_a)$$

$$\text{et } n(a \wedge b) = \text{card}(E_a \cap E_b).$$

On vérifie ensuite que (cf. [6]) la somme des carrés

$$\sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ 1 \leq s \leq 2}} z_{rs}^2$$

(cf. formule (6)) est au coefficient multiplicatif près

$$\left[\sum_{(a, a') \in A \times A} (p_{a \wedge a'} - p_a p_{a'}) \right] / \left[\sum_{(a, a') \in A \times A} p_a p_{a'} \right]$$

le carré de l'expression (7). D'où le résultat qu'on peut énoncer sous la forme d'un théorème.

Théorème. La somme des carrés des statistiques z_{rs} , $1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 2$, (cf. (5)), est dans l'hypothèse d'absence de lien à caractère permutationnel (cf. (6)), la réalisation d'une v.a. du χ^2 à 1 degré de liberté. z_{rs} représente la contribution orientée à la mesure de la dépendance par une statistique type χ^2 entre la classification dichotomique floue et celle, nette.

IV - CROISEMENT ENTRE DEUX CLASSIFICATIONS DICHOTOMIQUES FLOUES

La situation que nous allons considérer maintenant, schématisée par la figure 2 du paragraphe II précédent, est analogue mais plus générale que celle ci-dessus (§ III). Toutefois, nous avons voulu distinguer les deux situations car d'une part elles répondent à des objectifs d'analyse différents de par leur nature ; d'autre part, en procédant graduellement, on se rend compte en quoi les calculs peuvent différer en passant du croisement entre deux classifications dichotomiques nettes à celui où l'une est floue et l'autre nette et à celui enfin, où les deux sont floues (cf. [6]).

Soient A et B les deux classes disjointes d'attributs définissant respectivement les deux classifications dichotomiques floues à croiser. Associations à A (resp. B) les fonctions d'appartenance relative ϕ_A et $\phi_{\bar{A}}$ (resp. ϕ_B et $\phi_{\bar{B}}$) (cf. § II). Les nombres v_{rs} , $1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 2$, deviennent ici

$$\begin{aligned} v_{11} = v_{AB} &= \sum_{i \in I} \phi_A(i) \phi_B(i) = \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{i \in I, (a,b) \in A \times B} \phi_a(i) \phi_b(i) \\ &= \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{i \in I, (a,b) \in A \times B} \phi_{a \wedge b}(i) = \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{(a,b) \in A \times B} \text{card}(E_a \cap E_b) \\ v_{12} = v_{\bar{A}\bar{B}} &= \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{i \in I, (a,b) \in \bar{A} \times \bar{B}} \phi_{a \wedge \bar{b}}(i) = \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{(a,b) \in \bar{A} \times \bar{B}} \text{card}(E_a \cap E_{\bar{b}}) \\ v_{21} = v_{\bar{A}B} &= \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{i \in I, (a,b) \in \bar{A} \times B} \phi_{\bar{a} \wedge b}(i) = \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{(a,b) \in \bar{A} \times B} \text{card}(E_{\bar{a}} \cap E_b) \\ v_{22} = v_{AB} &= \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{i \in I, (a,b) \in A \times B} \phi_{\bar{a} \wedge \bar{b}}(i) = \frac{1}{c(A)c(B)} \sum_{(a,b) \in A \times B} \text{card}(E_{\bar{a}} \cap E_{\bar{b}}) \end{aligned} \quad (1)$$

D'autre part, on obtient

$$v_{1.} = v_{A.} = v_{11} + v_{12} = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} n(a) = \frac{n}{c(A)} \sum_{a \in A} p_a$$

$$v_{2.} = v_{\bar{A}.} = v_{21} + v_{22} = \frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} n(\bar{a}) = \frac{n}{c(A)} \sum_{a \in A} p_{\bar{a}}$$

$$v_{.1} = v_{.B} = v_{11} + v_{21} = \frac{1}{c(B)} \sum_{b \in B} n(b) = \frac{n}{c(B)} \sum_{b \in B} p_b$$

$$v_{.2} = v_{.\bar{B}} = v_{12} + v_{22} = \frac{1}{c(B)} \sum_{b \in B} n(\bar{b}) = \frac{n}{c(B)} \sum_{b \in B} p_{\bar{b}}$$

$$n = v_{1.} + v_{2.} = v_{.1} + v_{.2}. \quad (2)$$

Dans ces conditions, le nombre x_{rs} ($1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 2$) qui définit la mesure orientée de l'intensité du lien entre le profil d'attitude défini par la

classe A_r ($A_1 = A$ et $A_2 = \bar{A}$) et celui défini par la classe B_r ($B_1 = B$ et $B_2 = \bar{B}$), s'exprime par la formule analogue à celle (6) du paragraphe précédent

$$z_{rs} = (v_{rs} - (v_{r.} \cdot v_{.s}/n)) / \sqrt{v_{r.} \cdot v_{.s}/n} \quad (3)$$

