

Langages formels - Cours 1, 2, 3

Francois Schwarzentruher

ENS Rennes, France

2015

Recherche de fichiers

Je veux les
fichiers dont
le nom est
dans le

langage des
mots qui
contiennent
un *a*

Recherche de fichiers

arosoir.txt
boite.txt
miaou.txt
idees.txt

Idée clef du cours

Problème : un langage peut être infini
{*miaou, arosoir, avec, piano, contrebasse, ...* }
Solution : utiliser des *représentations finis*

Exemple (expression rationnelle)

donne la morphologie des mots du langage

$$(a + b + \dots z)^* a (a + b + \dots z)^*$$

Exemple (formule de la logique monadique du second ordre)

proche de la langue naturelle

mot qui contient un *a*



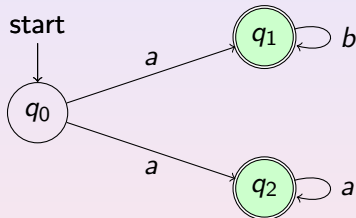
il existe une position dans le mot où il y a un *a*



$$\exists x, a(x)$$

D'autres représentations

- Automates (cours 1 ou 2)



- Grammaires (cours 5?)

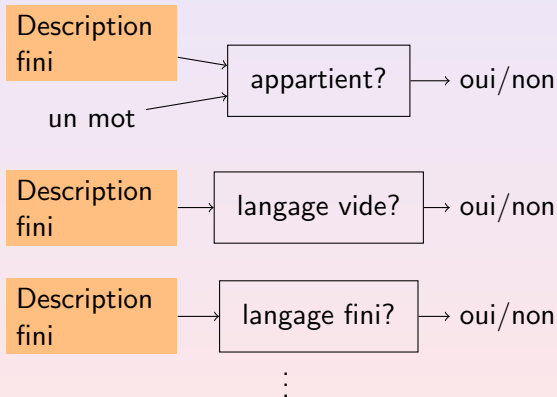
$S \rightarrow (S + S)$

$S \rightarrow (S \times S)$

$S \rightarrow \text{un nombre}$

- (surprise, cours 6?)

Enjeu 1 : des algorithmes pour différents problèmes



Enjeu 2 : expressivité

Existe-t-il un langage que l'on peut décrire

avec

une expression rationnelle
un automate
une formule de MSO
une grammaire
...

mais pas avec

une expression rationnelle
un automate
une formule de MSO
une grammaire
...

?

Enjeu 3 : concision

Existe-t-il un langage que l'on peut décrire

plus succinctement avec

- une expression rationnelle
- un automate
- une formule de MSO
- une grammaire
- ...

qu'avec

- une expression rationnelle
- un automate
- une formule de MSO
- une grammaire
- ...

?

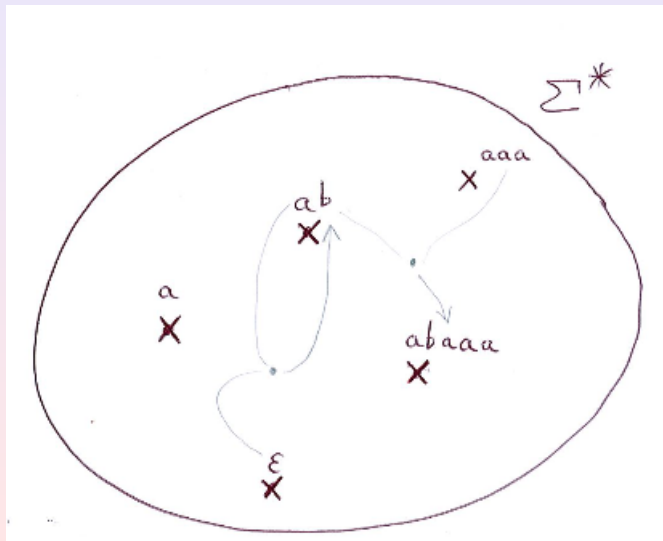
Outline

- 1 Bases
 - Mots
 - Langages
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

