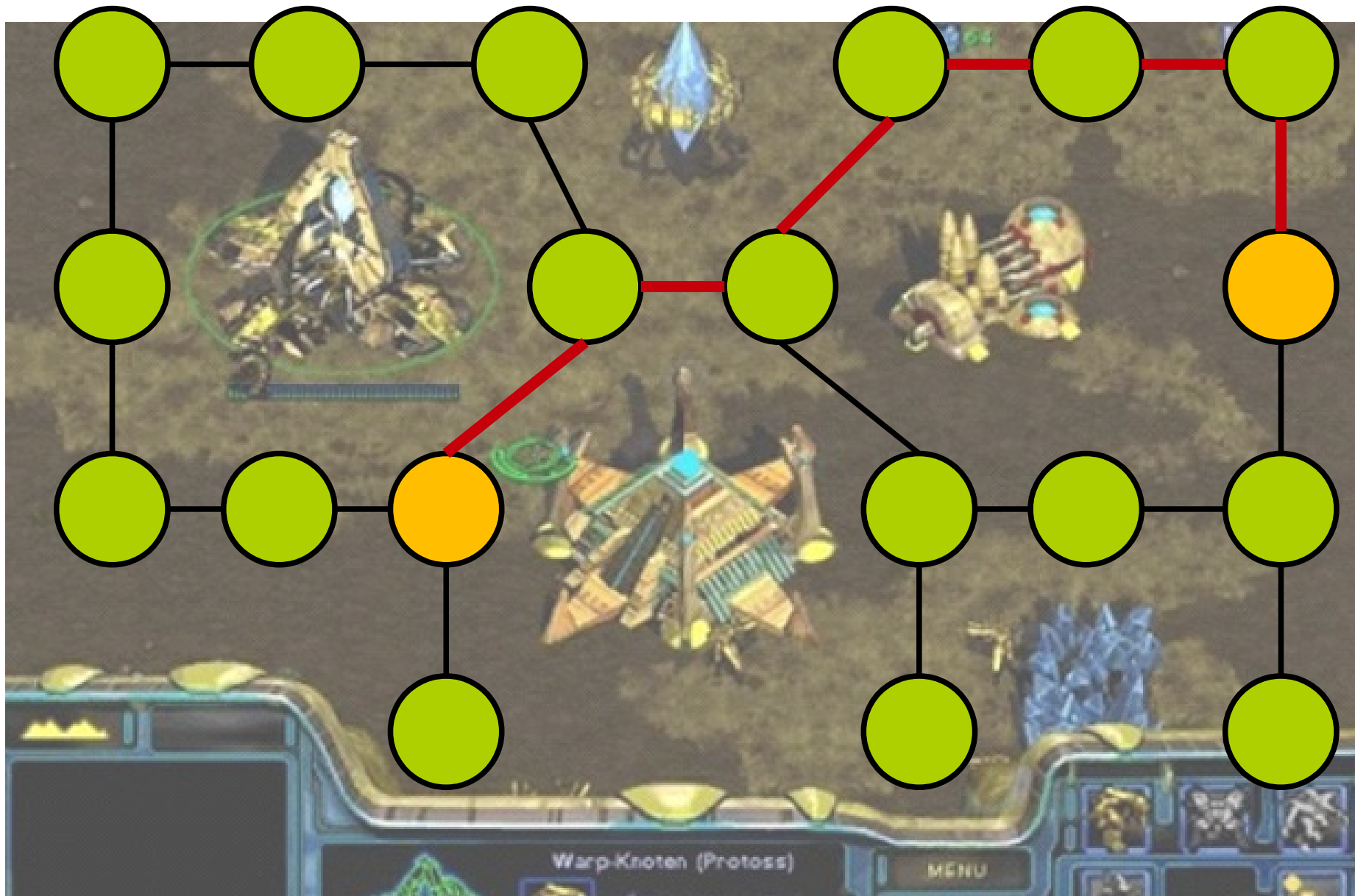


Programmation dynamique

François Schwarzenrüber
ENS Cachan - Bretagne

Plus court chemin



Sac à dos

0.5L 600€



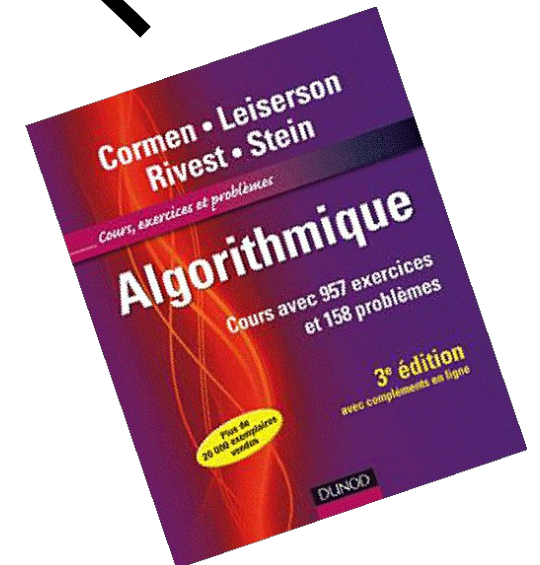
2L 700€



1L, 3€

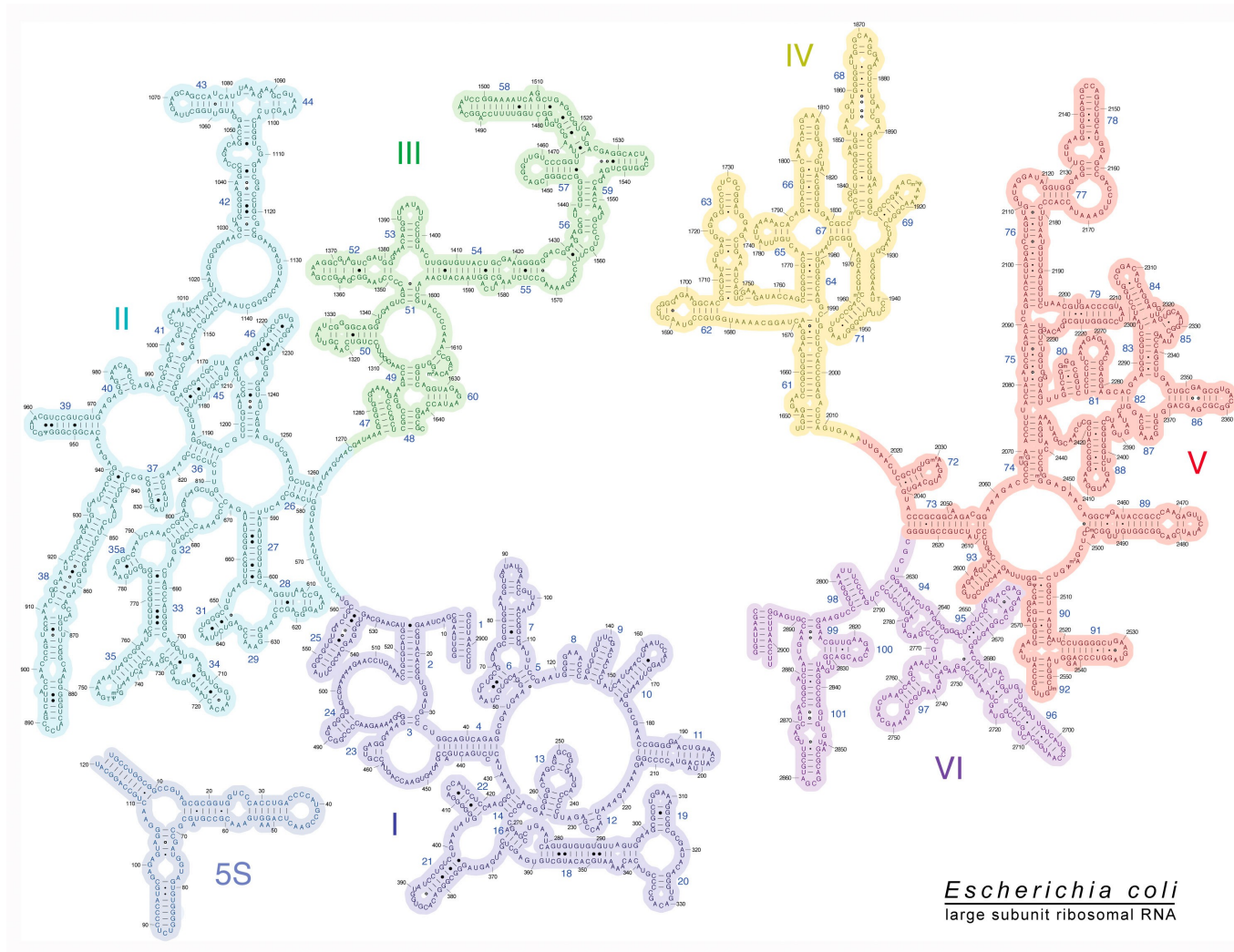


2.5L max



1L 200€

Structure de l'ARN



Justification de paragraphe

Le titre du roman est révélateur : Hugo a choisi de nous présenter la Révolution au travers de la terrible année 1793. Pour nous