$1 \leq r \leq 2, 1 \leq s \leq 2.$

Ici encore, compte tenu des relations (2), la connaissance de l'une des cases du tableau 2×2 des v_{rs} , détermine celle des autres. Pour justifier d'un point de vue statistique l'introduction des z_{rs} , $1 \leq r \leq 2, 1 \leq s \leq 2$; associons à la statistique observée v_{11} , les deux v.a. duales

$$X(\sigma) = \sum_{i \in I} \varphi_A(i) \varphi_B(\sigma(i)) \quad (4)$$

$$Y(\sigma) = \sum_{i \in I} \varphi_A(\sigma(i)) \varphi_B(i)$$

où σ est un élément aléatoire dans l'ensemble G_n , muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les permutations sur I (il y en a $n!$).

Les deux v.a. duales $X(\sigma)$ et $Y(\sigma)$ sont de même loi, asymptotiquement normale (pour $n \rightarrow \infty$), dans le cadre des conditions suffisantes définies par le théorème de Wald, Wolfowitz et Noether (cf. chap. 3 de [7]) qu'on pourra directement vérifier ici. Cette convergence est, le plus souvent, très rapide.

Comme au paragraphe précédent, le calcul de la moyenne et de la variance communes conduit à préciser la forme suivante de la statistique v_{11} centrée et réduite :

$$\frac{\sum_{A \times B} (p_{a\lambda b} - p_a p_b)}{\sqrt{\left[\sum_{A \times A} (p_{a\lambda a'} - p_a p_{a'}) \right] \left[\sum_{B \times B} (p_{b\lambda b'} - p_b p_{b'}) \right]}} \quad (5)$$

dont le carré peut être considéré, dans l'hypothèse d'absence de lien qui a prévalu à l'introduction des v.a. (4), comme la réalisation d'une v.a. du χ^2 à 1 degré de liberté.

D'autre part (cf. [6]), on vérifie que

$$\sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ 1 \leq s \leq 2}} x_{rs}^2$$

(cf. formule (3)) est, au coefficient multiplicatif près

$$\frac{\left[\sum_{A \times A} (p_{a\lambda a'} - p_a p_{a'}) \right]}{\sum_{A \times A} p_a p_{a'}} \quad \frac{\left[\sum_{B \times B} (p_{b\lambda b'} - p_b p_{b'}) \right]}{\sum_{B \times B} p_b p_{b'}}$$

le carré de l'expression (5). D'où le théorème

Théorème. La somme des carrés des statistiques x_{rs} , $1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 2$, (cf. (3)) est dans l'hypothèse d'absence de lien à caractère permutational (cf. (4)), la réalisation d'une v.a. du χ^2 à 1 degré de liberté. x_{rs} représente la contribution orientée à la mesure de la dépendance par une statistique type χ^2 entre deux classifications dichotomiques floues.

V - CROISEMENT ENTRE DEUX TYPOLOGIES

Soient A et B deux ensembles disjoints d'attributs de description tels que l'opposé \bar{a} (resp. \bar{b}) d'un même attribut a de A (resp. b de B) n'appartient pas à A (resp. B) pour tout a de A (resp. b de B). Pour fixer les idées, on peut reprendre l'exemple de l'introduction où, relativement à une enquête à caractère psychosociologique, A est formé des attributs de comportement et B des caractéristiques socio-individuelles. Désignons par

$$\{A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, A_k\} \quad (\text{resp. } \{B_1, B_2, \dots, B_s, \dots, B_h\})$$

une classification par proximité de A (resp. B) où une même classe A_r ($1 \leq r \leq k$) (resp. B_s ($1 \leq s \leq h$)) définit un profil de comportement (resp. sociologique).

La situation peut être schématisée par la table de croisement

	$B_1 \dots$	B_s	\dots	B_h
A_1				
\vdots				
A_r				
\vdots				
A_k				

où, rappelons-le, à l'intersection de la r -ème ligne et de la s -ème colonne ($1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h$) on place le nombre x_{rs} qui est la contribution orientée à la statistique du χ^2 à 1 degré de liberté, attachée à la table de croisement des deux classifications dichotomiques floues respectivement associées à A_r et B_s (cf. figure 2 § II ci-dessus).