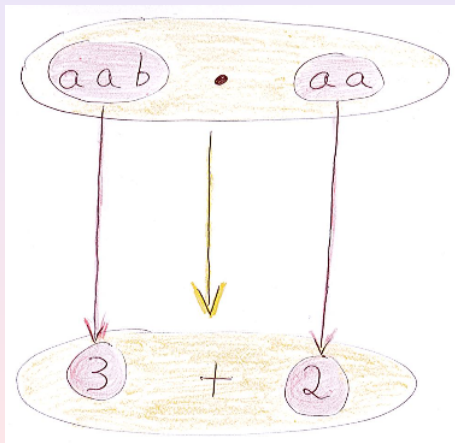
Outline

- 1 Bases
 - Mots
 - Langages
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

L'ensemble des mots est un monoïde



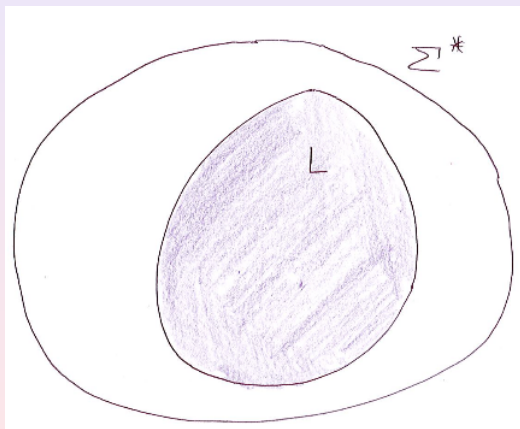
Exemple de morphisme de monoïdes



Outline

- 1 Bases
 - Mots
 - Langages
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Langage



Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
 - Expressions rationnelles
 - Logique monadique du second ordre
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
 - Expressions rationnelles
 - Logique monadique du second ordre
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Syntaxe/sémantique

Syntaxe

(ce que l'on écrit dans un logiciel pour représenter un langage)

a^*b

$(a \cup b)$

$(a \cup b)^*$

$(b \cup a)^*$

Sémantique

(ce que l'on veut représenter)

$\{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\{a, b\}$

$\{a, b\}^*$

$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
 - Expressions rationnelles
 - Logique monadique du second ordre
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Syntaxe/sémantique

Syntaxe

(ce que l'on écrit dans un logiciel pour représenter un langage)

$\exists x, a(x)$

$\forall x, a(x)$

Sémantique

(ce que l'on veut représenter)

$\{w_1 \dots w_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et il existe } i, w_i = a\}$

$\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Outline

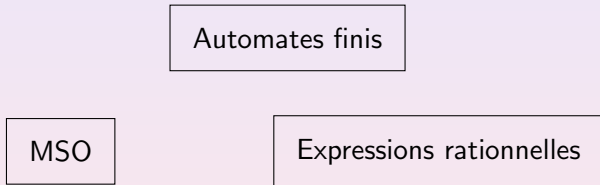
- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis**
 - Motivation
 - Définitions
 - Théorème de Kleene
 - Lemme de pompage
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis**
 - Motivation
 - Définitions
 - Théorème de Kleene
 - Lemme de pompage
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

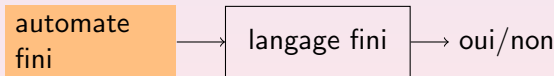
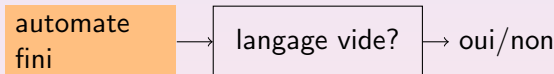
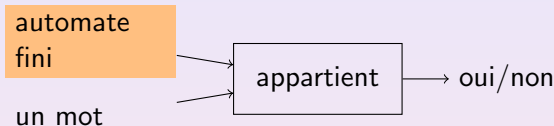
Motivation 1 : Outil central pour l'expressivité

- Même expressivité



- Montrer que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel
- Stabilité par \cap , par complémentaire