décrire la guerre civile qui ensanglanta alors la France, Victor Hugo a beaucoup lu, sans doute plus de quarante volumes dont la fameuse Histoire de la Révolution française de Michelet. On ne peut donc suspecter la vérité historique de cette fresque romanesque.

Etymologie

1950

- **Optimisation** de problème qui évolue dans le temps



2011

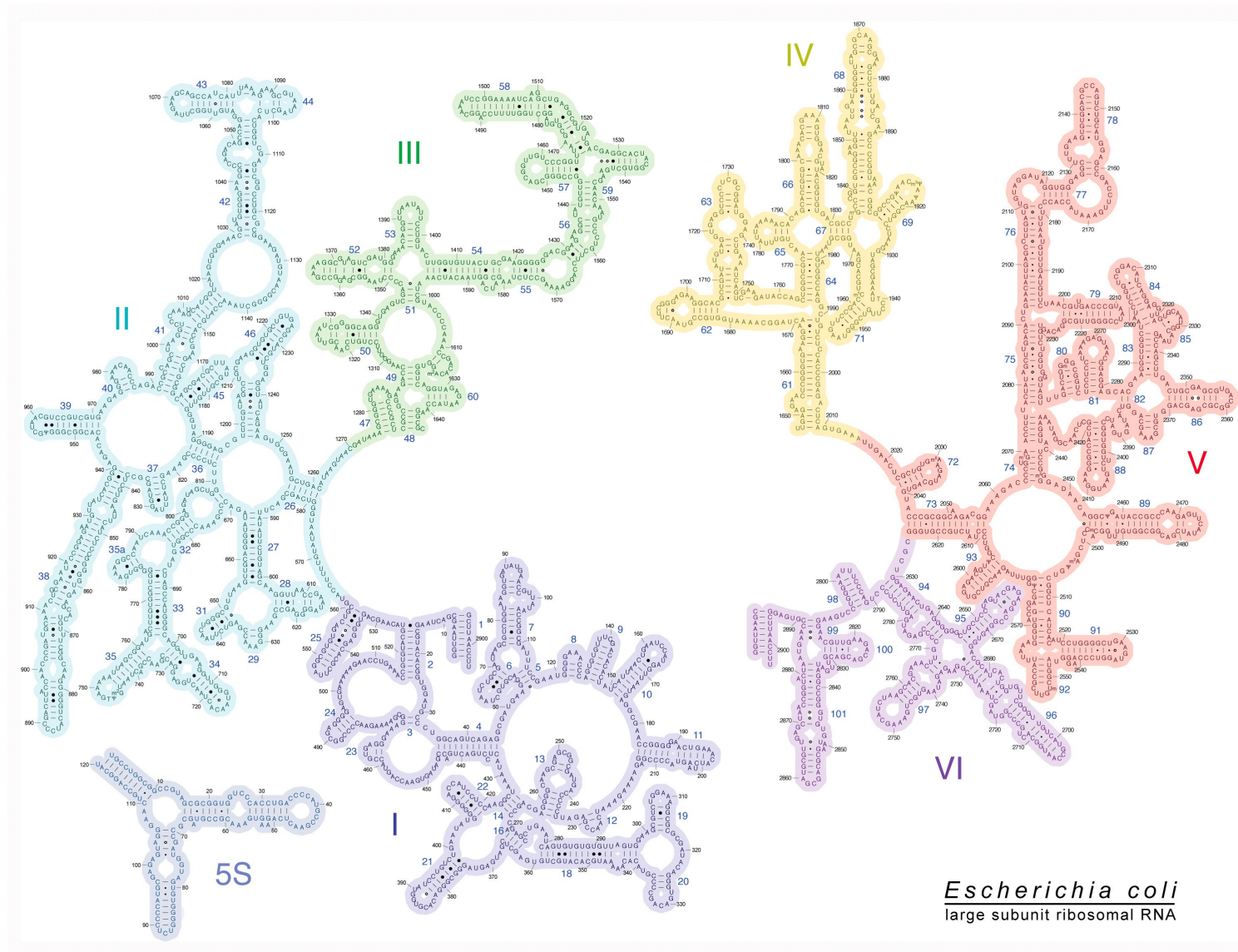
- Résoudre des **sous-problèmes** pour résoudre un problème d'optimisation