Considérons la suite, dans un ordre fixé, des couples

$$\{ (X_{rs}(\sigma_{rs}), Y(\sigma_{rs})) / 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h. \} \quad (1)$$

de v.a. de même loi, respectivement associées aux statistiques observées

$$v_{rs} = \sum_{i \in I} \varphi_{A_r}(i) \varphi_{B_s}(i)$$

$1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h$. (cf. formule (4) § IV).

Dans l'optique développée ci-dessus, les différents σ_{rs} ($1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h$) sont des éléments aléatoires indépendants de l'ensemble G_n , muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les permutations sur $(1, 2, \dots, n)$.

Comme nous l'avons annoncé à la fin du paragraphe II, nous allons à présent considérer une hypothèse d'absence de lien à caractère plus restrictif, définie globalement au niveau de toute la table de croisement. Ainsi aux

v_{rs} ($1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h$), on associe la suite de couples

$$\{(X_{rs}(\sigma), Y_{rs}(\sigma)) / 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h\} \quad (3)$$

de v.a. de même loi (cf. formule (4) § IV) où σ , cette fois-ci le même pour toutes les cases du tableau, est un élément aléatoire dans l'ensemble G_n , muni d'une probabilité uniformément répartie, de toutes les permutations sur $(1, 2, \dots, n)$.

Puisque la loi de $Y_{rs}(\sigma)$ est la même que celle de $X_{rs}(\sigma)$; on peut se contenter de considérer la suite de v.a.

$$\{X_{rs}(\sigma) / 1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq h\} \quad (4)$$

Relativement à une partition $\{C_t / 1 \leq t \leq l\}$ d'un ensemble C d'attributs de description, introduisons la famille de vecteurs de R^l

$$\{(\phi_{C_1}(i), \dots, \phi_{C_t}(i), \dots, \phi_{C_l}(i)) / i \in I\} \quad (5)$$

où I indexe E et où, rappelons le, $\phi_{C_t}(i)$ est la proportion d'attributs de la classe C_t possédés par l'individu i . Introduisons aussi la condition (γ) que cette famille de vecteurs engendre par combinaison linéaire l'espace R^l . (γ) signifie qu'il existe un sous ensemble $\{i_t / 1 \leq t \leq l\}$ de l points de I , tel que l'ensemble des l vecteurs

$$\{(\phi_{C_1}(i_t), \dots, \phi_{C_l}(i_t)) / 1 \leq t \leq l\} \quad (6)$$

constitue un système libre.

Une telle condition est en réalité très peu restrictive si on tient compte de la définition intuitive d'une classification polythétique (cf. chap. 3 de [5]). Il suffit, mais c'est loin d'être nécessaire, que les individus i_1, i_2, \dots, i_l correspondent à des types "purs" mutuellement distincts; c'est-à-dire que les attributs présents chez l'individu i_t appartiennent exclusivement à la classe $C_t, 1 \leq t \leq l$.

Nous avons dans ces conditions le théorème et corollaire suivants :

Théorème. Si chacune des typologies $\{A_r / 1 \leq r \leq k\}$ et $\{B_s / 1 \leq s \leq h\}$ vérifie la condition (γ) ci-dessus définie, alors la matrice des covariances W de la suite (4) de v.a. est définie positive.

Corollaire. La loi jointe des $k \times h$ v.a. $X_{rs}(\sigma)$ est asymptotiquement normale de dimension $k \times h$.

Nous ne donnerons pas ici, par manque de place, le détail de la démonstration qu'on trouvera dans [6], nous contentant d'indiquer le chemin suivi.

Nous commençons par établir que toute combinaison linéaire de la suite (4) de v.a. est une v.a. asymptotiquement normale dans le cadre des conditions suffisantes à caractère assez général de Wald, Wolfowitz et Noether.

Il en résulte que la distribution jointe de la suite (4) de v.a. est asymptotiquement normale dans le sens suivant : s'il existe une sous suite de p v.a. dont la forme limite de la matrice V des covariances est définie positive ; alors la forme limite de la distribution jointe de la fréquence est la fonction densité

$$f(z) = K \exp \left(-\frac{1}{2} z^t V z \right) \quad (7)$$

où z est un point de \mathbb{R}^k et où K est une constante. (cf. par exemple lemme 2.3. chap. 5 de [4]).