Motivation 2 : Outil central pour l'algorithmique

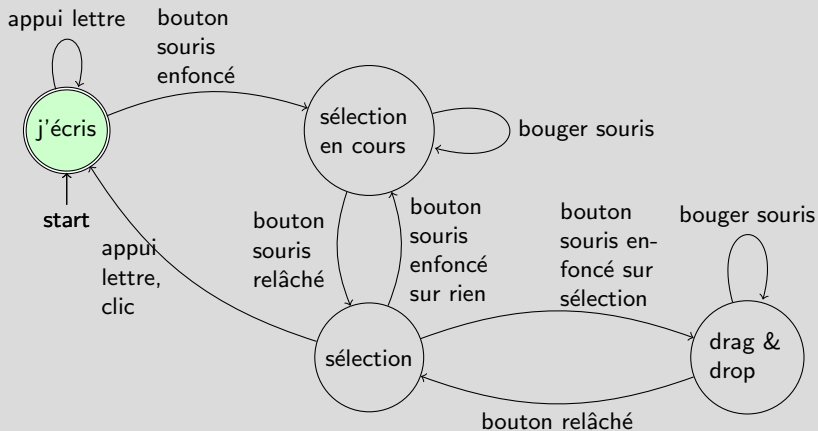


⋮

→ utiliser des algorithmes sur les graphes.

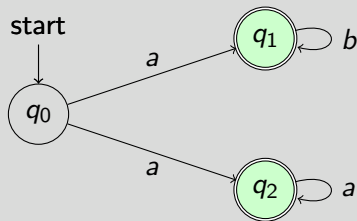
Motivation 3 : abstraction d'un programme

Exemple (Editeur de texte)



Motivation 4 : automate = système d'équations linéaires

Example



$$\begin{cases} q_0 = aq_1 + aq_2 \\ q_1 = \epsilon + bq_1 \\ q_2 = \epsilon + aq_2 \end{cases}$$

Discussion : des expressions rationnelles aux automates

On sait construire des automates pour $L(\emptyset)$, $L(\epsilon)$, $L(a)$:

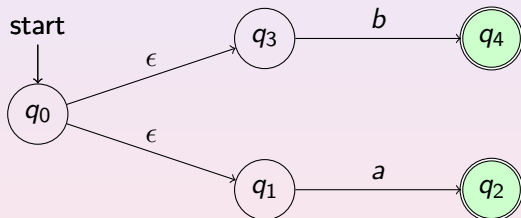


...

Comment construire un automate pour $L(e_1 \cup e_2)$?
à partir d'automates de $L(e_1)$ et $L(e_2)$?

Solution : on utilise des ϵ -transitions.

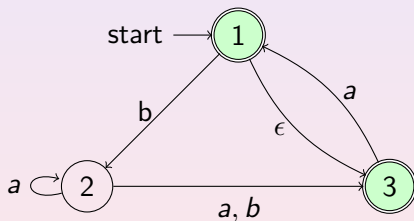
Automate non-déterministe avec ϵ -transitions



Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis**
 - Motivation
 - Définitions**
 - Théorème de Kleene
 - Lemme de pompage
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Définition d'un automate non-déterministe avec ϵ -transitions

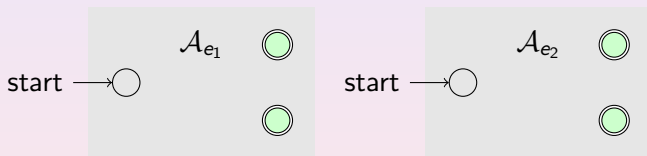


Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis**
 - Motivation
 - Définitions
 - Théorème de Kleene**
 - Lemme de pompage
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

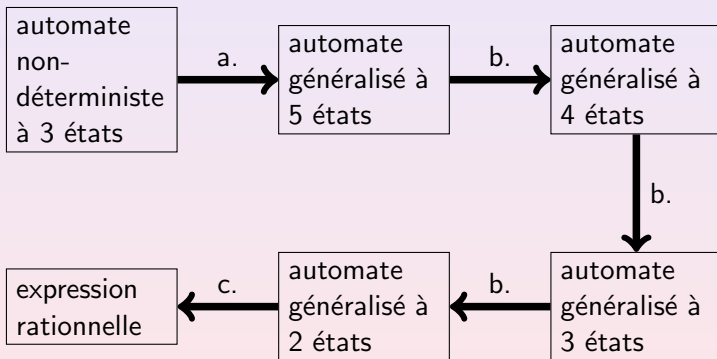
Des expressions rationnelles aux automates ?