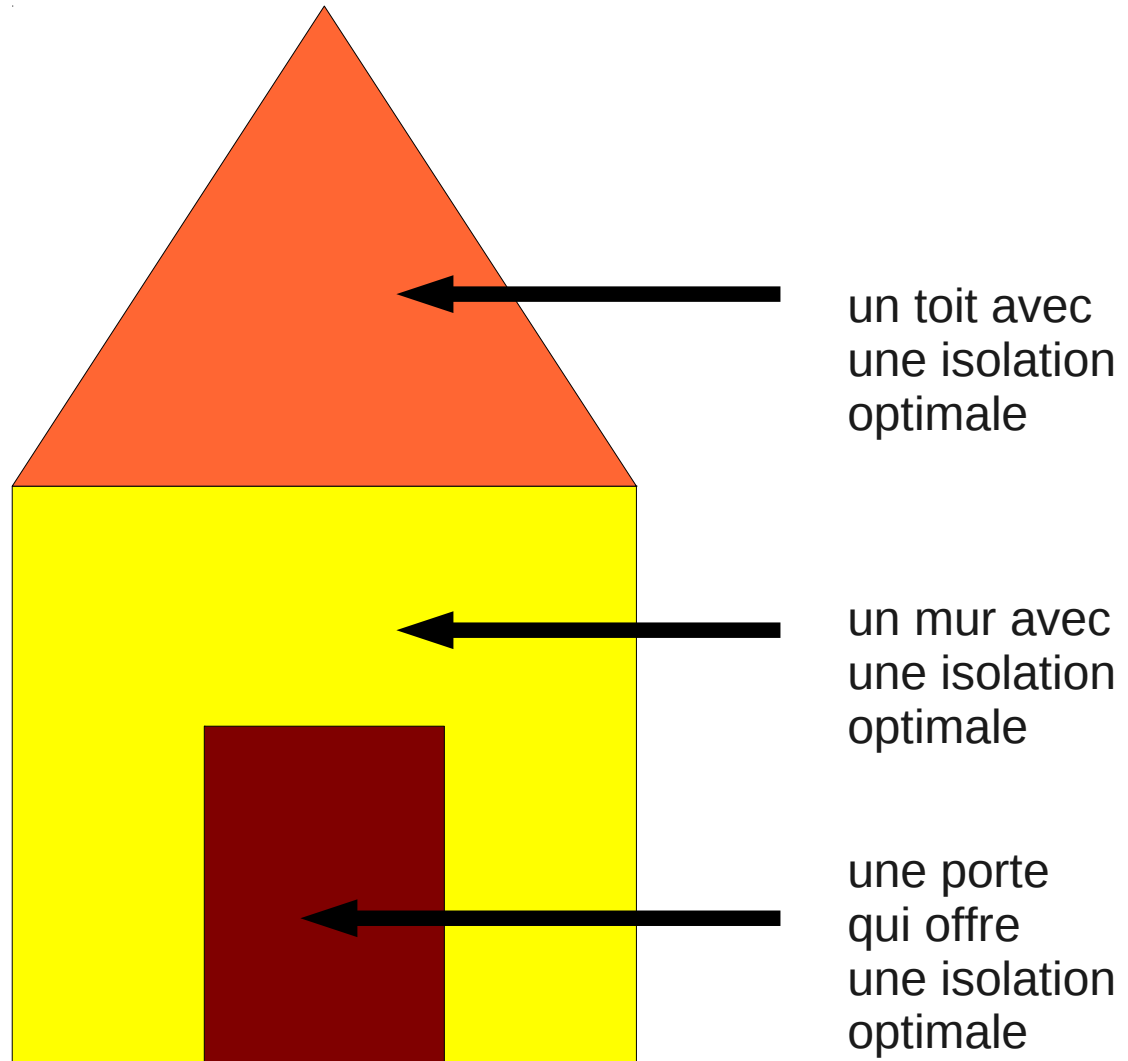
Plan

- Exhiber les sous-structures optimales
 - Exemple de la seconde structure ARN
- Ecrire l'algorithme
 - De la récursivité, non merci ! (Exemple de Fibonacci)
 - Ordonnancement des tâches
- Réduire l'espace mémoire utilisé
 - Exemple des plus court chemins