Le calcul du terme $((r,s), (r',s'))$ de la matrice W des covariances donne

$$\begin{aligned} \text{cov}[X_{rs}(\sigma), X_{r's'}(\sigma)] &= \frac{\sqrt{n}}{c(A_r)c(A_{r'})} \sum_{A_r \times A_{r'}} [p(a \wedge a') - p(a)p(a')] \\ &\times \frac{\sqrt{n}}{c(B_s)c(B_{s'})} \sum_{B_s \times B_{s'}} [p(b \wedge b') - p(b)p(b')] \quad (8) \end{aligned}$$

On démontre alors que si la partition $\{A_r/1 \leq r \leq k\}$ (resp. $B_s/1 \leq s \leq h$) satisfait la condition (V), alors la matrice $k \times k$ (resp. $h \times h$) de terme général

$$\begin{aligned} \alpha_{rr'} &= \frac{\sqrt{n}}{c(A_r)c(A_{r'})} \sum_{A_r \times A_{r'}} [p(a \wedge a') - p(a)p(a')] \\ (\text{resp. } \beta_{ss'}) &= \frac{\sqrt{n}}{c(B_s)c(B_{s'})} \sum_{B_s \times B_{s'}} [p(b \wedge b') - p(b)p(b')] \quad (9) \end{aligned}$$

est définie positive. Il en résulte le théorème précédent et son corollaire.

VI - APPLICATION A UN EXEMPLE EN PSYCHO-SOCIOLOGIE

Les données proviennent d'une enquête dont le maître d'oeuvre est l'IFOP, à l'échelle européenne dont le but est la préhension de la perception qu'a l'opinion publique des conditions de vie de la pauvreté et de la misère.

Un questionnaire d'une centaine de questions a été soumis en mai-juin 1976 à des échantillons représentatifs des populations des neuf pays de la Communauté Européenne, âgées de quinze ans et plus, totalisant 8622 personnes se répartissant comme suit : 1232 pour la FRANCE (FR), 1340 pour le ROYAUME-UNI (UK), 1004 pour l'ALLEMAGNE (DEU), 923 pour l'ITALIE (IT), 905 pour les PAYS-BAS (NL), 980 pour le DANEMARK (DK), 963 pour la BELGIQUE (BEL), 268 pour le LUXEMBOURG (LUX) et 1007 pour l'IRLANDE (IRL).

Les données nous ont aimablement été communiquées par J.R. RABIER, Conseiller Spécial de la Communauté Economique Européenne, qui s'est vivement intéressé aux résultats dont l'interprétation a bénéficié de la précieuse collaboration de H. DUPAQUIER, Sociologue à l'Université de RENNES II et de J. JULO, Psychologue à l'I.R.E.M. de RENNES.

Outre les questions habituelles d'identification des personnes interrogées, y compris quant à leurs attitudes religieuses et politiques, on a retenu des questions sur

- . des observations d'ordre économique,
- . les conditions de vie et les niveaux de satisfaction,
- . la perception et image de la misère.

Chaque question est un caractère descriptif à l'ensemble totalement ordonné des modalités définissant ce que l'on appelle, une variable qualitative ordinale.

Pour chaque cas étudié (analyse au niveau de toute l'Europe pour définir une médiane Européenne et par pays), nous avons commencé à organiser par proximité en un arbre condensé des classifications, conformément à l'algorithme de la Vraisemblance des Liens, l'ensemble des échelles définies par les différentes questions. Une telle organisation permet de dégager les thèmes majeurs ou principales tendances du comportement de la population étudiée.

Nous avons ensuite éclaté chaque caractère de description en l'ensemble de ses modalités. C'est de la classification de l'ensemble ainsi formé des attributs de description dont il sera ici question. Cette dernière organisation en classes et sous-classes permet la définition de profils de comportement. Pour illustrer la méthode de croisement de classifications floues, on retiendra, en accord avec le spécialiste, une des partitions les plus significatives obtenues à différents niveaux de l'arbre des classifications, détectés à partir du comportement d'une statistique des niveaux basée sur l'ordonnance (i.e. ordre total sur l'ensemble des paires de l'ensemble à classifier).