Comment à partir d'automates pour $L(e_1)$, $L(e_2)$

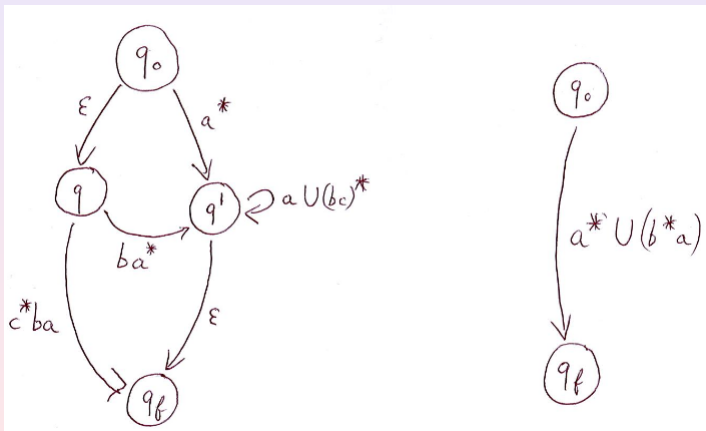


on construit des automates pour $L(e_1 + e_2)$, $L(e_1; e_2)$ et $L(e_1^*)$?

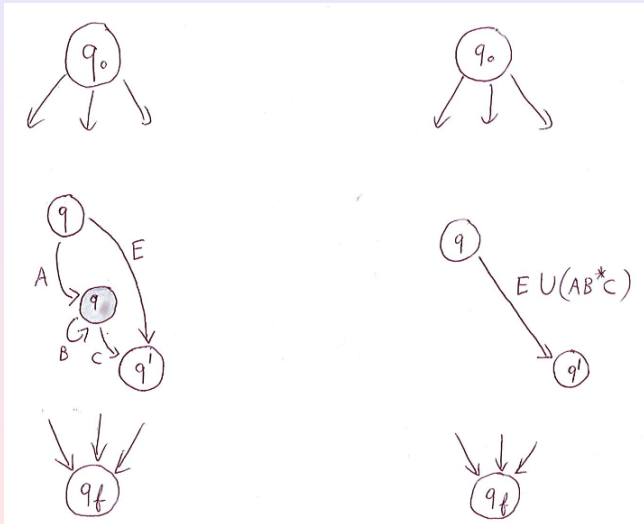
Des automates aux expressions rationnelles ?



Automate 'hybride' : automate généralisé



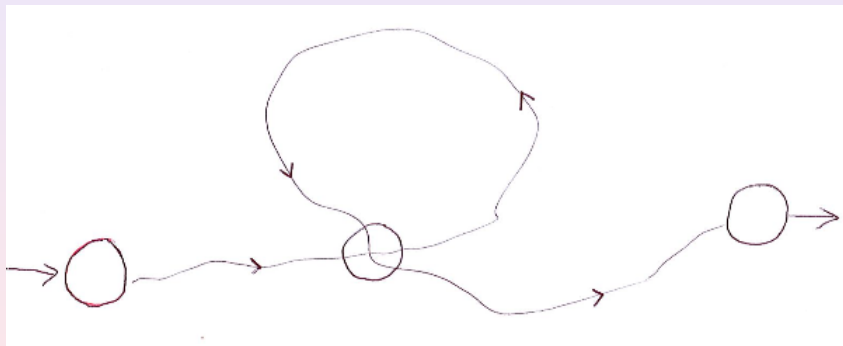
Suppression d'un état



Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis**
 - Motivation
 - Définitions
 - Théorème de Kleene
 - **Lemme de pompage**
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal

Lemme de pompage



Outline

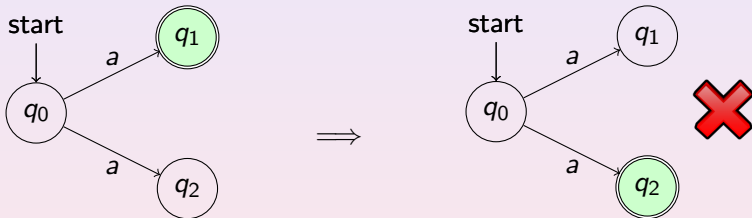
- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe**
 - Motivations
 - Automate déterministe
 - Déterminisation
- 5 Automate minimal

Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe**
 - Motivations
 - Automate déterministe
 - Déterminisation
- 5 Automate minimal

Motivations

- Calculer un automate qui reconnaît le complémentaire

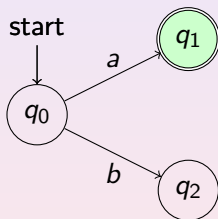


- Une exécution unique pour un mot donné.