Principe des sous-structures optimales



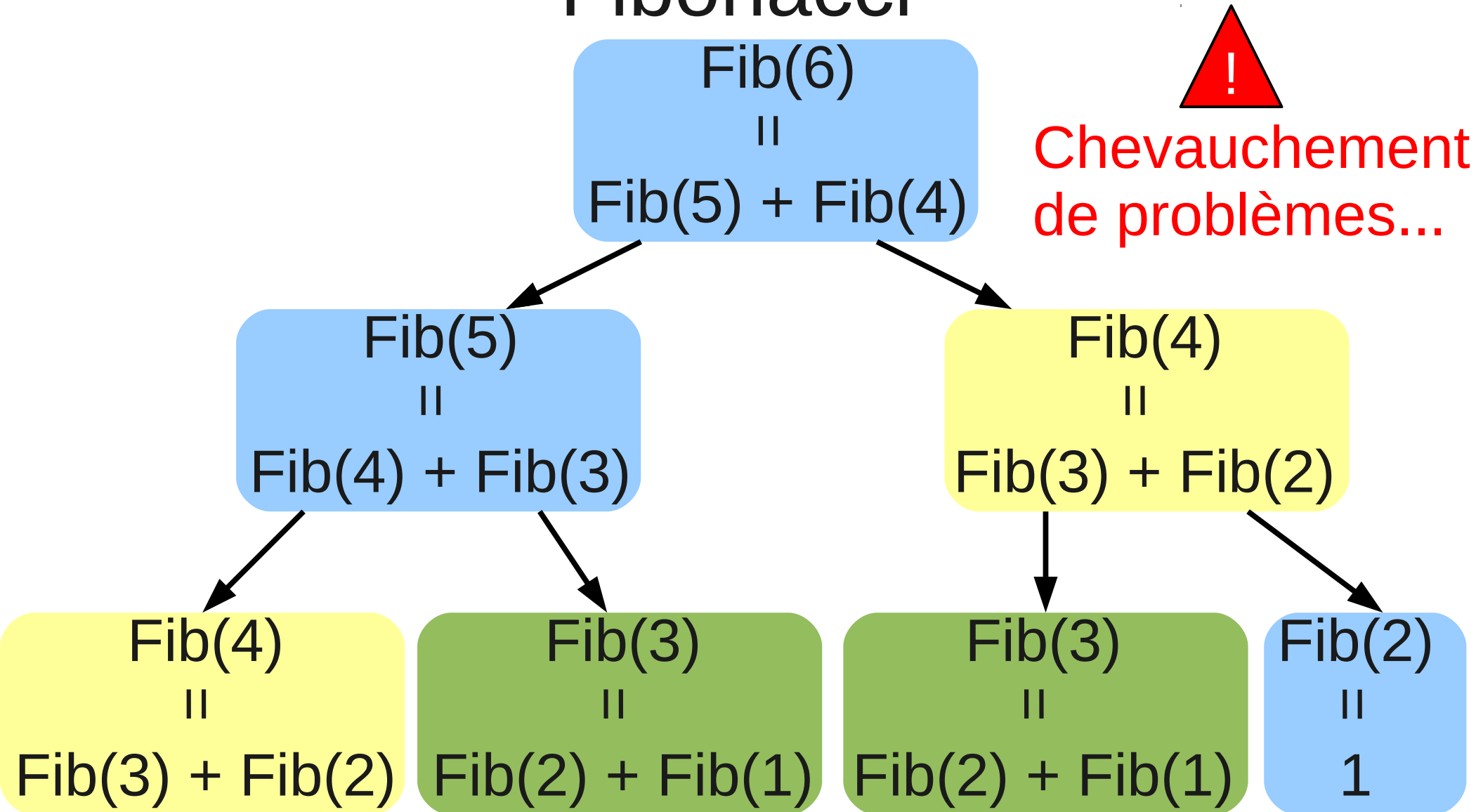
Une maison optimale a



Ecrire l'algorithme

De la récursivité, non merci !

Calcul récursif de la suite de Fibonacci



Mémoïsation

Fonction $f(n)$
retourner

Fonction $f(n)$
Si $f(n)$ est déjà calculé
retourner la valeur déjà calculée
Sinon
retourner

Fonction ascendante

Fib[1] := 1

Fib[2] := 1

Fib[3] := Fib[2] + Fib[1]

Fib[4] := Fib[3] + Fib[2]