L'analyse dont il s'agit ici concerne uniquement la France où l'ensemble des modalités de fréquence non négligeable définit un ensemble d'attributs de cardinal 228. La classification retenue comporte 11 classes où le nombre d'attributs par classe varie entre une dizaine et une quarantaine. En accord avec le sociologue les titres des classes retenus de façon à refléter au mieux le sens de leur contenu, sont les suivants

- . "Groupe fermé provincial de consommateurs très satisfaits non productifs" (37 traits descriptifs).
- . "Cadres (productifs) assez satisfaits" (25 traits).
- . "Jeunes cadres de grandes villes "révoltés" mais "non militants" (14 traits).
- . "Milieu rural et catholique (aspect économique et politique)" (16 traits).
- . "Milieu rural et catholique (aspect degré de satisfaction)" (22 traits).
- . "Jeunes catholiques idéalistes" (9 traits).
- . "Groupe assez insatisfaisant et révolté (milieu ouvrier)" (27 traits).
- . "Groupe révolté très insatisfait athée" (20 traits).
- . "Groupe légèrement insatisfait athée (agriculteurs et autres)" (15 traits).
- . "Jeunes militants athées" (18 traits).
- . "Mécontents politiquement" (14 traits).

L'ordre précédent d'énoncé des classes a un caractère technique, lié à la représentation graphique de l'arbre. Nous avons effectué le croisement d'une dizaine de variables sociologiques, définissant chacune une classification nette, avec chacun des onze profils de comportement apparus, qu'on vient de mentionner. Nous nous limiterons ici à présenter ce croisement pour les cinq variables suivantes :

PERCEPTION DES CONDITIONS DE VIE ET IMAGE DE LA MISERE

EN FRANCE

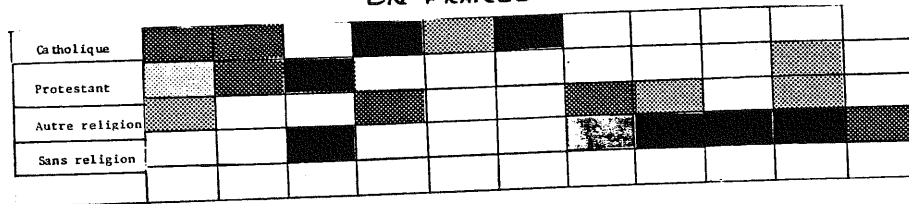
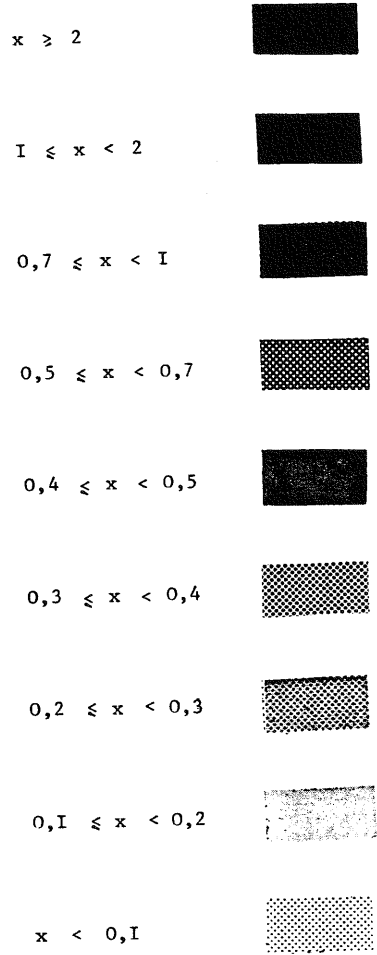


Figure 1. Croisements de classifications nettes avec une classification floue.



Légende:

Plus l'indice est élevé (couleur foncée), plus la participation est importante.

- . Age d'achèvement de l'éducation scolaire-universitaire
- . Vote politique
- . Tranche de revenus
- . Catégorie socio-professionnelle
- . Religion.

B - ROLE D'UNE CLASSE D'INDIVIDUS PAR RAPPORT A UNE TYPOLOGIE

I - DEGRE DE RESPONSABILITE D'UN INDIVIDU PAR RAPPORT A UNE TYPOLOGIE

Relativement à un ensemble A d'attributs descriptifs ; considérons la typologie définie par la partition $\{A_r / 1 \leq r \leq k\}$ de A .

Associés à A le nuage de points de $\{0, 1\}^n$

$$N(A) = \{(\varphi_a, \frac{1}{c(A)}) / a \in A\} \quad , (1)$$

où $c(A)$ est le cardinal de A et où φ_a est le vecteur logique, caractéristique de la partie E_a :

$$(\varphi_a(1), \varphi_a(2), \dots, \varphi_a(i), \dots, \varphi_a(n)) \quad , (2)$$

avec $\varphi_a(i) = 1$ (resp. 0) si l'individu codé i possède l'attribut a (resp. sinon).