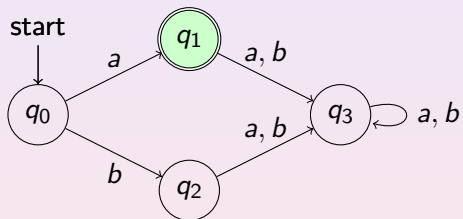
Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe**
 - Motivations
 - Automate déterministe**
 - Déterminisation
- 5 Automate minimal

Définition

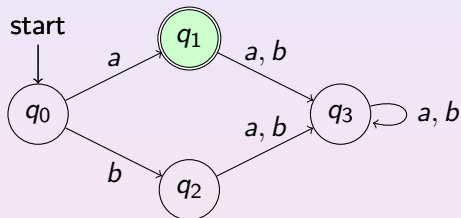


Définition

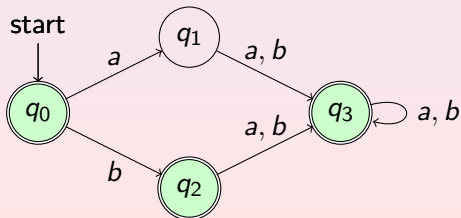


Passage au complémentaire

\mathcal{A}



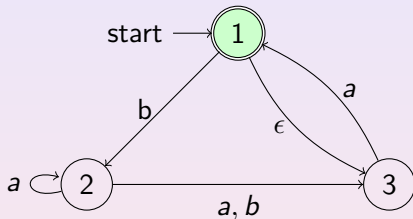
$\overline{\mathcal{A}}$



Outline

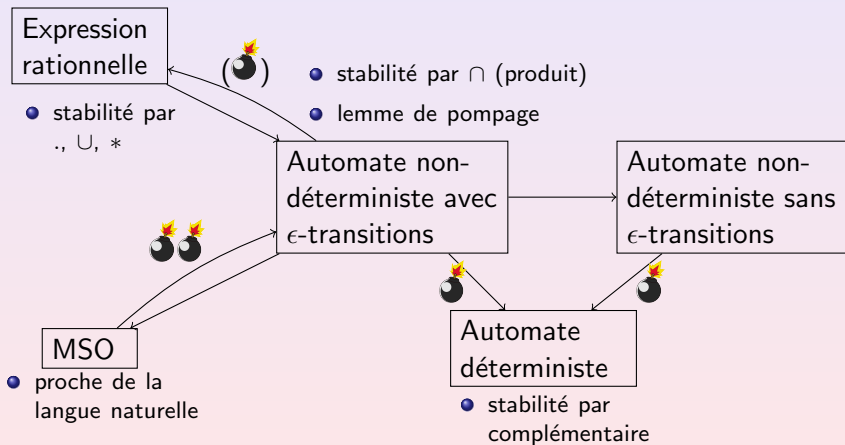
- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe**
 - Motivations
 - Automate déterministe
 - Déterminisation**
- 5 Automate minimal

Déterminisation



- Je suis dans 1 ou dans 3 ;
- Puis si je lis b , je suis dans 2 ;
- Puis si je lis a , je suis dans 2 ou dans 3 ;
- ...

Bilan

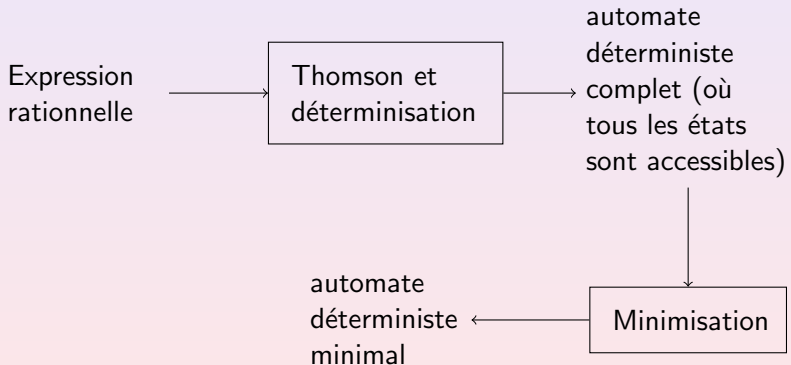


Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal**
 - Idée générale
 - Quotient
 - Automate des résiduels
 - Algorithme de Moore