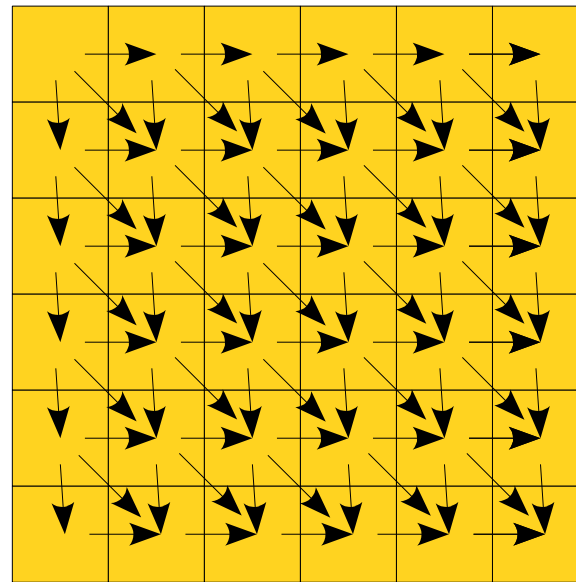
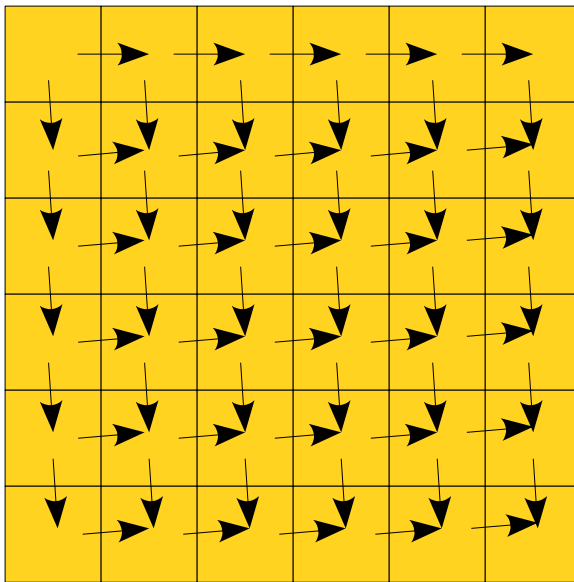
Fib[5] := Fib[4] + Fib[3]

Fib[6] := Fib[5] + Fib[4]



Tri fusion ?

Ordonnancement des tâches



Principe

Fonction résoudre(un grand problème)

Résolution des sous-problèmes triviaux

On parcourt les sous-problèmes P
par ordre croissant

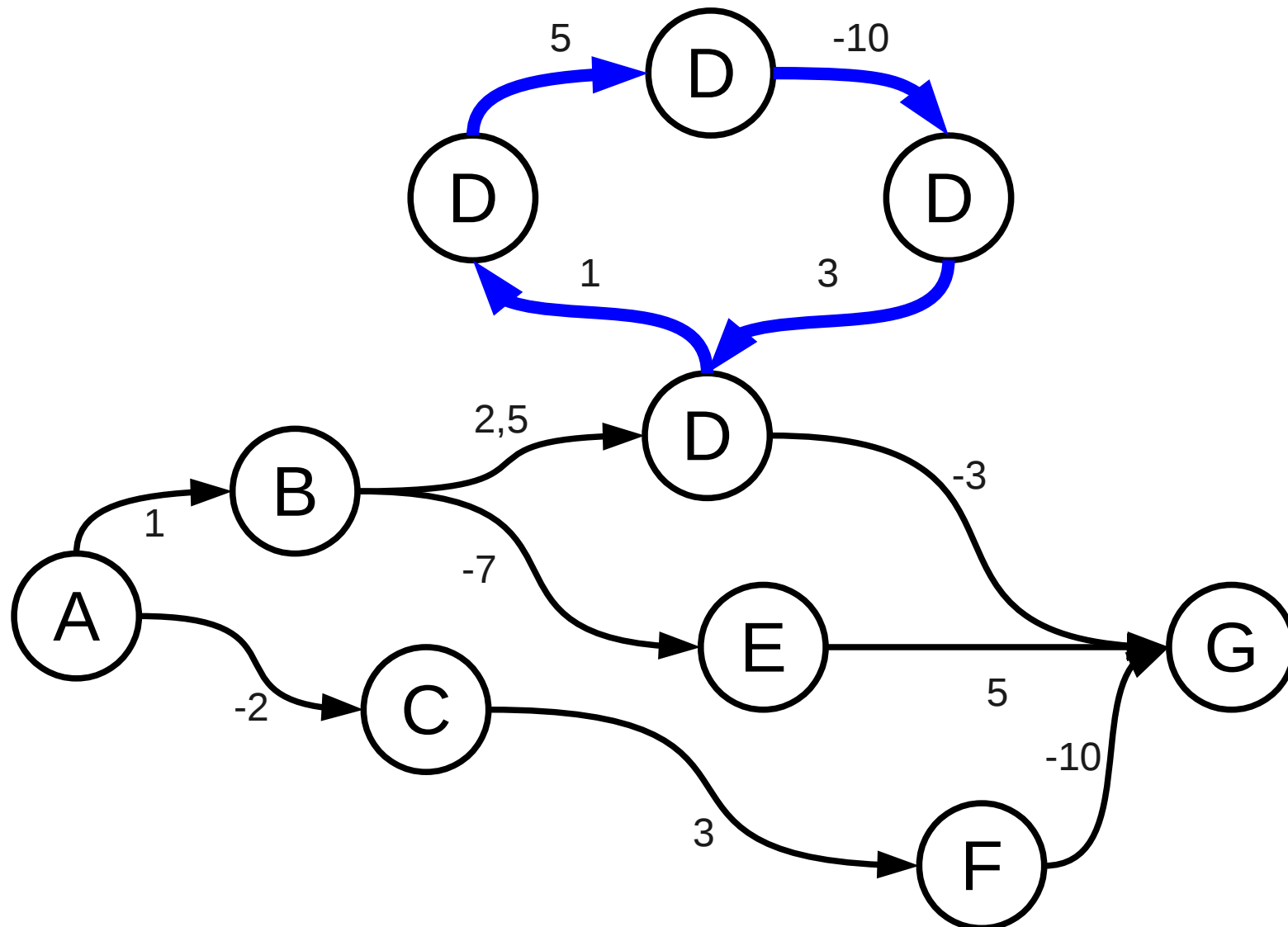
On résout P à partir des solutions
de problèmes plus petits