Munissons $\{0, 1\}^n$ de la distance euclidienne ordinaire qui correspond d'ailleurs au cardinal de la différence symétrique quand on l'exprime au niveau de l'ensemble des parties de l'ensemble E des individus. En plongeant $\{0, 1\}$ dans l'intervalle $[0, 1]$; on a la formule suivante de décomposition de l'inertie totale du nuage, selon la partition de A :

$$\frac{1}{c(A)} \sum_{a \in A} \|\varphi_a - \varphi_A\|^2 = \frac{1}{c(A)} \sum_{1 \leq r \leq k} c(A_r) \left\{ \frac{1}{c(A_r)} \sum_{a \in A_r} \|\varphi_a - \varphi_{A_r}\|^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{c(A)} \sum_{1 \leq r \leq k} c(A_r) \|\varphi_{A_r} - \varphi_A\|^2 \right\} , (3)$$

où $\varphi_A(i)$ (resp. $\varphi_{A_r}(i)$) est la i -ème composante de φ_A (resp. φ_{A_r}) (cf. formule (2) § A-1).

L'inertie expliquée ou retenue par la classification est définie par le rapport

$$\sum_{1 \leq r \leq k} c(A_r) \|\phi_{A_r} - \phi_A\|^2 / \sum_{a \in A} \|\phi_a - \phi_A\|^2 \quad , (4)$$

où la contribution de la i-ème composante à ce rapport de variances est donnée par

$$\rho(i) = \sum_{1 \leq r \leq k} c(A_r) [\phi_{A_r}(i) - \phi_A(i)]^2 / \phi_A(i) [1 - \phi_A(i)] \quad , (5)$$

Cet indice "mesurera" le degré de responsabilité de l'individu i dans la formation des profils de comportement respectivement définis par les différentes classes A_r , $1 \leq r \leq k$.

Le degré de responsabilité dans la formation de la seule classe A_r sera défini par

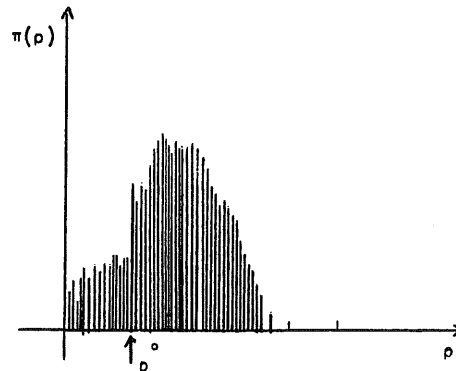
$$\rho_r(i) = c(A_r) [\phi_{A_r}(i) - \phi_A(i)]^2 / \phi_A(i) [1 - \phi_A(i)] \quad , (6)$$

II - INDIVIDU TYPIQUE

L'analyse graphique de la distribution

$$\{ \rho(i) / i \in I \} \quad , (7)$$

au moyen de l'histogramme de fréquences suivant où l'axe horizontal est celui des valeurs de $\rho(i)$ et où l'axe vertical représente la fréquence des sujets, montre en général une valeur ρ^0 correspondante à une crête de la distribution qui intervient après une plage de petites valeurs de ρ , faiblement représentés.



Dans ces conditions, un individu typique sera caractérisé par la relation

$$\rho(i) \geq \rho^0, \quad (8)$$

$I^t = \{i/\rho(i) \geq \rho^0\}$ désignera l'ensemble des individus typiques.

La même analyse graphique de la distribution

$$\{\rho_p(i)/i \in I\} \quad (9)$$

montre le même phénomène. ρ_p^0 étant l'analogue de ρ^0 ; soit

$$I_p = \{i/\rho_p(i) \geq \rho_p^0\} \quad (10)$$

l'ensemble des individus "concernés" pour le profil de comportement défini par la classe A_p d'attributs.

Nous délimiterons un individu typique de la classe A_p au moyen de la relation

$$i \in I^t \cap I_p \quad (11)$$

Soit maintenant K une partie quelconque de I , nous "mesurerons" le rôle de K dans la formation du profil de comportement A_p , par la valeur du rapport

$$\text{card}(K \cap I^t \cap I_p) / \text{card}(K) \quad (12)$$

qui est la proportion d'individus de la classe K qui sont typiques de la classe A_p .