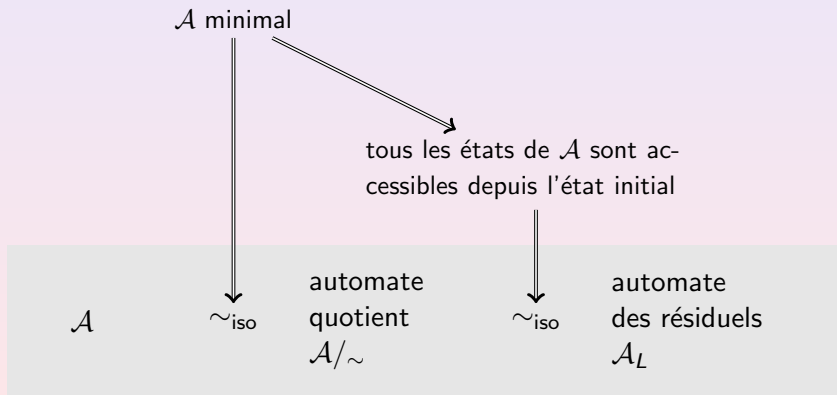
Motivation

- Application en analyse lexicale



- En fait... il est unique (à isomorphisme près).

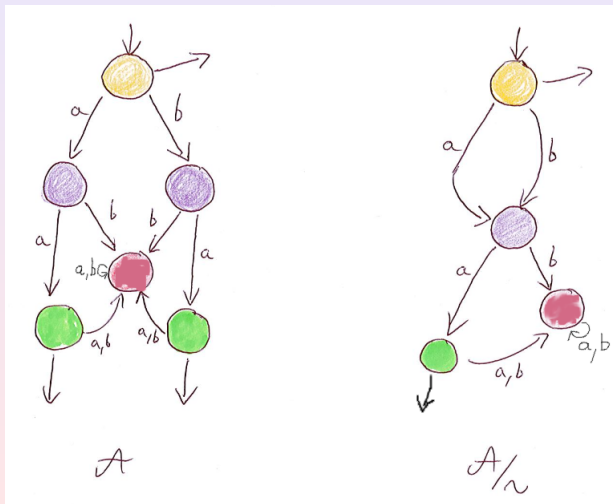
Idée générale de la preuve de l'unicité



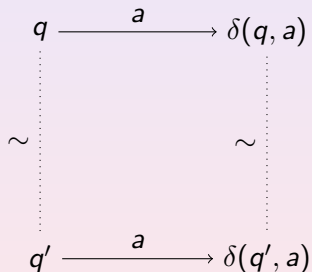
Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal**
 - **Idée générale**
 - Quotient
 - Automate des résiduels
 - Algorithme de Moore

Quotient



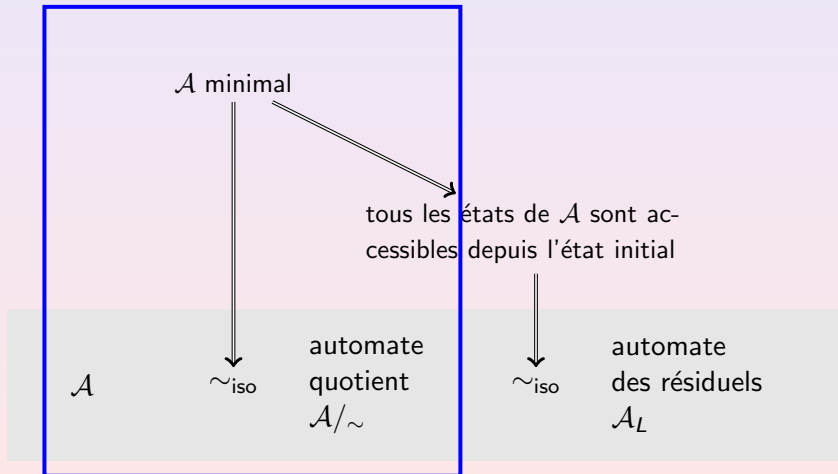
Congruence



Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal**
 - Idée générale
 - Quotient**
 - Automate des résiduels
 - Algorithme de Moore

Quotient d'un automate minimal...



Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal**
 - Idée générale
 - Quotient
 - Automate des résiduels**
 - Algorithme de Moore

Résiduel

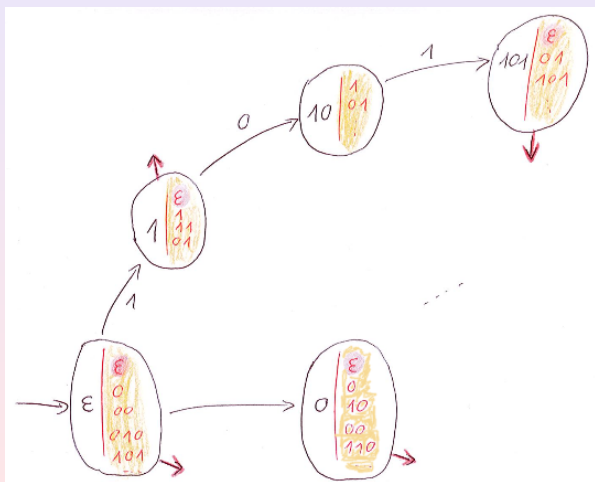
Exemple (Palindrômes, $(aaba)^{-1}L$)

0010

0100
10100
1110100
110110100
⋮

Si on est dans un automate pour L et qu'on a lu 0010, c'est l'ensemble des mots qui nous mènent dans un état final.

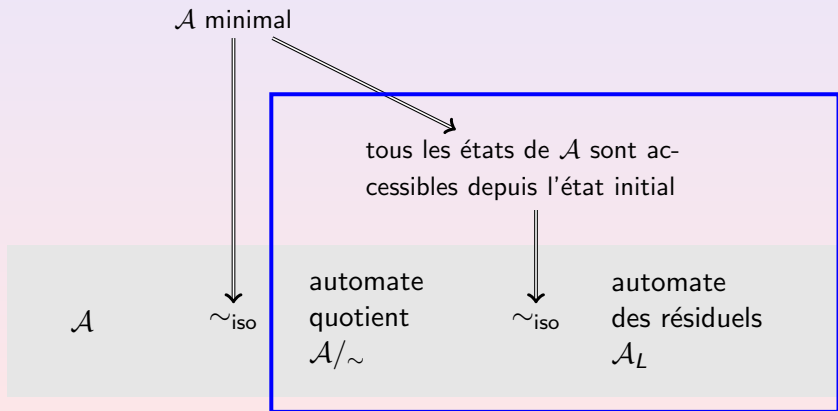
Automate des résiduels



Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal**
 - Idée générale
 - Quotient
 - Automate des résiduels
 - Algorithme de Moore**