retourner solution du grand problème

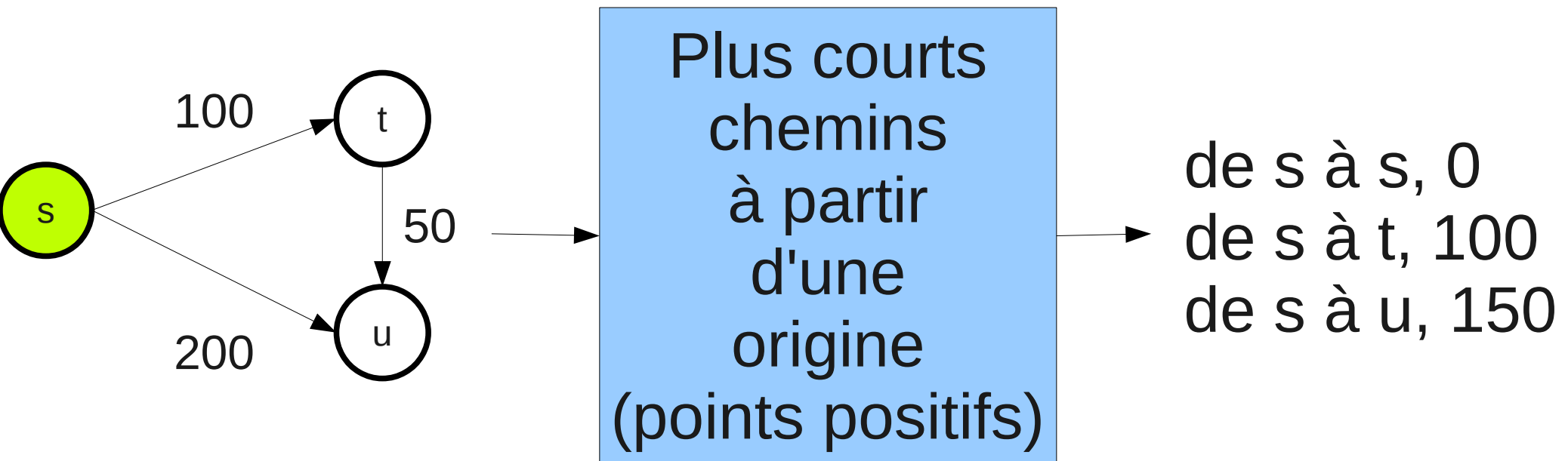
Réduire l'espace

- Exemple : Plus court chemins dans un graphe avec poids négatifs autorisés

Un ennemi : un cycle de poids négatifs

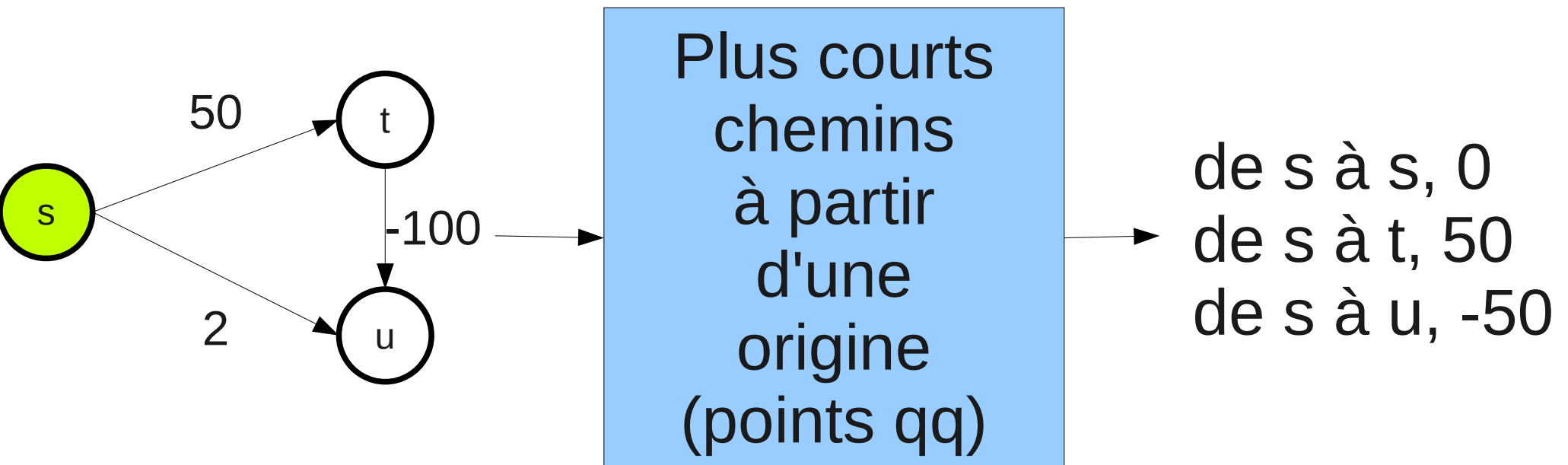


Problème des plus courts chemins à partir d'une origine

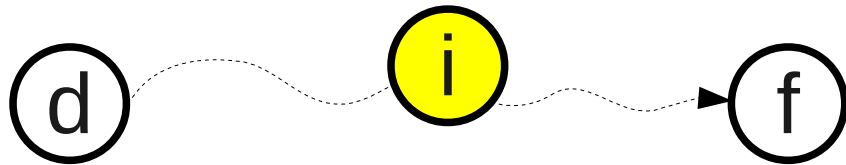


(algorithme de Dijkstra)

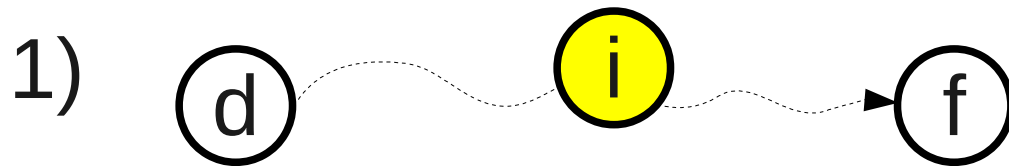
Problème des plus courts chemins à partir d'une origine



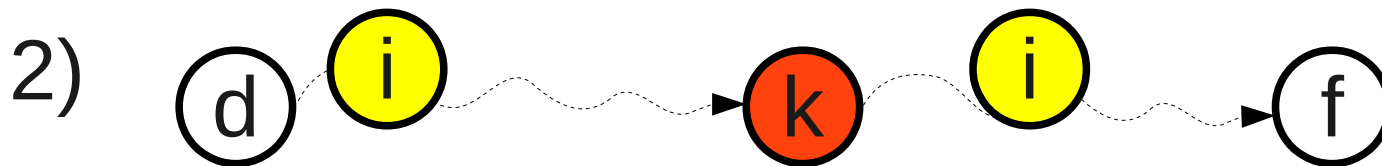
Le problème d'optimisation exhibe une sous-structure optimale.