III - APPLICATION

Les données sont celles qui ont été présentées au paragraphe VI de la partie A. L'analyse est ici effectuée au niveau de toute l'Europe où l'ensemble des modalités de fréquence non négligeable est de cardinal 205. Sur l'ensemble des attributs de description ainsi défini, nous avons obtenu au niveau le plus significatif de l'arbre des classifications, sept classes définissant les profils de comportement de sept principales familles de citoyens. Ici encore nous nous contenterons, en accord avec le Sociologue, d'appeler ces classes de façon à refléter au mieux le sens de leur contenu :

"Intégration économique et religieuse" (32 traits descriptifs).

- . "Privilégiés" (18 traits).
- . "Classe moyenne et travailleuse" (16 traits).
- . "Passifs, égoïstes" (27 traits).
- . "Classe à morale chrétienne et apolitique" (10 traits).
- . "Optique du chrétien démocrate et libérale" (6 traits).
- . "Mécontents" (96 traits).

Bien qu'elle présente différentes facettes qui la structurent parfaitement ; la classe reflétant le mécontentement s'est imposée de façon massive.

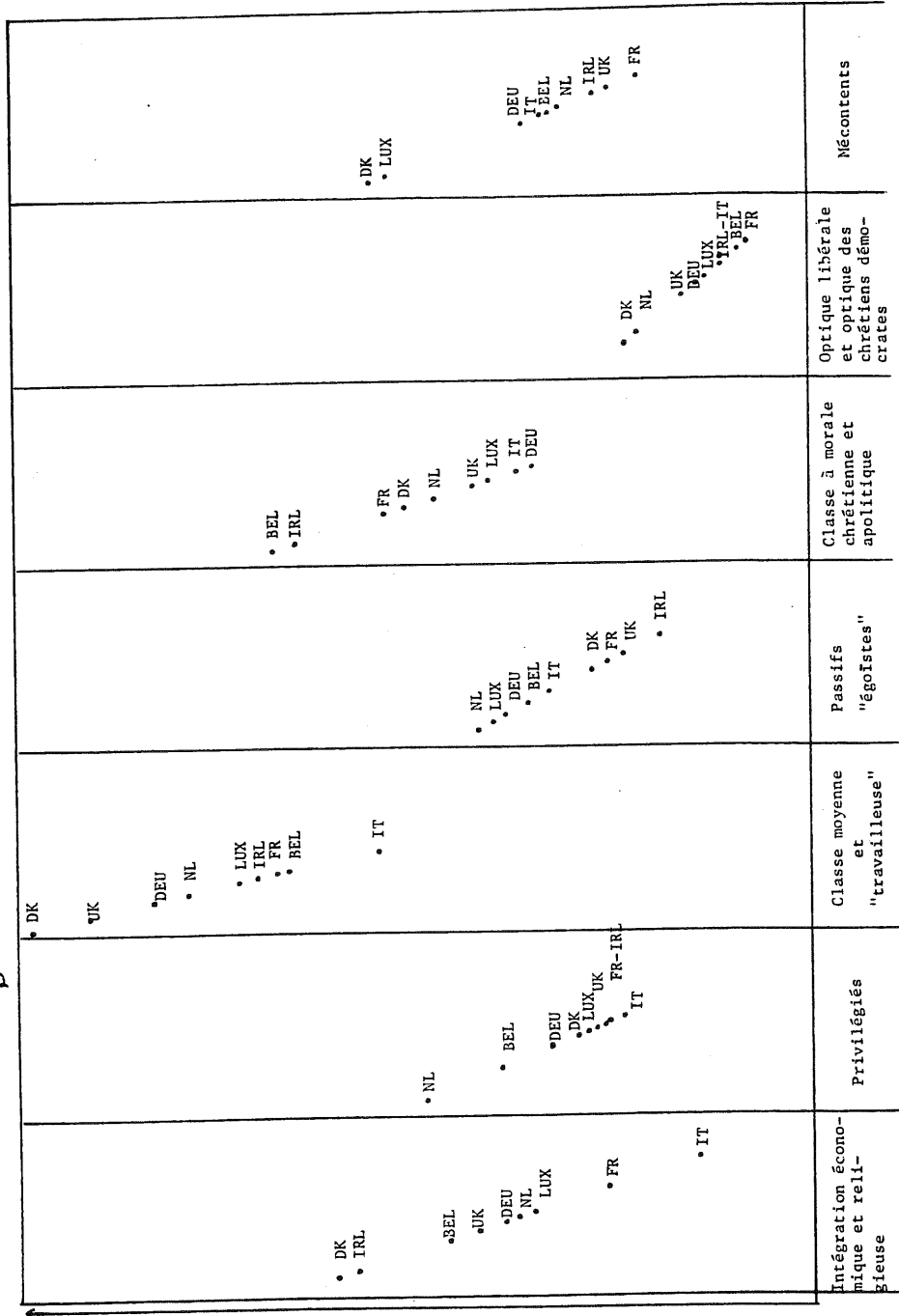
Sur les 3622 individus sondés, 7367 peuvent être considérés comme typiques dans le sens que nous avons donné à ce terme ci-dessus (cf. formule (3)). La première question qui se pose est de situer les rôles respectifs de chacun des pays, relativement à chacun des sept profils de comportement dégagés. Nous le ferons conformément à l'indice (12) ci-dessus ; voir les figures 2 et 3 suivantes.