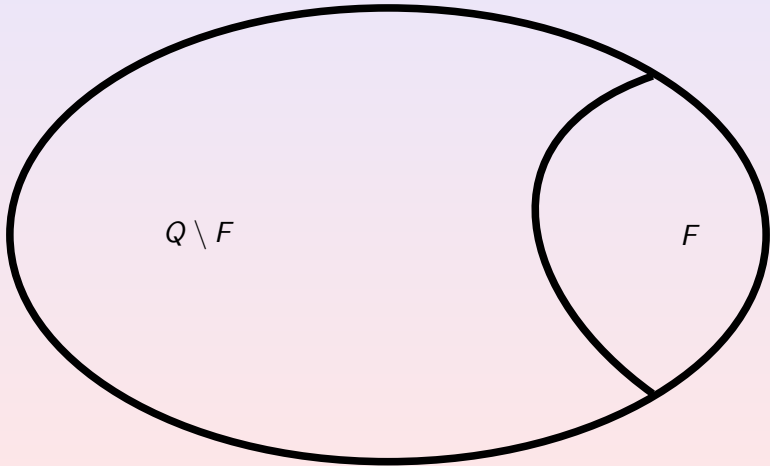
Quotient = automate des résiduels



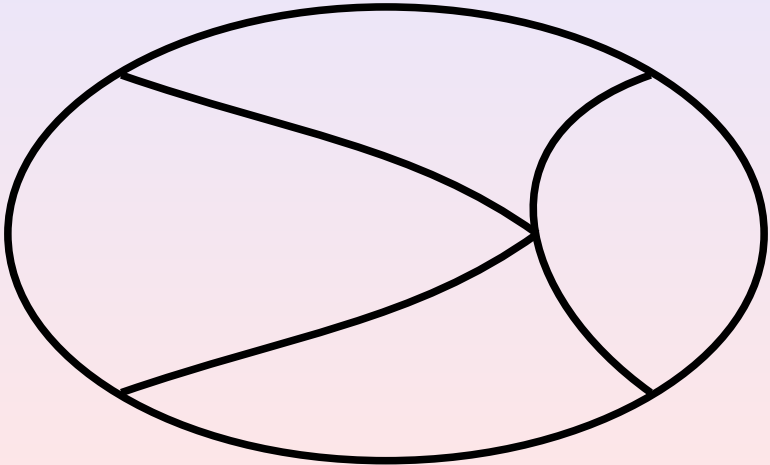
Outline

- 1 Bases
- 2 Expressions rationnelles et MSO
- 3 Automates finis
- 4 Automate déterministe
- 5 Automate minimal**
 - Idée générale
 - Quotient
 - Automate des résiduels
 - Algorithme de Moore

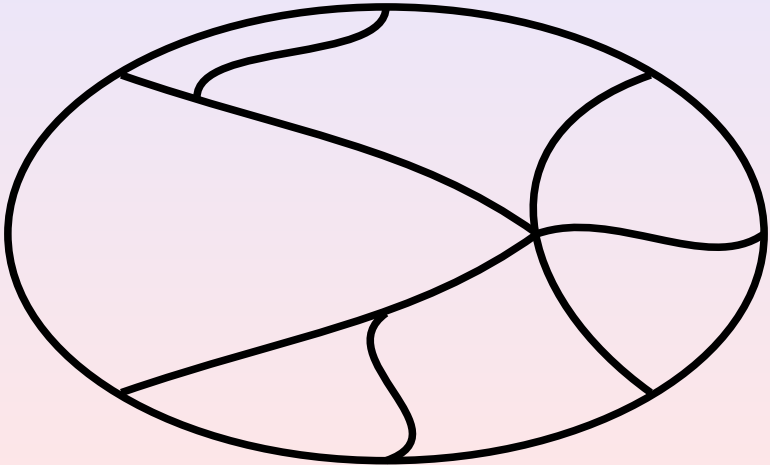
Algorithme de Moore



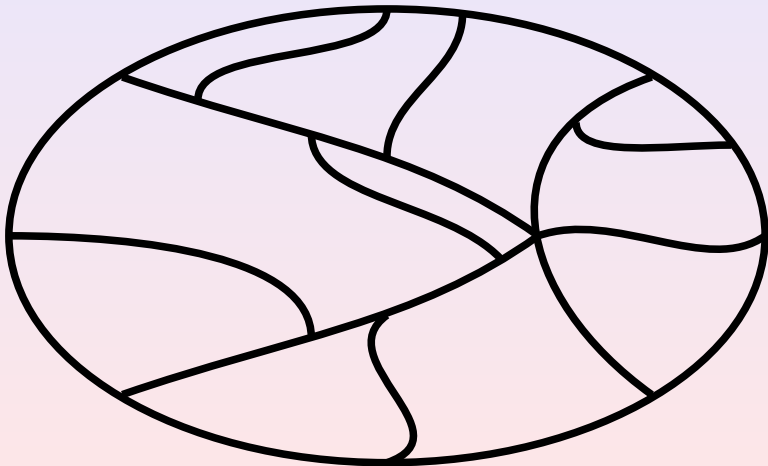
Algorithme de Moore



Algorithme de Moore



Algorithme de Moore



Algorithme de Moore