$i \leq k \dots$

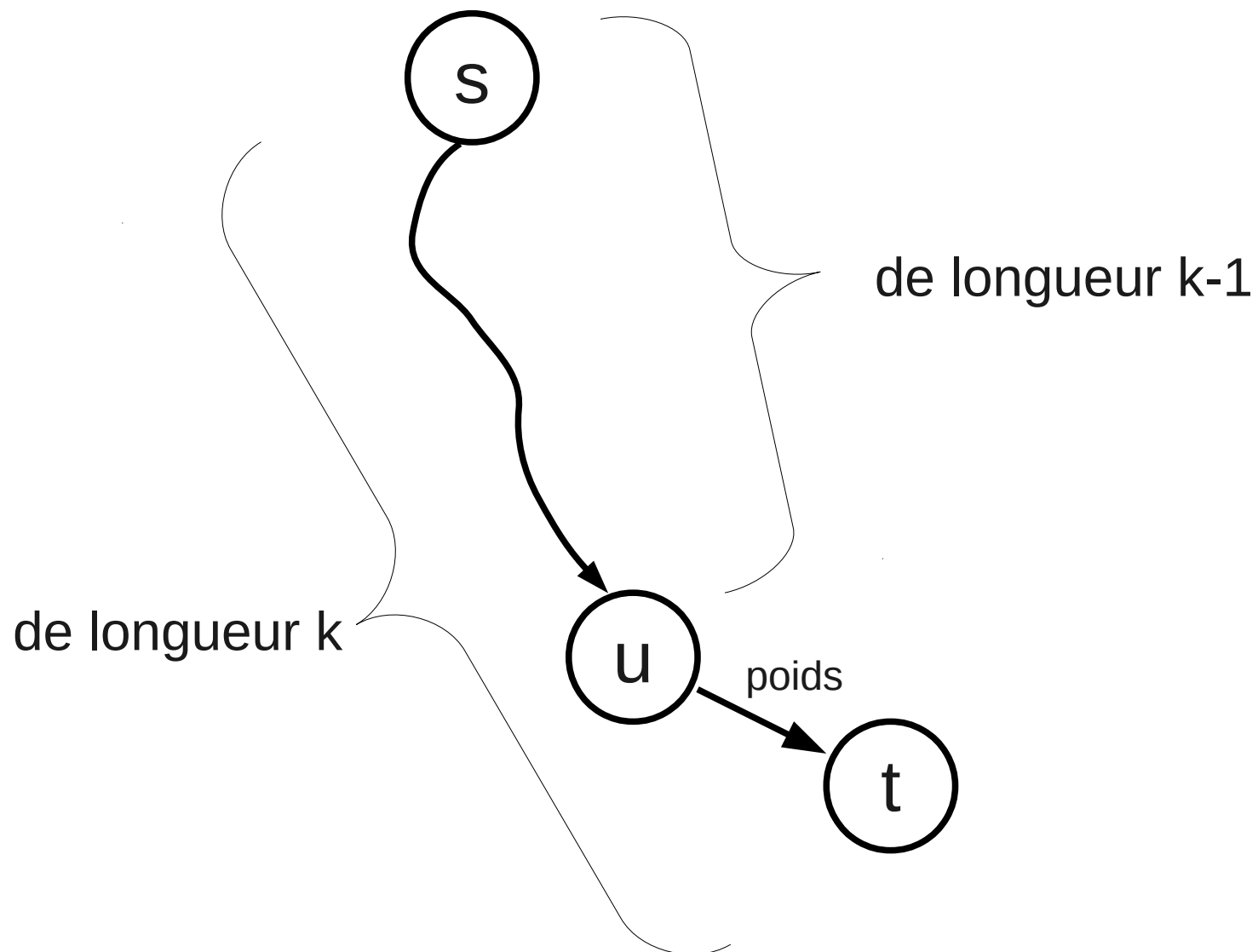


$i \leq k-1$

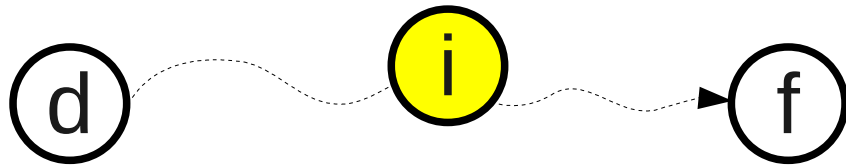


$i \leq k-1$

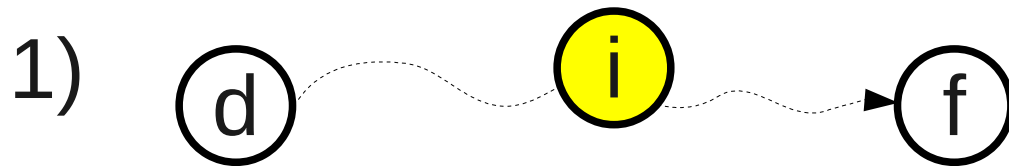
Algorithme de Bellman-Ford



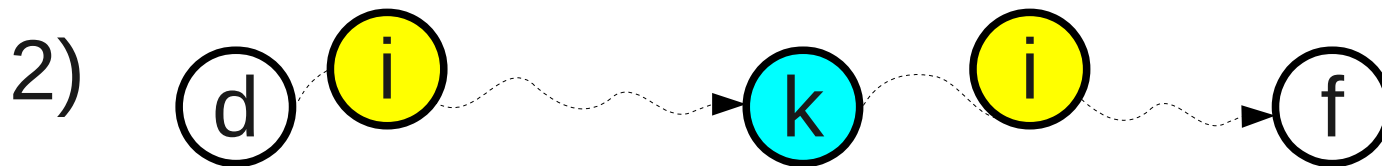
Algorithme de Floyd-Warshall



$i \leq k \dots$

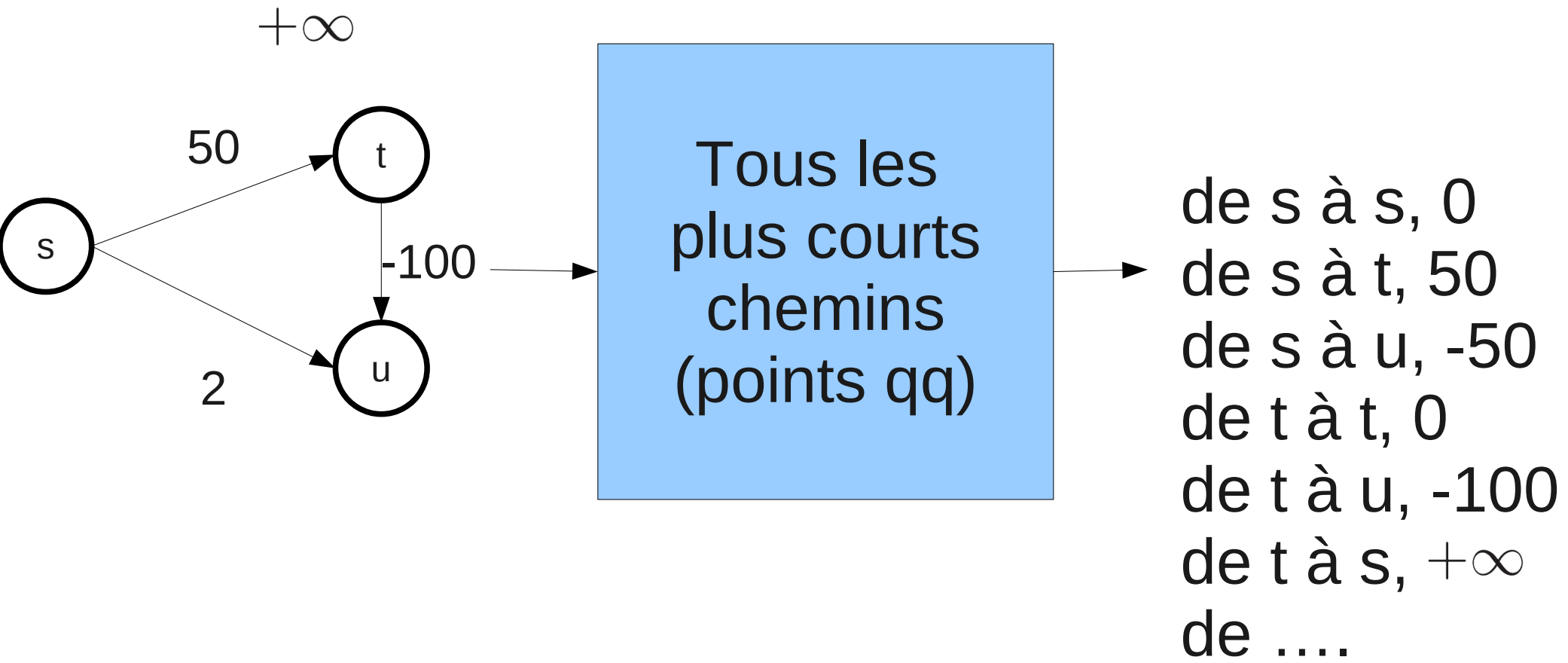


$i \leq k-1$



$i \leq k-1$

Problème de tous les plus courts chemins



Résumé des algorithmes de plus courts chemins

		Temps	Espace
Avec origine Sans cycle	Tri topologique puis calcul	$O(S+A)$	$O(S+A)$
Avec origine Poids positifs	Dijkstra	$O((S+A) \log S)$ $O(S \log S + A)$ en amorti	$O(S+A)$
Avec origine Tous les poids	Bellman-Ford	$O(SA)$	$O(S^2)$
Tous les points comme origine Tous les poids	Floyd-Warshall	$O(S^3)$	$O(S^3)$

Résumé des algorithmes de plus courts chemins

		Temps	Espace
Avec origine Sans cycle	Tri topologique puis calcul	$O(S+A)$	$O(S+A)$
Avec origine Poids positifs	Dijkstra	$O((S+A) \log S)$ $O(S \log S + A)$ en amorti	$O(S+A)$
Avec origine Tous les poids	Bellman-Ford	$O(SA)$	$O(S^2)$
Tous les points comme origine Tous les poids	Floyd-Warshall	$O(S^3)$	$O(S^3)$

Résumé des algorithmes de plus courts chemins

		Temps	Espace
Avec origine Sans cycle	Tri topologique puis calcul	$O(S+A)$	$O(S+A)$
Avec origine Poids positifs	Dijkstra	$O((S+A) \log S)$ $O(S \log S + A)$ en amorti	$O(S+A)$
Avec origine Tous les poids	Bellman-Ford	$O(SA)$	$O(S)$
Tous les points comme origine Tous les poids	Floyd-Warshall	$O(S^3)$	$O(S^2)$