De façon générale, on a $\rho_p(i)$ "grand" (cf. formule (6)) si le nombre d'attributs de la classe A_p possédés par l'individu i est particulièrement petit ou relativement grand. Compte tenu de la structure des données en présence, on n'a ici $\rho_p(i) \geq \rho_p^0$, $1 \leq p \leq 7$, que si ce nombre d'attributs présents chez i est relativement grand. Une version du programme prévoit de distinguer dans I_p , $1 \leq p \leq 7$, la partie des individus pour lesquels $\varphi_{A_p}(i) \geq \varphi_A(i)$.

	1ère classe		2ème classe		3ème classe		4ème classe		5ème classe		6ème classe		7ème classe	
	Effectif	n pays	Effectif	n pays	Effectif	n pays	Effectif	n pays	Effectif	n pays	Effectif	n pays	Effectif	n pays
FRANCE (1232)	285	23,1	292	23,7	719	58,3	289	23,4	560	45,4	94	7,6	245	19,8
ROYAUME UNI (1340)	492	36,7	331	24,7	1037	77,3	291	21,7	484	36,1	190	14,1	296	22,0
ALLEMAGNE (1004)	345	34,3	288	28,6	717	71,4	335	33,3	303	30,1	135	13,4	321	31,9
ITALIE (923)	118	12,7	185	20,0	430	46,5	256	27,7	289	31,3	91	9,8	252	27,3
PAYS-BAS (905)	313	34,5	381	42,0	610	67,4	319	35,2	365	40,3	155	17,1	241	26,6
DANEMARK (980)	502	51,2	249	25,4	861	87,8	240	24,4	440	44,8	189	19,2	461	47,0
BELGIQUE (963)	381	39,5	337	34,9	562	58,3	302	31,3	566	58,7	80	8,3	263	27,3
LUXEMBOURG (268)	84	31,3	66	24,6	168	62,6	93	34,7	93	36,5	34	12,6	121	45,1
IRLANDE (1007)	510	50,6	242	24,0	595	59,0	163	16,6	546	54,2	100	9,9	230	22,8
	3030		2371		5699		2293		3651		1068		2430	

Figure 2 - Tableau des proportions des sujets "typiques" d'une classe d'attributs dans chaque pays (cf. formule (12)).

Figure 3. POSITIONNEMENT DES PAYS A TRAVERS LES CLASSES



BIBLIOGRAPHIE

-
- [1] J.P. BENZECRI.- "L'analyse des données", tome II (T II.A. n° 2 § 2.4), Dunod, Paris (1973).
 - [2] T. CHANTREL.- "Nouvelle approche dans la classification et représentation d'un vaste ensemble d'échelles et profils d'attitude. Application à des données en économie rurale et en psycho-sociologie". Thèse de 3ème cycle, Université de Rennes I, I.R.I.S.A.
 - [3] M. HARDOUIN.- "Analyse informatique et statistique du croisement entre classifications floues sur un exemple de pédagogie mathématique". Rapport I.R.I.S.A. - Université de Rennes I à paraître.
 - [4] H.O. LANCASTER.- "The chi-squared distribution", John Wiley (1969).
 - [5] I.C. LERMAN.- "Reconnaissance et classification des structures finies en analyse des données", volume I, théorie et méthodes, Rapport n°70, I.R.I.S.A. Université de Rennes (1977).
 - [6] I.C. LERMAN.- "Croisement de classifications floues". Rapport n° 103, I.R.I.S.A. - Université de Rennes et Publications de l'Institut de Statistique, à paraître (1979).
 - [7] M.L. PURI et P.K. SEN.- "Non parametric methods in multivariate analysis", John Wiley (1971).
 - [8] L.A. ZADEH.- "Fuzzy sets", Information and control 3 (1965).
-